EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KOIDE
FÜÜSIKA-, MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1963, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1963, № 1

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛОЙ

М. ЛЕВИН

В некоторых работах, например [1, 7], предлагается для приближенного вычисления определенных интегралов следующая формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right) \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} p_n(x)\right]_{-1}^{1} + R_n(f), \tag{1}$$

где

$$R_n(f) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-1}^{1} p_n(x) \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right] dx, \tag{2}$$

а $p_n(x)$ — произвольный многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным единице.

В настоящей статье для этой формулы и ее обобщения (на случай двойных интегралов) решаются экстремальные задачи, аналогичные тем, которые решаются в [3].

§ 1. Решение экстремальной задачи для формулы (1)

Алгебраическая степень точности (максимальная степень многочлена $f(x)$, для которого $R_n(f)=0$) формулы (1) не меньше $n-1$. Выбирая многочлен $p_n(x)$ определенным образом, можно формулу (1) улучшить в том или ином смысле. Например, в [1] показывается, что, при выборе в качестве $p_n(x)$ многочленов Лежандра, алгебраическая степень точности формулы (1) повышается до $2n-1$. Отказываясь от требования увеличения алгебраической степени точности, мы решим для (1) следующую экстремальную задачу.

Рассмотрим множество F функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[-1, 1]$ непрерывную производную порядка n, удовлетворяющую условию

$$\left|\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right| \leqslant M_n. \tag{3}$$

Задача заключается в отыскании многочлена $p_n(x)$, минимизирующего величину

$$R_n = \sup_{f \in F} |R_n(f)|.$$

Формула, соответствующая такому выбору многочлена, называется наилучшей среди формул (1) для множества функций F.

По (2) мы имеем неравенство

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_n}{n!} \int_{-1}^{1} |p_n(x)|\, dx. \tag{4}$$

Для функции φ такой, что $\varphi^{(n)}(x) = M_n \operatorname{sign} p_n(x)$ (4) превращается в равенство. Функция φ не принадлежит к множеству F, но в метрике L ее можно с любой степенью точности приблизить функциями из F. Поэтому имеет место равенство

$$R_n = \frac{M_n}{n!} \int_{-1}^{1} |p_n(x)|\, dx,$$

откуда, по теореме Е. И. Золотарева — А. Н. Коркина [2], R_n принимает наименьшее значение в том и только в том случае, когда $p_n(x)$ есть многочлен Чебышева второго рода со старшим коэффициентом, равным единице

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В этом случае находим

$$R_n^{(0)} = \min_{p_n} R_n = \min_{p_n} \sup_{f \in F} |R_n(f)| = \frac{M_n}{n! 2^{n-1}}.$$

При любом другом многочлене точная верхняя граница ошибки формулы (1) больше числа $R_n^{(0)}$.

Построим теперь наилучшую формулу для множества F. Для этого используем ультрасферические многочлены

$$p_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n + \lambda + \frac{1}{2})} p_n^{\left(\lambda - \frac{1}{2},\, \lambda - \frac{1}{2}\right)}(x), \tag{5}$$

где через $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ обозначены многочлены Якоби, нормированные условием $p_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$. Нам нужны будут следующие свойства многочленов (5) (см. [5]):

$$p_n^{(\lambda)}(1) = \binom{n+2\lambda-1}{n}, \tag{6}$$

$$p_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n p_n^{(\lambda)}(x), \tag{7}$$

$$\lim_{x \to \infty} x^{-n} p_n^{(\lambda)}(x) = 2^n \binom{n+\lambda-1}{n}, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx} p_n^{(\lambda)}(x) = 2\lambda p_{n-1}^{(\lambda+1)}(x). \tag{9}$$

Так как многочлены Чебышева второго рода отличаются от $p_n^{(1)}(x)$ только множителем, то, благодаря свойству (8), мы имеем решение нашей экстремальной задачи в виде

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n} p_n^{(1)}(x).$$

Исходя из (9), получаем равенства

$$\frac{d^k}{dx^k}\,p_n(x) = \frac{k!}{2^{n-k}}\,p_{n-k}^{(k+1)}(x) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Отсюда, используя (6) и (7), находим

$$\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\,p_n(1) = \frac{(n-k-1)!\,(2n-k)!}{2^{k+1}(2n-2k-1)!\,(k+1)!},$$

$$\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\,p_n(-1) = \frac{(-1)^{k+1}(n-k-1)!\,(2n-k)!}{2^{k+1}(2n-2k-1)!\,(k+1)!}.$$

Таким образом, наилучшая для множества F формула (1) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\,[f^{(k)}(1) - (-1)^{k+1} f^{(k)}(-1)] + R_n(f), \tag{10}$$

где

$$\lambda_k = (-1)^k\,\frac{(n-k-1)!\,(2n-k)!}{2^{k+1}n!\,(2n-2k-1)!\,(k+1)!} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Верхняя грань погрешности $|R_n(f)|$ формулы (10) дается числом $R_n^{(0)}$.

Замечание. Для четных функций формула (10) принимает вид

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{(k)}(1) + \frac{1}{2} R_n(f).$$

Например, для $n=5$ и четной $f(x)$ получаем формулу

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx \approx f(1) - \frac{9}{20} f'(1) + \frac{7}{60} f''(1) - \frac{7}{384} f'''(1) + \frac{1}{640} f^{(\mathrm{IV})}(1), \tag{11}$$

ошибка которой не превосходит числа 0,0003 M_5.

Пример.

$$I = \int_{0}^{1} \cos x\,dx = 0{,}84147.$$

Вычисление по (11) дает $I \approx 0{,}84143$, значит ошибка составляет $\approx$ $\approx 0{,}005\%$ ответа.

§ 2. Обобщение формулы (1) для случая двойных интегралов

Чтобы вывести формулу типа (1) для двойных интегралов, мы будем исходить из равенства

$$\int_{-1}^{1} u v^{(n)}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[u^{(k)} v^{(n-k-1)}\right]_{x=-1}^{1} + (-1)^n \cdot \int_{-1}^{1} u^{(n)} v\,dx. \tag{12}$$

Повторное применение его дает

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u(x,y)\, v^{(m+n)}_{x^m y^n}(x,y)\,dxdy=$$

$$=\sum_{i,k=0}^{m-1,\,n-1}(-1)^{i+k}\left[\left[u^{(i+k)}_{x^i y^k}\, v^{(m-i-1+n-k-1)}_{x^{m-i-1} y^{n-k-1}}\right]_{x=-1}^{1}\right]_{y=-1}^{1}+$$

$$+(-1)^m\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_{-1}^{1}\left[u^{(m+k)}_{x^m y^k}\, v^{(n-k-1)}_{y^{n-k-1}}\right]_{y=-1}^{1}dx+(-1)^n\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u^{(n)}_{y^n}v^{(m)}_{x^m}\,dxdy.$$

Отсюда, учитывая, что по (12)

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[u^{(m+k)}_{x^m y^k}\, v^{(n-k-1)}_{y^{n-k-1}}\right]_{y=-1}^{1}=\int_{-1}^{1}u^{(m)}_{x^m}v^{(n)}_{y^n}\,dy-(-1)^n\int_{-1}^{1}u^{(m+n)}_{x^m y^n}\,v\,dy,$$

получаем

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u\, v^{(m+n)}_{x^m y^n}\,dxdy=$$

$$=\sum_{i,k=0}^{m-1,\,n-1}(-1)^{i+k}\left[\left[u^{(i+k)}_{x^i y^k}\, v^{(m-i+n-k-2)}_{x^{m-i-1} y^{n-k-1}}\right]_{x=-1}^{1}\right]_{y=-1}^{1}+R(u),$$

где

$$R(u)=(-1)^m\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u^{(m)}_{x^m}v^{(n)}_{y^n}\,dxdy+(-1)^n\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u^{(n)}_{y^n}v^{(m)}_{x^m}\,dxdy-$$

$$-(-1)^{m+n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u^{(m+n)}_{x^m y^n}\,v\,dxdy.$$

Если взять $u=f(x,y)$*, $v=\frac{1}{m!\,n!}p(x,y)$, где $p(x,y)$ многочлен степени m относительно x и степени n относительно y со старшим коэффициентом (при $x^m y^n$), равным единице, то будем иметь следующую формулу

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)\,dxdy=\frac{1}{m!\,n!}\sum_{i,k=0}^{m-1,\,n-1}(-1)^{i+k}\left[\left[f^{(i+k)}_{x^i y^k}\, p^{(m-i+n-k-2)}_{x^{m-i-1} y^{n-k-1}}\right]_{x=-1}^{1}\right]_{y=-1}^{1}+$$

$$+R(f), \tag{13}$$

* Считаем, что $f^{(m)}_{x^m}$, $f^{(n)}_{y^n}$, $f^{(m+n)}_{x^m,\, y^n}$ непрерывны на $[-1,1;\ -1,1]$ и $\max\limits_{[-1,1;\,-1,1]}\left|f^{(m)}_{x^m}\right|=M_m$, $\max\limits_{[-1,1;\,-1,1]}\left|f^{(n)}_{y^n}\right|=N_n$, $\max\limits_{[-1,1;\,-1,1]}\left|f^{(m+n)}_{x^m y^n}\right|=P_{mn}$.

оценка остаточного члена которой имеет вид

$$|R(f)| \leqslant \frac{2M_m}{m!n!} \int_{-1}^{1} \left|p_{y^n}^{(n)}\right| dx + \frac{2N_n}{m!\,n!} \int_{-1}^{1} \left|p_{x^m}^{(m)}\right| dy + \frac{P_{mn}}{m!\,n!} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |p|\, dxdy. \tag{14}$$

Решим теперь для формулы (13) экстремальную задачу в такой постановке: среди всевозможных формул вида (13) выбрать ту, для которой правая часть в оценке ошибки (14) при заданных числах M_m, N_n и P_{mn} была бы наименьшей.

Для этого покажем, что многочлен

$$p(x, y) = Q_m(x)\, Q_n(y), \tag{15}$$

где через $Q_k(x)$ обозначен многочлен Чебышева второго рода степени k со старшим коэффициентом единица, минимизирует правую часть (14).

Так как при таком выборе

$$p_{y^n}^{(n)} = n! Q_m(x) \quad \text{и} \quad p_{x^m}^{(m)} = m! Q_n(y),$$

то этим многочлен (15) минимизирует первые два слагаемые в правой части неравенства (14). Остается показать, что он дает наименьшее значение и третьему интегралу.

По известному соотношению (см. [2])

$$\int_{-1}^{1} x^i \operatorname{sign} Q_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } i < m \\ \frac{1}{2^{m-1}}, & \text{если } i = m. \end{cases}$$

Для произвольного многочлена $q(x, y)$ степени m относительно x и степени n относительно y со старшим коэффициентом (при $x^m y^n$), равным единице, применение этого соотношения дает

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |q(x, y)|\, dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} q(x, y) \operatorname{sign} q(x, y)\, dxdy \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} q(x, y) \operatorname{sign}[Q_m(x)\, Q_n(y)]\, dxdy =$$

$$= \sum_{i, j=0}^{m, n} \alpha_{ij} \int_{-1}^{1} x^i \operatorname{sign} Q_m(x)\, dx \int_{-1}^{1} y^j \operatorname{sign} Q_n(y)\, dy = \frac{1}{2^{m+n-2}}.$$

В то же время

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |Q_m(x)\, Q_n(y)|\, dxdy = \int_{-1}^{1} |Q_m(x)|\, dx \int_{-1}^{1} |Q_n(y)|\, dy = \frac{1}{2^{m+n-2}},$$

чем и доказывается, что многочлен (15) минимизирует третий интеграл в (14).

Используя результаты предыдущего параграфа, находим, что решением поставленной экстремальной задачи является формула

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dxdy = \sum_{i,\, k=0}^{m-1,\, n-1} \left[\left[\lambda_{ik}(x, y)\, f_{x^i y^k}^{(i+k)}(x, y)\right]_{x=-1}^{1}\right]_{y=-1}^{1} + R(f), \tag{16}$$

где

$$\lambda_{ik}(x,y)=\frac{(-1)^{i+k}(m-i-1)!(2m-i)!(n-k-1)!(2n-k)!}{2^{i+k+2}m!n!(2m-2i-1)!(i+1)!(2n-2k-1)!(k+1)!}x^{i+1}y^{k+1}$$

$$(i=0,1,\ldots,m-1;\ k=0,1,\ldots,n-1),$$

$$|R(f)|\leqslant\frac{M_m}{m!2^{m-2}}+\frac{N_n}{n!2^{n-2}}+\frac{P_{mn}}{m!n!2^{m+n-2}}. \tag{17}$$

Для четной по каждому переменному $f(x,y)$ формула (16) принимает вид

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy=\sum_{i,k=0}^{m-1,n-1}\lambda_{ik}f^{(i+k)}_{x^iy^k}(1,1)+\tfrac{1}{4}R(f),$$

где $\lambda_{ik}=\lambda_{ik}(1,1)$, а $|R(f)|$ оценивается по (17).

Все изложенное в настоящем параграфе обобщается и на случай интегралов произвольной кратности.

§ 3. Экстремальная задача для класса функций $W_{02}^{(m,n)}(P)$

Функция $f(x,y)$ принадлежит классу $W_{02}^{(m,n)}(P)$, если на [0,1; 0,1] частные производные $f^{(i+j)}_{x^iy^j}(x,y)$ $(i=0,1,\ldots,m;\ j=0,1,\ldots,n)$ непрерывны, $f^{(i)}_{x^i}(0,y)\equiv f^{(j)}_{y^j}(x,0)\equiv 0$ $(i=0,1,\ldots,m-1;\ j=0,1,\ldots,n-1)$, а

$$\left\{\int_0^1\int_0^1[f^{(m+n)}_{x^my^n}(x,y)]^2dxdy\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant P.$$

Поступая так же, как при выводе формулы (13), мы получаем для $f(x,y)\in W_{02}^{(m,n)}(P)$ формулу

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy=\frac{1}{m!n!}\sum_{i,k=0}^{m-1,n-1}(-1)^{i+k}f^{(i+k)}_{x^iy^k}(1,1)\,p^{(m-i+n-k-2)}_{x^{m-i-1}y^{n-k-1}}(1,1)+R(f), \tag{18}$$

где $p(x,y)$ многочлен степени m относительно x и степени n относительно y со старшим членом x^my^n.

Введем обозначение

$$A_{ik}=\frac{(-1)^{i+k}}{m!n!}p^{(m-i+n-k-2)}_{x^{m-i-1}y^{n-k-1}}(1,1)\ \begin{pmatrix}i=0,1,\ldots,m-1;\\ k=0,1,\ldots,n-1\end{pmatrix}.$$

Тогда (18) примет вид

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy=\sum_{i,k=0}^{m-1,n-1}A_{ik}f^{(i+k)}_{x^iy^k}(1,1)+R(f). \tag{19}$$

Решим теперь для формулы (19) экстремальную задачу в классе функций $W_{02}^{(m,n)}(P)$. Она заключается в следующем: выбрать значения A_{ik} $(i=0,1,\ldots,m-1;\ k=0,1,\ldots,n-1)$ так, чтобы величина

$$R = \sup_{f \in W_{02}^{(m,\, n)}(P)} |R(f)|$$

приняла наименьшее значение.

Известно (напр., [6]), что для $W_{02}^{(m,\, n)}(P)$ справедливо равенство

$$f(x, y) = \int_0^1\int_0^1 f^{(m+n)}_{x^m y^n}(t, u)\, E(x-t)\, E(y-u)\, \frac{(x-t)^{m-1}(y-u)^{n-1}}{(m-1)!\,(n-1)!}\, dt du,$$

где

$$E(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Подставляя это в (19), получаем

$$R(f) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f^{(m+n)}_{x^m y^n}(t, u)\, E(x-t)\, E(y-u)\, \frac{(x-t)^{m-1}(y-u)^{n-1}}{(m-1)!\,(n-1)!}\, dt\, du\, dx\, dy -$$

$$- \sum_{i,\, k=0}^{m-1,\, n-1} A_{ik} \int_0^1\int_0^1 f^{(m+n)}_{x^m y^n}(t, u)\, \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[E(x-t)\, E(y-u)\, \frac{(x-t)^{m-1}(y-u)^{n-1}}{(m-1)!\,(n-1)!} \right]^{(i+k)}_{x^i y^k} \right\}_{\substack{x=1\\ y=1}} dt\, du =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 f^{(m+n)}_{x^m y^n}(t, u)\, K_{mn}(t, u)\, dt\, du,$$

где

$$K_{mn}(t, u) = \frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!} \left[\frac{(1-t)^m (1-u)^n}{mn} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i,\, k=0}^{m-1,\, n-1} A_{ik}\, \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m-i-1)!\,(n-k-1)!}\, (1-t)^{m-i-1} (1-u)^{n-k-1} \right].$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|R(f)| \leqslant P \left\{ \int_0^1\int_0^1 [K_{mn}(t, u)]^2 dt\, du \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(x, y) = P \underbrace{\int_0^x \ldots \int_0^x}_{m} \underbrace{\int_0^y \ldots \int_0^y}_{n} K_{mn}(x, y)\, \underbrace{dx \ldots dx}_{m}\, \underbrace{dy \ldots dy}_{n} \left\{ \int_0^1\int_0^1 [K_{mn}(t, u)]^2 dt du \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$\varphi^{(i)}_{x^i}(0, y) \equiv \varphi^{(k)}_{y^k}(x, 0) \equiv 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1;\ k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$\left\{ \int_0^1\int_0^1 \left[\varphi^{(m+n)}_{x^m y^n} \right]^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{P^2 \int_0^1\int_0^1 [K_{mn}(x, y)]^2\, dx dy}{\int_0^1\int_0^1 [K_{mn}(t, u)]^2 dt du} \right\}^{\frac{1}{2}} = P,$$

то $\varphi(x, y) \in W_{02}^{(m,n)}(P)$. Далее, для нее

$$R(\varphi) = \int_0^1\int_0^1 \frac{PK_{mn}(t, u)}{\left\{\int_0^1\int_0^1 [K_{mn}(t, u)]^2 dtdu\right\}^{\frac{1}{2}}} K_{mn}(t, u)\, dtdu =$$

$$= P\left\{\int_0^1\int_0^1 [K_{mn}(t, u)]^2 dtdu\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Значит, для $\varphi(x, y)$ неравенство (20) превращается в равенство. Поэтому

$$R = \sup_{f \in W_{02}^{(m,n)}(P)} |R(f)| = P\left\{\int_0^1\int_0^1 [K_{mn}(t, u)]^2 dtdu\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Таким образом, задача свелась к минимизации интеграла

$$I = \int_0^1\int_0^1 [K_{mn}(t, u)]^2 dtdu. \tag{22}$$

Для простоты вычислений сделаем в (22) замены

$$B_{ik} = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{i!\,k!} A_{m-i-1,\, n-k-1} \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, m-1 \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{matrix}\right), \tag{23}$$

заменим $1-t$ через t и $1-u$ через u. Тогда получим

$$I = \frac{1}{[(m-1)!\,(n-1)!]^2} I_1, \tag{24}$$

где

$$I_1 = \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{t^m u^n}{mn} - \sum_{i,\,k=0}^{m-1,\, n-1} B_{ik} t^i u^k\right]^2 dtdu. \tag{25}$$

Минимизируем теперь I_1. Так как $\min I_1$, очевидно, существует, то для нахождения B_{ik}, минимизирующих I_1, достаточно решить систему уравнений

$$-\frac{\partial I_1}{\partial B_{rs}} = \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{t^m u^n}{mn} - \sum_{i,\,k=0}^{m-1,\, n-1} B_{ik} t^i u^k\right] t^r u^s\, dtdu = 0$$

$$(r = 0, 1, \ldots, m-1;\quad s = 0, 1, \ldots, n-1),$$

которая после упрощений принимает вид

$$\left.\begin{matrix} \displaystyle\sum_{i,\,k=0}^{m-1,\, n-1} \frac{1}{(i+r+1)(k+s+1)} B_{ik} = \frac{1}{mn(m+r+1)(n+s+1)} \\ (r = 0, 1, \ldots, m-1;\quad s = 0, 1, \ldots, n-1). \end{matrix}\right\} \tag{26}$$

Определить этой системы Δ выражается через определители (см. например, [4])

$$\Delta_1 = \left|\frac{1}{i+j-1}\right|_{i,\,j=1}^{m} \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \left|\frac{1}{i+j-1}\right|_{i,\,j=1}^{n}$$

следующим образом

$$\Delta = \Delta_1^n \Delta_2^m = \left\{ \frac{[1!\,2!\,\ldots\,(m-1)!]^3}{m!\,(m+1)!\,\ldots\,(2m-1)!} \right\}^n \left\{ \frac{[1!\,2!\ldots(n-1)!]^3}{n!\,(n+1)!\,\ldots\,(2n-1)!} \right\}^m.$$

Так как $\Delta \neq 0$, система (26) имеет единственное решение, для нахождения которого решим предварительно систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+s} B_i^{(n)} = \frac{1}{n+s+1} \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{27}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta_2 = \frac{[1!\,2!\,\ldots\,(n-1)!]^3}{n!\,(n+1)!\,\ldots\,(2n-1)!}.$$

Используем известное равенство (см. [4])

$$\left| \frac{1}{x_i - \alpha_j} \right|_{i,j=1}^{n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{\prod\limits_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k) \prod\limits_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (\alpha_i - \alpha_k)}{\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i)},$$

где $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$. Взяв здесь $x_j = n+j-1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\alpha_j = n-j$ $(j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$, $\alpha_i = -1$, получим

$$\Delta^{(i)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{i-1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{i+1} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{i} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{i+2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{n+i-2} & \frac{1}{2n} & \frac{1}{n+i} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-i} \frac{[1!\,2!\ldots(n-1)!]^3\,(n!)^2\,(n+i-1)!}{(n-i+1)!\,[(i-1)!]^2\,[n!\,(n+1)!\ldots(2n-1)!]\,(2n)!}.$$

Применяя правило Крамера, имеем решение системы (27)

$$B_i^{(n)} = \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta_2} = (-1)^{n-i} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(n+i-1)!}{(n-i+1)!\,[(i-1)!]^2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

с помощью которого единственное решение системы (26) принимает вид

$$B_{ik} = \frac{1}{mn} B^{(m)}_{i+1} B^{(n)}_{k+1} =$$

$$= (-1)^{m-i+n-k} \frac{m!\,(m-1)!\,n!\,(n-1)!}{(2m)!\,(2n)!} \cdot \frac{(m+i)!\,(n+k)!}{(m-i)!\,(i!)^2\,(n-k)!\,(k!)^2} \tag{28}$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

По (23) и (28) находим значения

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \frac{m!\,n!\,(2m-i-1)!\,(2n-k-1)!}{(2m)!\,(2n)!\,(m-i-1)!\,(i+1)!\,(n-k-1)!\,(k+1)!} \tag{29}$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

являющиеся единственным решением нашей экстремальной задачи.

Итак, мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Для класса функций* $W^{(m,\,n)}_{02}(P)$ *среди всевозможных формул* (19) *наилучшей* (*с наименьшей величиной оценки* R) *является формула* (19) *с коэффициентами* A_{ik}, *вычисленными по* (29).

Следующая теорема дает интересное свойство полученной наилучшей формулы.

Теорема 2. *Формула*

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 f(x,y)\,dxdy \approx \sum_{i,\,k=0}^{m-1,\,n-1} A_{ik} f^{(i+k)}_{x^i y^k}(1,1) \tag{30}$$

с коэффициентами A_{ik}, *вычисленными по* (29), *точна для любого многочлена вида*

$$f(x,y) = x^m y^n \sum_{i,\,k=0}^{m-1,\,n-1} a_{ik} x^i y^k.$$

Доказательство. Теорему можно, очевидно, доказать проще, чем это сделано ниже, однако мы приводим более сложное доказательство, так как нам кажется, что его метод может представить некоторый интерес.

Теорема будет доказана, если мы докажем ее для $f(x,y) = x^{m+r}y^{n+s}$ $(r=0,1,\ldots,m-1;\ s=0,1,\ldots,n-1)$. В силу симметричности выражения (29) относительно i и k доказательство теоремы сводится к доказательству ее для x^{m+r} $(r=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$. Таким образом, остается доказать равенства

$$\frac{1}{m+r+1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \frac{m!\,(2m-i-1)!\,(m+r)!}{(2m)!\,(m-i-1)!\,(i+1)!\,(m+r-i)!} \tag{31}$$

$$(r=0,\ 1,\ldots,\ m-1).$$

Равенства (31) можно записать и в виде

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C^k_{m+k} C^{m-k}_{m+r+1} = (-1)^{m-1} \frac{(2m)!}{(m!)^2} \tag{32}$$

$$(r=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Для доказательства равенств (32) решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x_{m-1}\,C_{m+1}^{m}+x_{m-2}\,C_{m+1}^{m-1}+\ldots+x_0\,C_{m+1}^{1}=1\\ &x_{m-1}\,C_{m+2}^{m+1}+x_{m-2}\,C_{m+2}^{m}+\ldots+x_0\,C_{m+2}^{2}=1\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &x_{m-1}\,C_{2m}^{2m-1}+x_{m-2}\,C_{2m}^{2m-2}+\ldots+x_0\,C_{2m}^{m}=1. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

По правилу Крамера

$$x_{m-i}=\frac{D^{(i)}}{D} \qquad (i=1,2,\ldots,m),$$

где

$$D=\left|C_{m+i}^{j}\right|_{i,j=1}^{m}=C_{2m}^{m},$$

$$D^{(i)}=\begin{vmatrix} C_{m+1}^{1}\ldots C_{m+1}^{i-1} & 1 & C_{m+1}^{i+1}\ldots C_{m+1}^{m}\\ C_{m+2}^{1}\ldots C_{m+2}^{i-1} & 1 & C_{m+2}^{i+1}\ldots C_{m+2}^{m}\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ C_{2m}^{1}\ldots C_{2m}^{i-1} & 1 & C_{2m}^{i+1}\ldots C_{2m}^{m} \end{vmatrix}=(-1)^{i+1}C_{2m-i}^{m}$$

$$(i=1,2,\ldots,m).$$

Поэтому

$$x_{m-i}=(-1)^{i+1}\frac{C_{2m-i}^{m}}{C_{2m}^{m}} \qquad (i=1,2,\ldots,m). \qquad (34)$$

Если подставить значения (34) в систему (33) и умножить все полученные равенства на $(-1)^{m-1}C_{2m}^{m}$, то мы получим равенства (32), что и доказывает теорему.

Теорема 1 показывает, какая формула является наилучшей для класса функций $W_{02}^{(m,n)}(P)$. Вычислим теперь максимальную возможную ошибку

$$\min_{A_{ik}} R=\min_{A_{ik}}\sup_{f\in W_{02}^{(m,n)}(P)}|R(f)|$$

при вычислениях по наилучшей формуле для функций класса $W_{02}^{(m,n)}(P)$.

Для этого вычислим значение I_1 со значениями B_{ik} по (28). Из (25) мы имеем

$$I_1=\alpha+\beta+\gamma, \qquad (35)$$

где

$$\alpha=\int_0^1\int_0^1\frac{t^{2m}u^{2n}}{m^2n^2}\,dt\,du=\frac{1}{m^2(2m+1)n^2(2n+1)}, \qquad (36)$$

$$-\beta=\frac{2}{mn}\int_0^1\int_0^1 t^m u^n\sum_{i,k=0}^{m-1,\,n-1}B_{ik}t^iu^k\,dt\,du,$$

$$\gamma=\int_0^1\int_0^1\left(\sum_{i,k=0}^{m-1,\,n-1}B_{ik}t^iu^k\right)^2 dt\,du.$$

Применяя (28), имеем равенства

$$-\beta=(-1)^{m+n}\frac{2m!\,n!\,(m-1)!\,(n-1)!}{mn(2m)!\,(2n)!}\int\limits_0^1 t^m\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(m+i)!\,(-t)^i}{(m-i)!\,(i!)^2}\,dt\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^1 u^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+k)!\,(-u)^k}{(n-k)!\,(k!)^2}\,du, \tag{37}$$

$$\gamma=\left[\frac{m!\,(m-1)!\,n!\,(n-1)!}{(2m)!\,(2n)!}\right]^2\int\limits_0^1\left[\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(m+i)!\,(-t)^i}{(m-i)!\,(i!)^2}\right]^2 dt\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^1\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+k)!\,(-u)^k}{(n-k)!\,(k!)^2}\right]^2 du. \tag{38}$$

Для вычисления интегралов в (37) и (38) используем многочлены

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{(n-k)!\,(k!)^2}(-x)^k=\frac{1}{n!}\frac{d^n[x(1-x)]^n}{dx^n},$$

которые (см. [1]) образуют ортогональную систему на отрезке [0,1] по весу 1. Кроме того,

$$\frac{d^i[x(1-x)]^n}{dx^n}=0 \text{ при } x=0 \text{ или } 1 \text{ и } i\leqslant n-1. \tag{39}$$

Имеем

$$\int\limits_0^1 t^s\sum_{i=0}^{s-1}\frac{(s+i)!\,(-t)^i}{(s-i)!\,(i!)^2}\,dt=\int\limits_0^1 t^s\left[p_s(t)+(-1)^{s-1}\frac{(2s)!}{(s!)^2}t^s\right]dt.$$

Интегрирование по частям с использованием свойства (39) дает

$$\int\limits_0^1 t^s p_s(t)\,dt=(-1)^s K_s, \tag{40}$$

где

$$K_s=\int\limits_0^1[t(1-t)]^s dt=\frac{(s!)^2}{(2s+1)!}. \tag{41}$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 t^s\sum_{i=0}^{s-1}\frac{(s+i)!\,(-t)^i}{(s-i)!\,(i!)^2}\,dt=(-1)^s K_s+(-1)^{s-1}\frac{(2s)!}{(s!)^2(2s+1)}, \tag{42}$$

$$\int\limits_0^1\left[\sum_{i=0}^{s-1}\frac{(s+i)!\,(-t)^i}{(s-i)!\,(i!)^2}\right]^2 dt=\left[-K_s+\frac{(2s)!}{(s!)^2(2s+1)}\right]\frac{(2s)!}{(s!)^2}. \tag{43}$$

Равенства (42), (43), (37), (38), (36) и (35) дают

$$J_1=\frac{[(m-1)!]^2K_m}{(2m)!n^2(2n+1)}+\frac{[(n-1)!]^2K_n}{(2n)!m^2(2m+1)}-\frac{[(m-1)!(n-1)!]^2}{(2m)!(2n)!}K_mK_n.$$

Учитывая это, имеем по (24)

$$J=\frac{K_m}{(n!)^2(2m)!(2n+1)}+\frac{K_n}{(m!)^2(2n)!(2m+1)}-\frac{K_mK_n}{(2m)!(2n)!},$$

откуда по (21) и (22) получаем искомую максимально возможную ошибку при вычислениях по формуле (19) с коэффициентами A_{ik}, вычисленными по (29),

$$\min_{A_{ik}} R=P\left[\frac{K_m}{(n!)^2(2m)!(2n+1)}+\frac{K_n}{(m!)^2(2n)!(2m+1)}-\frac{K_mK_n}{(2m)!(2n)!}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где K_s определены в (41).

Выражаю благодарность Ю. Каазику и И. Петерсену за оказанное моей работе внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ланцош, Практические методы прикладного анализа, М., 1961.
2. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М., 1949.
3. С. М. Никольский, Квадратурные формулы, М., 1958.
4. И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, М., 1962.
5. Г. Сеге, Ортогональные многочлены, М., 1962.
6. М. Левин, Об оценке погрешности кубатурных формул, Изв. АН ЭССР, т. XI, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1962, № 2.
7. Ш. Е. Микеладзе, Численное интегрирование, УМН, т. III, № 6 (28), 1948.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21. VIII 1962

ÜHE KVADRATUURVALEMIGA SEOTUD EKSTREMAALÜLESANNETEST

M. Levin

Resümee

Valemi (1) puhul võetakse ekstremaalülesanne, mille lahend esitatakse valemiga (10). Valem (1) üldistatakse kahekordse integraali juhule. Saadud valemi (13) ja funktsioonide klassi $W_0^{(m,n)}(P)$ (vt. [6]) puhul võetakse samuti ekstremaalülesanne, mille lahendiks on valem (19), kusjuures kordajad A_{ik} on arvutatavad valemi (29) põhjal. Kõigi saadud valemite puhul antakse veahinnangud.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
21. VIII 1962

ON EXTREME PROBLEMS IN CONNECTION WITH ONE OF THE QUADRATURE FORMULAS

M. Levin

Summary

The extreme problem is solved for the formula (1). The solution is given by formula (10). Formula (1) is summarized for the case of double integrals. The extreme problem is also solved for obtaining formula (13) and for the class $W_0^{(m,n)}$ (P) (this class is determined in [6]), its solution is given by formula (19) with the coefficients which are calculated by (29).

For all the formulas an estimation of errors is presented.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics

Received
Aug. 21st, 1962