EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KÖIDE
FÜÜSIKA-, MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1963, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1963, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1963.1.04

О РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Л. АЙНОЛА,
кандидат физико-математических наук

Решение задач распространения упругих волн в пластинках при помощи уравнений трехмерной теории упругости связано с большими математическими трудностями, поэтому при их решении приходится использовать простые модели, полученные путем приведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям пластинки. Для антисимметричных задач простейшую модель пластинки представляет теория Кирхгофа, для симметричных задач — теория плоского напряженного состояния. В последнее время различными методами приведения получен ряд вариантов т. н. уточненных уравнений пластинок [1–8].

В настоящей статье дается некоторое обобщение этих уточненных теорий. В первом разделе работы, предполагая заданными изменения перемещений и напряжений по толщине пластинки, выводятся уравнения пластинки шестого порядка в общей форме. В следующих разделах рассматриваются теории, где это изменение выбрано соответственно частному решению трехмерной теории упругости. Этот случай может представлять интерес при исследовании переходных волновых процессов, вызванных нагрузкой определенной частоты. В конце статьи выводятся уравнения пластинки в предельном случае, если распределение перемещений аппроксимируется в виде, получаемом при распространении бесконечно длинных элементарных волн по первой форме движения. Для антисимметричных задач выведенные уравнения пластинки совпадают с уравнениями типа Тимошенко [2], если в них значение коэффициента κ^2 взять равным $^5/_6$. Для симметричных задач выведенные уравнения существенно отличаются от соответствующих уравнений Кейна-Миндлина [6].

1. Уравнения пластинки

Рассмотрим пластинку постоянной толщины $2h$, срединная поверхность которой совпадает с координатной плоскостью $x^1 x^2$. Предположим, что пластинка не нагружена на поверхностях $x^3 \doteq z = \pm h$.

Уравнения пластинки выводим из вариационного принципа динамики трехмерной теории упругости, которому даем такую форму, где, кроме перемещений u_i, независимыми варьируемыми функциями являлись бы и напряжения σ^{i3} и деформации ε_{33}:

$$\delta \Bigl\{ \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{V} \Bigl(\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\mu} \widehat{\sigma}^{\alpha 3} \widehat{\sigma}_{\alpha 3} - \widehat{\sigma}^{33} \widehat{\varepsilon}_{33} -$$

$$- \nabla_3 \widehat{\sigma}^{3i} u_i + \widehat{\sigma}^{\alpha 3} \nabla_\alpha u_3 - \frac{1}{2} \varrho \dot{u}_i \dot{u}^i \Bigr) dV\, dt + \qquad (1.1)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{S_{1,2}} \widehat{\sigma}^{i3} u_i \, dS \, dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{C} Q^i u_i \, dC \, dt \Big\} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3; \ \alpha, \beta = 1, 2)$$

Здесь u_i — варьируемые перемещения, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям; $\sigma^{\alpha\beta}$ — напряжения, выраженные через перемещения u_i, причем $\nabla_3 u_3$ заменено $\widehat{\varepsilon}_{33}$; $\widehat{\sigma}^{i3}$ — варьируемые напряжения, удовлетворяющие статическим граничным условиям на поверхностях $z = \pm h$ пластинки; $\widehat{\varepsilon}_{33}$ — варьируемые деформации; $S_{1,2}$ — поверхности $z = \pm h$ пластинки; C — контурная поверхность пластинки; Q^i — внешние силы, заданные на контурной поверхности C. Точка обозначает производную по времени t.

Аппроксимируем варьируемые величины следующим образом:

$$u_\alpha = \varphi_\alpha (x^\gamma, t) \cdot \psi_1(z), \ u_3 = w(x^\gamma, t) \cdot \psi_2(z),$$

$$\widehat{\sigma}^{\alpha 3} = \tau^\alpha (x^\gamma, t) \cdot \psi_3(z), \ \widehat{\sigma}^{33} = \tau^3 (x^\gamma, t) \cdot \psi_4(z), \tag{1.2}$$

$$\widehat{\varepsilon}_{33} = e(x^\gamma, t) \cdot \psi_5(z),$$

где ψ_s $(s = 1, 2, \ldots, 5)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$\psi_3(\pm h) = \psi_4(\pm h) = 0.$$

Введем обозначения

$$H^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \sigma^{\alpha\beta} \psi_1 \, dz \tag{1.3}$$

и

$$a_{st} = \int_{-h}^{h} \psi_s \psi_t \, dz, \quad a'_{st} = \int_{-h}^{h} \frac{d\psi_s}{dz} \psi_t \, dz. \tag{1.4}$$

Из вариационного принципа (1.1) по аппроксимации (1.2) вытекают уравнения равновесия пластинки

$$\nabla_\beta H^{\alpha\beta} + a'_{31} \tau^\alpha - \varrho \, a_{11} \ddot{\varphi}^\alpha = 0,$$

$$a_{23} \nabla_\alpha \tau^\alpha + a'_{42} \tau^3 - \varrho \, a_{22} \ddot{w} = 0 \tag{1.5}$$

и соотношения

$$a_{33} \tau^\alpha - \mu (a'_{13} \varphi^\alpha + a_{23} \nabla^\alpha w) = 0,$$

$$a_{45} \tau^3 - (\lambda + 2\mu) a_{55} e - \lambda \, a_{15} \nabla^\alpha \varphi_\alpha = 0, \tag{1.6}$$

$$a_{45} e - a'_{24} \, w = 0,$$

где

$$H^{\alpha\beta} = a_{11} [\mu (\nabla^\alpha \varphi^\beta + \nabla^\beta \varphi^\alpha) + \lambda \, g^{\alpha\beta} \nabla^\gamma \varphi_\gamma] + \lambda \, a_{15} \, g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}. \tag{1.7}$$

Граничные условия на контуре C пластинки получаются в следующем виде:

$$H^{\alpha\beta} n_\alpha - R^\beta = 0, \qquad a_{23}\tau^\alpha n_\alpha - P = 0 \tag{1.8}$$

и

$$\varphi_\alpha = \overline{\varphi}_\alpha, \qquad w = \overline{w},$$

где

$$R^\alpha = \int_{-h}^{h} Q^\alpha \psi_1 \, dz, \qquad P = \int_{-h}^{h} Q^3 \psi_2 \, dz. \tag{1.9}$$

При помощи соотношений (1.6) и (1.7) уравнения равновесия (1.5) могут быть приведены к виду

$$(\lambda + \mu) \nabla^\alpha \nabla^\gamma \varphi_\gamma + \mu \nabla^2 \varphi^\alpha + \varkappa_1 \varphi^\alpha - \varrho \ddot{\varphi}^\alpha + \varkappa_2 \nabla^\alpha w = 0,$$

$$\nabla^\gamma \varphi_\gamma + \varkappa_3 \nabla^2 w + \varkappa_4 w - \varrho \varkappa_5 \ddot{w} = 0. \tag{1.10}$$

Здесь

$$\varkappa_1 = -\mu \frac{a_{13}'^2}{a_{11} a_{33}}, \quad \varkappa_2 = \lambda \frac{a_{15} a_{24}'}{a_{11} a_{45}} + \mu \frac{a_{31}' a_{23}}{a_{11} a_{33}},$$

$$\varkappa_3 = \mu \frac{a_{23}^2}{a_{11} a_{33} \varkappa_6}, \quad \varkappa_4 = -(\lambda + 2\mu) \frac{a_{24}' a_{42}' a_{55}}{a_{11} a_{45}^2 \varkappa_6},$$

$$\varkappa_5 = \frac{a_{22}}{a_{11} \varkappa_6}, \quad \varkappa_6 = -\lambda \frac{a_{15}}{a_{11}} - \mu \frac{a_{31}' a_{23}}{a_{11} a_{33}}. \tag{1.11}$$

Исключая из уравнений (1.10) функции φ_α, получаем уравнение

$$\{[(\lambda + 2\mu) \nabla^2 + \varkappa_1 - \varrho \, \partial_t^2][\varkappa_3 \nabla^2 + \varkappa_4 - \varrho \varkappa_5 \partial_t^2] - \varkappa_2 \nabla^2\} w = 0. \tag{1.12}$$

Функции φ_α могут быть представлены в виде суммы

$$\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha 1} + \varphi_{\alpha 2}, \tag{1.13}$$

где $\varphi_{\alpha 1}$ — частное решение системы (1.10) и $\varphi_{\alpha 2}$ — решение соответствующей однородной системы. Если

$$\varphi_{\alpha 2} = c_{\alpha}^{\cdot \beta} \nabla_\beta \Phi \tag{1.14}$$

($c_{\alpha\beta}$ — дискриминантный тензор), то эту однородную систему можно привести к уравнению

$$\mu \nabla^2 \Phi + \varkappa_1 \Phi - \varrho \ddot{\Phi} = 0. \tag{1.15}$$

2. Уравнения для антисимметричных задач

Если выбрать аппроксимируемые функции ψ_1, ψ_4, ψ_5 нечетными, а функции ψ_2, ψ_3 — четными, то (1.12), (1.15) будут уравнения пластинки для антисимметричных задач.

Рассмотрим подробнее один частный случай. Именно, предположим, что функции ψ_s выбраны в таком виде, как они получаются по точной теории при распространении элементарных волн определенных частот.

Если p — волновое число, ω — круговая частота волны и если обозначить

$$\alpha = \sqrt{p^2 - \frac{\varrho\omega^2}{\lambda + 2\mu}}, \quad \beta = \sqrt{p^2 - \frac{\varrho\omega^2}{\mu}}, \tag{2.1}$$

то частное решение трехмерной теории упругости можем представить в виде $\psi_s b_s e^{i(px+\omega t)}$, где $b_1 = b_3 = 1$, $b_2 = b_4 = b_5 = i$ и

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= (2\operatorname{sh}\beta h)^{-1}[2p^2\operatorname{sh}\beta h \operatorname{sh}\alpha z - (p^2+\beta^2)\operatorname{sh}\alpha h \operatorname{sh}\beta z],\\
\psi_2 &= -p(2\beta\operatorname{sh}\beta h)^{-1}[2\alpha\beta\operatorname{sh}\beta h \operatorname{ch}\alpha z - (p^2+\beta^2)\operatorname{sh}\alpha h \operatorname{ch}\beta z],\\
\psi_3 &= (2\beta\operatorname{sh}\beta h)^{-1}[4p^2\alpha\beta\operatorname{sh}\beta h \operatorname{ch}\alpha z - (p^2+\beta^2)^2\operatorname{sh}\alpha h \operatorname{ch}\beta z],\\
\psi_4 &= -\mu p(p^2+\beta^2)(\operatorname{sh}\beta h)^{-1}(\operatorname{sh}\beta h \operatorname{sh}\alpha z - \operatorname{sh}\alpha h \operatorname{sh}\beta z),\\
\psi_5 &= -p(2\operatorname{sh}\beta h)^{-1}[2\alpha^2\operatorname{sh}\beta h \operatorname{sh}\alpha z - (p^2+\beta^2)\operatorname{sh}\alpha h \operatorname{sh}\beta z],
\end{aligned} \tag{2.2}$$

причем предполагается, что величины p, α и β удовлетворяют уравнению Лэмба

$$\frac{\operatorname{th}\alpha h}{\operatorname{th}\beta h} = \frac{4p^2\alpha\beta}{(p^2+\beta^2)^2}. \tag{2.3}$$

Имея заданную частоту ω при конкретной форме движения, коэффициенты уравнений пластинки (1.12) и (1.15) легко определяются по соотношениям (2.2), (1.4) и (1.11).

Особый интерес представляет предельный случай, где коэффициенты в уравнениях пластинки выбраны соответственно распространению бесконечно длинных волн по первой форме движения. Из уравнения Лэмба (2.3) для этого случая вытекает, что

$$\begin{aligned}
\alpha &= p\left[1 - \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)^2}\, p^2h^2\right],\\
\beta &= p\left[1 - \frac{2}{3}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\, p^2h^2\right].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Сохраняя в функциях ψ_s только члены с наименьшими степенями по p и учитывая соотношения (2.4), получаем

$$\psi_s = c_s\vartheta_s, \tag{2.5}$$

где c_s — постоянные числа и $\vartheta_1 = p^5z$, $\vartheta_2 = p^4$, $\vartheta_3 = p^7(z^2-h^2)$, $\vartheta_4 = p^8z(z^2-h^2)$, $\vartheta_5 = p^6z$.

Соответствующие коэффициенты a_{st} и a'_{st} будут

$$a_{st} = c_sc_tb_{st}, \quad a'_{st} = c_sc_tb'_{st}, \tag{2.6}$$

причем

$$b_{11} = \frac{2}{3}p^{10}h^3, \quad b_{15} = \frac{2}{3}p^{11}h^3, \quad b_{22} = 2p^{10}h,$$

$$b_{23} = -\frac{4}{3}p^{11}h^3, \quad b_{33} = \frac{16}{15}p^{14}h^5, \quad b_{45} = b'_{24} = -b'_{42} = -\frac{4}{15}p^{14}h^5,$$

$$b_{55} = \frac{2}{3}p^{12}h^3, \quad b'_{31} = -b'_{13} = -\frac{4}{3}p^{12}h^3,$$

$$b'_{24} = -b'_{42} = -\frac{4}{15}\frac{\lambda}{\mu}p^{14}h^5.$$

Подставляя найденные коэффициенты a_{st} и a'_{st} в уравнения (1.5) и в соотношения (1.6), видим, что в уравнениях (1.5) член $a'_{42}\tau^3$ и в соотношениях (1.6) член $a_{45}\tau^3$ являются малыми более высокого порядка, поэтому ими нужно пренебречь*. Из соотношений (2.6) и (1.6) тогда следует, что

$$e = p^{-1} \nabla^\alpha \varphi_\alpha . \tag{2.7}$$

Если это ввести в выражение моментов (1.7) и учесть соотношение (2.6), получаем, что

$$H^{\alpha\beta} = \frac{Ea_{11}}{2(1-\nu^2)} [\nabla^\alpha \varphi^\beta + \nabla^\beta \varphi^\alpha + \nu c^{\alpha\gamma} c^{\beta\delta} (\nabla_\gamma \varphi_\delta + \nabla_\delta \varphi_\gamma)] . \tag{2.8}$$

Далее, из уравнений (1.5) при помощи соотношений (2.8) и (1.6) вытекают уравнения пластинки

$$\left[\left(\frac{Eh^3}{1-\nu^2} \nabla^2 - \rho h^3 \partial_t^2\right)\left(\nabla^2 - \frac{6}{5}\frac{\varrho}{\mu}\partial_t^2\right) + 3\rho h\, \partial_t^2\right] w = 0,$$

$$\left(\mu \nabla^2 - \frac{5}{2}\mu h^{-2} - \rho\, \partial_t^2\right) \Phi = 0. \tag{2.9}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями типа Тимошенко [1, 2, 4], если в последних значением коэффициента k^2 взять $\frac{5}{6}$. Это значение коэффициента обусловлено параболическим распределением тангенциальных напряжений $\sigma^{\alpha 3}$.

3. Уравнения для симметричных задач

Уравнения пластинки для симметричных задач получаются, если аппроксимировать ψ_1, ψ_4, ψ_5 четными и ψ_2, ψ_3 нечетными функциями.

В симметричном случае аппроксимация по элементарной волне точной теории будет

$$\psi_1 = (2 \operatorname{ch} \beta h)^{-1} [2p^2 \operatorname{ch} \beta h \operatorname{ch} \alpha z - (p^2 + \beta^2) \operatorname{ch} \alpha h \operatorname{ch} \beta z],$$

$$\psi_2 = -p (2\beta \operatorname{ch} \beta h)^{-1} [2\alpha\beta \operatorname{ch} \beta h \operatorname{sh} \alpha z - (p^2 + \beta^2) \operatorname{ch} \alpha h \operatorname{sh} \beta z],$$

$$\psi_3 = \mu (2\beta \operatorname{ch} \beta h)^{-1} [4p^2\alpha\beta \operatorname{ch} \beta h \operatorname{sh} \alpha z - (p^2 + \beta^2)^2 \operatorname{ch} \alpha h \operatorname{sh} \beta z],$$

$$\psi_4 = -\mu p (p^2 + \beta^2) (\operatorname{ch} \beta h)^{-1} (\operatorname{ch} \beta h \operatorname{ch} \alpha z - \operatorname{ch} \alpha h \operatorname{ch} \beta z),$$

$$\psi_5 = -p (2 \operatorname{ch} \beta h)^{-1} [2\alpha^2 \operatorname{ch} \beta h \operatorname{ch} \alpha z - (p^2 + \beta^2) \operatorname{ch} \alpha h \operatorname{ch} \beta z], \tag{3.1}$$

где величины p, α, β связаны уравнением Лэмба

$$\frac{\operatorname{th} \alpha h}{\operatorname{th} \beta h} = \frac{(p^2 + \beta^2)^2}{4p^2 \alpha\beta} . \tag{3.2}$$

* Этому обстоятельству соответствует гипотеза $\sigma^{33} = 0$ при обычном выводе теории типа Тимошенко.

В предельном случае, при бесконечно длинных волнах и при первой форме движения из (3.2) вытекает, что

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p, \quad \beta = \sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}}\, ip. \tag{3.3}$$

Функции ψ_s в этом случае таковы —

$$\psi_s = d_s \vartheta_s, \tag{3.4}$$

где d_s — постоянные числа и $\vartheta_1 = p^2$, $\vartheta_2 = p^3 z$, $\vartheta_3 = p^6 z (z^2 - h^2)$, $\vartheta_4 = p^5 (z^2 - h^2)$, $\vartheta_5 = p^3$.

Соответствующие коэффициенты a_{st} и a'_{st} будут

$$a_{st} = d_s d_t b_{st}, \quad a'_{st} = d_s d_t b'_{st}, \tag{3.5}$$

где

$$b_{11} = 2p^4 h, \quad b_{15} = 2p^5 h, \quad b_{22} = \frac{4}{3} p^6 h^3,$$

$$b_{23} = -\frac{4}{15} p^9 h^5, \quad b_{33} = \frac{16}{105} p^{12} h^7,$$

$$b_{45} = b'_{24} = -b'_{42} = -\frac{4}{3} p^8 h^3, \quad b_{55} = 2p^6 h,$$

$$b'_{31} = -b'_{13} = -\frac{4}{15} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p^{10} h^6.$$

Вводя эти коэффициенты в уравнения равновесия (1.5) и в соотношения (1.6), видим, что членами $a'_{31}\tau^\alpha$ и $\mu a'_{13}\varphi^\alpha$ как высшего порядка малыми нужно пренебречь.

Если вычислять коэффициенты k_s по формулам (3.5) и (1.11) и подставлять в уравнения (1.12) и (1.15), получаем уравнения пластинки

$$\Big\{\Big[(\lambda + 2\mu)\nabla^2 - \varrho\,\partial_t^2\Big]\Big[\frac{7}{10}\mu\nabla^2 - \varrho\,\partial_t^2\Big] - 12\mu(\lambda + \mu) h^{-2}\nabla^2 +$$

$$+ 3(\lambda + 2\mu) h^{-2} \varrho\,\partial_t^2\Big\} w = 0, \tag{3.6}$$

$$(\mu\nabla^2 - \varrho\,\partial_t^2)\,\Phi = 0.$$

Уравнения (3.6) отличаются от соответствующих уравнений пластинки шестого порядка, выведенных Кэйном-Миндлином [6], тем, что имеют множитель $\frac{7}{10}$ перед оператором $\mu\nabla^2$. Это объясняется обстоятельством, что уравнения Кэйна-Миндлина неправильно учитывают распределение напряжений σ^{i3} по толщине пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Уфлянд, Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин, ПММ, т. 12, вып. 3, 1948.
2. R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates, J. Appl. Mech., **18**, 1, 1951.
3. V. T. Buchwald, Low frequency flexural vibrations in elastic plates, Quart. J. Mech. Appl. Math., vol. 12, Part 4, 1959.
4. E. Volterra, Influenza del taglio nella dinamica e nella statica delle piastre sottili, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis. mat. e natur., vol. 28, Fasc. 6, vol. 29, Fasc. 1/2, 1960.
5. И. Т. Селезов, Исследование поперечных колебаний пластинки, Прикладн. мех., т. 6, вып. 3, 1960.
6. T. R. Kane, R. D. Mindlin, High-frequency extensional vibrations of plates, J. Appl. Mech., **23**, 2, 1956.
7. E. Volterra, E. C. Zachmanoglou, On longitudinal waves in an elastic plate, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., EM 1, 1896, Jan. 1959.
8. R. D. Mindlin, M. A. Medick, Extensional vibrations of elastic plates, J. Appl. Mech., **26**, 4, 1959.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12 VII 1962

ELASTSETE PLAATIDE ARVUTUSMUDELITEST DÜNAAMIKAÜLESANNETE LAHENDAMISEKS

L. Ainola,
füüsika-matemaatikateaduste kandidaat

Resümee

Antakse plaatide nn. täpsustatud teooria teatav üldistus. Variatsiooniprintsiipi (1.1) ja aproksimatsiooni (1.2) kasutades tuletatakse kuuendat järku plaadivõrrandid üldisel kujul (1.12) ja (1.15). Näitena vaadeldakse juhtu, kus ümberpaigutused ja pinged on aproksimeeritud elastsusteooria elementaarlahendi kujul (2.2) (antisümmeetriliste ülesannete jaoks) ja (3.1) (sümmeetriliste ülesannete jaoks). Erijuhul, kasutades elementaarlahendit, mis vastab lõpmatult pikkade lainete levikule esimese moodi järgi, saadakse plaadivõrrandid (2.9) ja (3.6), mis tuntud võrranditest erinevad koefitsientide väärtuste poolest.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
12. VII 1962

ON THEORIES OF ELASTIC PLATES FOR DYNAMIC PROBLEMS

L. Ainola

Summary

A generalization of plate theories of the sixth order is developed. From the variational principle (1.1), by using approximation (1.2), equations of plates in general form (1.12) and (1.15) are obtained. Further the case of approximation in the form of a particular solution of the linear theory of elasticity (2.2) and (3.1) is considered.

In case the displacements and stresses are approximated by particular solution corresponding to propagation of the elementary waves of infinite wavelength by the first mode of propagation, equations (2.9) and (3.6) are obtained. These equations differ from the known equations of plates by the values of coefficients.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics

Received
July 12th, 1962