EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KÕIDE
FÜÜSIKA-, MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1963, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1963, № 1

# ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

С. УЛЬМ,
кандидат физико-математических наук

1. В настоящей статье исследуется на основе принципа мажорант [1, 2] сходимость итеративных методов

$$x_{n+1}=x_n+[E-U_n(\tilde{x}_{n+1}-x_{n-1})](\tilde{x}_{n+1}-x_n), \tag{1}$$

$$x_{n+1}=x_n+[E+U_n(\tilde{x}_{n+1}-x_{n-1})]^{-1}(\tilde{x}_{n+1}-x_n), \tag{2}$$

$$x_{n+1}=x_n+[E+U_n(\tilde{x}_{n+1}-x_n)]^{-1}[E-U_n(x_n-x_{n-1})](\tilde{x}_{n+1}-x_n) \tag{3}$$

$$(n=0,\ 1,\ \ldots)$$

для приближенного решения уравнения

$$P(x)=0, \tag{4}$$

где $P$ — нелинейный оператор, переводящий банахово пространство $X$ в нормированное пространство $Y$. Введены обозначения:
$x_0$, $x_{-1}$, $x_{-2}$ — три различные начальные приближения к решению $x^*$ уравнения (4);
$E$ — единичный оператор пространства $X$;

$$U_n=\Lambda_n P(x_n,\ x_{n-1},\ x_{n-2});$$

$$\Lambda_n=[P(x_n,\ x_{n-1})]^{-1};$$

$P(x_n, x_{n-1})$, $P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ — аналоги разделенных разностей соответственно первого и второго порядка оператора $P$ (см. [5])*;

$$\tilde{x}_{n+1}=x_n-\Lambda_n P(x_n).$$

Естественно называть метод (1) интерполяционным аналогом метода касательных парабол [3], методы (2) и (3) — интерполяционными аналогами метода касательных гипербол [4]. Их выгодно применять на

* Вообще оператор $P(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)$ назовем аналогом разделенных разностей $n$-го порядка, если
1° $P(x_n, \ldots, x_0)$ — $n$-линейная операция, и
2° $P(x_n, \ldots, x_0)(x_n-x_0)=P(x_n, \ldots, x_1)-P(x_{n-1}, \ldots, x_0)$.

электронных вычислительных машинах, так как требуется только вычисление значений оператора $P(x)$.

В дальнейшем мы используем аналог интерполяционной формулы Ньютона [5]

$$P(x) = P(x_n) + P(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + \\ + P(x, x_n, x_{n-1})(x - x_n)(x - x_{n-1}). \tag{5}$$

Наряду с уравнением (4) рассмотрим вещественное мажорантное уравнение

$$Q(t) = 0, \tag{6}$$

применяя для его решения методы (1), (2) и (3). При этом обозначим: $t_0 = 0$. $t_{-1}$, $t_{-2}$ — начальные приближения к решению $t^*$ уравнения (6);

$$V_n = \Delta_n Q(t_n, t_{n-1}, t_{n-2});$$

$$\Delta_n = [Q(t_n, t_{n-1})]^{-1};$$

$Q(t_n, t_{n-1})$, $Q(t_n, t_{n-1}, t_{n-2})$ — разделенные разности функции $Q(t)$;

$$\tilde{t}_{n+1} = t_n - \Delta_n Q(t_n).$$

В дальнейшем предположим существование в интересующих нас областях разделенных разностей первого и второго порядка оператора $P$ и функции $Q$. Предположим, что $P$ (соответственно $Q$) является непрерывным в окрестности $x^*$ (соответственно $t^*$).

2. Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1° $\| x_{-1} - x_{-2} \| \leqslant t_{-1} - t_{-2}$;

2° $\| x_0 - x_{-1} \| \leqslant t_0 - t_{-1}$;

3° *существуют* $\Lambda_0$ и $\Delta_0$, *причем* $\| \Lambda_0 P(x_0) \| \leqslant -\Delta_0 Q(t_0)$;

4° $\| U_0 \| \leqslant -V_0$;

5° $\| \Lambda_0 [P(x', x'', x''') - P(x'', x''', x^{IV})] \| \leqslant$
$\leqslant -\Delta_0 [Q(t', t'', t''') - Q(t'', t''', t^{IV})]$, (7)
если $x', x'', x''', x^{IV} \in S[x_{-2}; t^* - t_{-2}]$
и $\| x' - x'' \| \leqslant t' - t''$; $\| x'' - x''' \| \leqslant t'' - t'''$; $\| x''' - x^{IV} \| \leqslant t''' - t^{IV}$;

6° *уравнение* (6) *имеет положительное решение.*

*Тогда уравнение* (4) *имеет в сфере* (7) *решение* $x^*$, *к которому сходится последовательность* (1) (*соответственно* (2), (3)) *со скоростью*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant t^* - t_n \qquad (n = -2, -1, 0, \ldots),$$

*где* $t^*$ — *наименьший положительный корень уравнения* (6), $t_n$ — *n-ое приближение по методу* (1) (*соответственно* (2), (3)) *к решению* $t^*$ *уравнения* (6).

Доказательство. Прежде всего отметим, что в условиях теоремы нетрудно установить монотонную сходимость последовательностей (1), (2) и (3) для уравнения (6) к решению $t^*$, причем $\Delta_n Q(t_{n+1}, t_n) < 1$; $1 + V_n(\tilde{t}_{n+1} - t_{n-1}) > 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Доказательство приводим, используя принцип полной индукции. Покажем, что условия 3°—5° при переходе от индекса $n-1$ к индексу $n$ не нарушаются. Отметим, что из предположения выполняемости условий 3°—5° при индексе $n-1$ следует на основе формул (1), (2) и (3) оценка

$$\| x_n - x_{n-1} \| \leqslant t_n - t_{n-1}. \tag{8}$$

Так как

$$E - \Lambda_{n-1} P(x_n, x_{n-1}) = \Lambda_{n-1} P(x_{n-1}, x_{n-2}) - \Lambda_{n-1} P(x_n, x_{n-1}) =$$
$$= - \Lambda_{n-1}[P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) - P(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})](x_n - x_{n-2}) -$$
$$- U_{n-1}(x_n - x_{n-2}), \tag{9}$$

то, сопоставляя это выражение с соответственным выражением для $1 - \Delta_{n-1} Q(t_n, t_{n-1})$, убедимся, что

$$\| E - \Lambda_{n-1} P(x_n, x_{n-1}) \| \leqslant 1 - \Delta_{n-1} Q(t_n, t_{n-1}), \tag{10}$$

откуда на основании теоремы Банаха получим

$$\| \Lambda_n P(x_{n-1}, x_{n-2}) \| = \| \{E - [E - \Lambda_{n-1} P(x_n, x_{n-1})]\}^{-1} \| \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_n Q(t_{n-1}, t_{n-2}), \tag{11}$$

т. е. существует $\Delta_n$.

Исходя из формулы (5), получим для метода (1)

$$\Lambda_{n-1} P(x_n) = - U_{n-1} U_{n-1} (\tilde{x}_n - x_{n-2})(\tilde{x}_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2} + \tilde{x}_n - x_{n-1}) + R_n, \tag{12$_1$}$$

где

$$R_n = \Lambda_{n-1}[P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) - P(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})](x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}).$$

Теперь легко убедиться, что

$$\| \Lambda_{n-1} P(x_n) \| \leqslant - \Delta_{n-1} Q(t_n). \tag{13}$$

Для методов (2) и (3) оценка (13) устанавливается соответственно из разложений

$$\Lambda_{n-1} P(x_n) = - U_{n-1} U_{n-1} (\tilde{x}_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})^2 + R_n \tag{12$_2$}$$

и

$$\Lambda_{n-1} P(x_n) = - U_{n-1}[E + U_{n-1}(\tilde{x}_n - x_{n-1})]^{-1} \times$$
$$\times U_{n-1}(\tilde{x}_n - x_{n-1})(\tilde{x}_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-2}) + R_n \tag{12$_3$}$$

и из оценки

$$\| [E + U_{n-1}(\tilde{x}_n - x_{n-1})]^{-1} \| \leqslant [1 + V_{n-1}(\tilde{t}_n - t_{n-1})]^{-1}. \tag{14}$$

Из (11) и (13) следует

$$\| \Lambda_n P(x_n) \| \leqslant - \Delta_n Q(t_n), \tag{15}$$

т. е. условие 3° выполнено при индексе $n$.

Используя оценку (11), легко проверить и выполняемость условий 4° и 5° при индексе $n$.

По индукции получим оценки

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant t_{n+p} - t_n, \tag{16}$$

откуда при помощи предельного перехода ($p \to \infty$) заключаем существование $x^*$ и оценки

$$\| x^* - x_n \| \leqslant t^* - t_n. \tag{17}$$

Переходя к пределу ($n \to \infty$) в неравенствах

$$\| \Lambda_0 P(x_n) \| \leqslant \| \Lambda_0 P(x_n, x_{n-1}) \| \, \| \Lambda_n P(x_n) \|, \tag{18}$$

убеждаемся, что $x^*$ является решением уравнения (4).

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть

$$\| x_{-1} - x_{-2} \| \leqslant \delta;$$
$$\| x_0 - x_{-1} \| \leqslant \gamma;$$
$$\| \Lambda_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0;$$
$$\| U_0 \| \leqslant H_0;$$

$$\| \Lambda_0 [P(x', x'', x''') - P(x'', x''', x^{IV})] \| \leqslant \varphi(\| x' - x'' \|, \\ \| x'' - x''' \|, \| x''' - x^{IV} \|),$$

где $\delta$, $\gamma$, $\eta_0$, $H_0$ — положительные числа и $\varphi$ $(u, v, w)$ является непрерывной возрастающей функцией своих аргументов; $\varphi(0, 0, 0) = 0$. Выбрав $t_0 = 0$, $\Delta_0 = -1$, можем на основе интерполяционной формулы Ньютона в качестве мажорирующей функции взять

$$\begin{aligned} Q(t) = Q(t_0) + Q(t_0, t_{-1})(t - t_0) + Q(t_0, t_{-1}, t_{-2})(t - t_0)(t - t_{-1}) + \\ + [Q(t, t_0, t_{-1}) - Q(t_0, t_{-1}, t_{-2})](t - t_0)(t - t_{-1}) = \\ = \eta_0 - t + [H_0 + \varphi(t, \gamma, \delta)] t (t + \gamma). \end{aligned} \tag{19}$$

Если

$$\begin{aligned} \varphi(\| x' - x'' \|, \| x'' - x''' \|, \| x''' - x^{IV} \|) = \\ = K_1 \| x' - x'' \| + K_2 \| x'' - x''' \| + K_3 \| x''' - x^{IV} \|, \end{aligned} \tag{20}$$

т. е. билинейный оператор $\Lambda_0 P(x', x'', x''')$ удовлетворяет условию Липшица, получим

$$\begin{aligned} Q(t) = K_1 t^3 + [(K_1 + K_2)\gamma + K_3 \delta + H_0] t - \\ - (1 - K_2 \gamma^2 - K_3 \gamma \delta - H_0 \gamma) t + \eta_0. \end{aligned} \tag{21}$$

Если выполнены условия существования положительного корня уравнения (21), т. е.

$$\left. \begin{aligned} N > 0 \\ 27 K_1^2 \eta_0 + 2M^3 + 9 K_1 M N \leqslant 2 (M^2 + 3 K_1 N)^{3/2} \end{aligned} \right\}, \tag{22}$$

где $N = 1 - K_2 \gamma^2 - K_3 \gamma \delta - H_0 \gamma$; $M = K_1 \gamma + K_2 \gamma + K_3 \delta + H_0$,

то последовательности (2) и (3) сходятся к решению $x^*$ уравнения (4).

3. Рассмотрим интерполяционный аналог метода Ньютона [5], т. е. метод хорд

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n P(x_n). \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{23}$$

Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1° $\| x_0 - x_{-1} \| \leqslant t_0 - t_{-1}$;

2° *существуют* $\Lambda_0$ и $\Delta_0$, *причем* $\| \Lambda_0 P(x_0) \| \leqslant -\Delta_0 Q(t_0)$;

3° $\| \Lambda_0 [P(x', x'') - P(x'', x''')] \| \leqslant -\Delta_0 [Q(t', t'') - Q(t'', t''')]$,

если $x', x'', x''' \in S[x_{-1};\ t^* - t_{-1}]$ (24)

и $\| x' - x'' \| \leqslant t' - t''$; $\| x'' - x''' \| \leqslant t'' - t'''$;

4° *уравнение* (6) *имеет положительное решение.*

*Тогда уравнение* (4) *имеет в сфере* (24) *решение* $x^*$, *к которому сходится последовательность* (23) *со скоростью*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant t^* - t_n \qquad (n = -1, 0, \ldots),$$

*где* $t^*$ — *наименьший положительный корень уравнения* (6), $t_n$ — *n-ое приближение по методу* (23) *к решению* $t^*$ *уравнения* (6).

Следствие 2. Пусть

$$\| x_0 - x_{-1} \| \leqslant \gamma;$$

$$\| \Lambda_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0;$$

$$\| \Lambda_0 [P(x', x'') - P(x'', x''')] \| \leqslant \psi(\| x' - x'' \|, \| x'' - x''' \|),$$

где $\psi(u, v)$ — непрерывная возрастающая функция своих аргументов, $\psi(0, 0) = 0$. Тогда, если $t_0 = 0$, $\Delta_0 = -1$, получим

$$\begin{aligned} Q(t) = Q(t_0) + [Q(t, t_0) - Q(t_0, t_{-1})](t - t_0) + \\ + Q(t_0, t_{-1})(t - t_0) = \eta_0 + [\psi(t, \gamma) - 1] t. \end{aligned} \tag{25}$$

Если $\psi(\| x' - x'' \|, \| x'' - x''' \|) = K_1 \| x' - x'' \| + K_2 \| x'' - x''' \|$, т. е. линейный оператор $\Lambda_0 P(x', x'')$ удовлетворяет условию Липшица, получим

$$Q(t) = K_1 t^2 - (1 - K_2 \gamma) t + \eta_0 \tag{26}$$

и уравнение $Q(t) = 0$ имеет положительное решение, если

$$2 \sqrt{K_1 \eta_0} + K_2 \gamma \leqslant 1. \tag{27}$$

Замечание 1. Теорема 2 остается справедливой, если условия 1° и 3° заменить соответственно условиями

1′° $\| \Lambda_0 P(x_{-1}) \| \leqslant -\Delta_0 Q(t_{-1})$;

3′° $\| \Lambda_0 P(x', x'', x''') \| \leqslant -\Delta_0 Q(t', t'', t''')$, если

$$x', x'', x''' \in S\,[x_0;\ \max(t^* - t_0;\ \| x_0 - x_{-1} \|)], \tag{24'}$$

причем $\| x' - x'' \| \leqslant t' - t''$, $\| x' - x''' \| \leqslant t' - t'''$.

Сфера (24) заменяется сферой (24′).

Если $\| \Lambda_0 P(x_{-1}) \| \leqslant \eta_{-1}$; $\| \Lambda_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$;

$\eta_{-1} \geqslant \eta_0$; $\| \Lambda_0 P(x', x'', x''') \| \leqslant K$, то

$$Q(t) = Kt^2 - [1 + K(\eta_{-1} - \eta_0)]\,t + \eta_0 \tag{28}$$

и условие

$$\sqrt{K}(\sqrt{\eta_0} + \sqrt{\eta_{-1}}) \leqslant 1 \tag{29}$$

обеспечить сходимость последовательности (23). Условие (29) шире, чем соответствующее условие в теореме А. С. Сергеева [5]. Если $h_0 = K(\eta_{-1} + \eta_0) \leqslant \frac{1}{4}$, то нетрудно получить, исходя из вида мажорантного уравнения (28), оценку погрешности, данную А. С. Сергеевым [5].

З а м е ч а н и е 2. В условиях теоремы 2 сходится и более общий метод

$$x_{n+1} = x_n - [P(x_n', x_n'')]^{-1} P(x_n), \tag{30}$$

если при каждом шаге $x_n'$ и $x_n''$ выбраны так, чтобы

$$\begin{gathered} \| x_n - x_n' \| \leqslant t_n - t_n', \\ \| x_n' - x_n'' \| \leqslant t_n' - t_n'', \\ \| x_n'' - x_{n-1}' \| \leqslant t_n'' - t_{n-1}', \\ (n = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{31}$$

В качестве мажорирующего метода для решения уравнения $Q(t) = 0$ применяется метод

$$t_{n+1} = t_n - [Q(t_n', t_n'')]^{-1} Q(t_n). \tag{32}$$

В формулировке теоремы (2) нужно заменить $\Lambda_0$ и $\Delta_0$ соответственно $[P(x_0', x_0'')]^{-1}$ и $[Q(t_0', t_0'')]^{-1}$, сферу (24) сферой $S[x_0''; t^* - t_0'']$ и условие 1° условием

$$1^{\circ\prime\prime}\ \| x_0' - x'' \| \leqslant t_0' - t_0'';\ \| x_0 - x_0' \| \leqslant t_0 - t_0'.$$

Условия (31) выполнены, если, например, взять (ср. [6])

$$x_n' = \frac{t_n - t_n'}{t_n - t_{n-1}'}\, x_{n-1}' + \frac{t_n' - t_{n-1}'}{t_n - t_{n-1}'}\, x_n, \tag{33}$$

$$x_n'' = \frac{t_n - t_n''}{t_n - t_{n-1}'}\, x_{n-1}' + \frac{t_n'' - t_{n-1}'}{t_n - t_{n-1}'}\, x_n. \tag{34}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. К а н т о р о в и ч, Принцип мажорант и метод Ньютона, ДАН, **76**, 1, 1951, 17—20.
2. Л. В. К а н т о р о в и ч, Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона, Вестник ЛГУ, **2**, 7, 1957, 68—103.

3. М. А. Мертвецова, Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений, ДАН, 88, 4, 1953, 611—614.
4. В. Е. Мираков, О принципе мажорант для метода Чебышева, УМН, **11**, 3, 1956, 171—174.
5. А. С. Сергеев, О методе хорд, Сибирский матем. журнал, **2**, 2, 1961, 282—289.
6. J. Schröder, Über das Newtonsche Verfahren, Arch. Ration. Mech. and Analysis, **1**, 2, 1957, 154—180.

*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
6. VII 1962

## INTERPOLATSIOONIMEETODID MITTELINEAARSETE VÕRRANDITE LAHENDAMISEKS BANACHI RUUMIS

**S. Ulm,**
**füüsika-matemaatikateaduste kandidaat**

*Resümee*

Vaadeldakse mittelineaarse operaatorvõrrandi $P(x)=0$ lahendamiseks sobivaid iteratsioonimeetodeid (1), (2) ja (3), mis on puutuvate paraboolide [4] ja puutuvate hüperboolide [3] meetodite interpolatsioonanaloogid. Majorantide printsiipi rakendades tõestatakse vaadeldavate meetodite koonduvus. Üldistatakse ja täpsustatakse ka kõõlude meetodi [5] koonduvusteoreemi.

Meetodid (1), (2) ja (3) on praktiliseks rakendamiseks sobivamad kui vastavad diferentsiaalmeetodid, kuna nende puhul ei nõuta operaatori $P$ tuletiste arvutamist.

*Eesti NSV Teaduste Akadeemia*
*Küberneetika Instituut*

Saabus toimetusse
6. VII 1962

## INTERPOLATE METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS IN BANACH SPACE

**S. Ulm**

*Summary*

In this article we consider the solution of nonlinear operator equations with the aid of iterative methods (1), (2), (3). These methods are interpolate analogues of methods of tangent parabolas [4] and hyperbolas [3]. The principle of majorant is applied to prove the convergence of considered methods. The convergence theorem of the method of chords [5] is generalized and made more precise.

Methods (1), (2), (3) are more suitable for application in practice than corresponding differential methods. They do not employ the derivatives of the operator $P$.

*Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,*
*Institute of Cybernetics*

Received
July 6th, 1962