

## О ФОКУСИРУЮЩИХ СВОЙСТВАХ СЕКТОРНОГО ЦИКЛОТРОНА

Ю. ЛЕМБРА

### 1. Введение

В настоящей работе предложенный Балдиным, Михайловым и Рабиновичем метод огибающих [1, 2] применяется для исследования фокусирующих свойств секторного циклотрона [3, 4]. Целесообразность применения метода огибающих в данном случае вытекает из того обстоятельства, что с его помощью можно легко сравнить фокусировку в различных типах ускорителей.

Нас не будет интересовать какой-либо конкретный секторный циклотрон. Поэтому объектом исследования выбран простейший (по принципу) вариант секторного циклотрона, элемент периодичности магнитной системы которого состоит из двух секторов с различными значениями напряженности однородного магнитного поля:  $H$  (в дальнейшем сектор 1) и  $\kappa H$  ( $\kappa < 1$ , сектор 2). Такой подход удобен для выяснения характерных особенностей фокусирующих свойств секторного циклотрона, не затемненных посторонними эффектами.

В [1] и [2] метод огибающих развит для случая непрерывности радиальной и вертикальной скоростей частицы при переходе от одной составной части элемента периодичности к другой и от одного элемента периодичности к другому. В данном случае радиальная и вертикальная скорости частицы изменяются скачкообразно при переходе из одного сектора в другой. Однако, как будет показано ниже, путем рассмотрения переходной области малой длины  $l$  можно и в предельном случае  $l \rightarrow 0$  (чему соответствует скачкообразное изменение скорости) применить соответствующие формулы из [1] и [2].

Выпишем из [1] и [2] основные формулы для применения метода огибающих. Бетатронные колебания описываются уравнениями типа

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + g(s)y = 0, \quad g(s+L) = g(s). \quad (1)$$

В уравнении (1) означает  $y$  радиальное ( $q$ ) или вертикальное ( $z$ ) отклонение от равновесной орбиты;  $s$  — длина дуги равновесной орбиты;  $L$  — длина элемента периодичности магнитной системы, измеренная по равновесной орбите. Огибающей траектории частиц является кривая

$$y(s) = \pm F(s), \quad (2)$$

где

$$F^2(s) = \frac{\Phi(s)}{\Phi_0} \left\{ y_0^2 + \Phi_0^2 \left[ \left( \frac{dy}{ds} \right)_0 - \frac{y_0}{2} \left( \frac{d \ln \Phi}{ds} \right)_0 \right]^2 \right\}. \quad (3)$$

Здесь индекс 0 введен для обозначения начальных значений при  $s = s_0$ ;  $\Phi(s)$  — квадрат модуля функции Флоке, нормированной так, чтобы вронскиан нормальных решений  $\Psi(s)$  и  $\Psi^*(s)$



$$W = \left| \begin{array}{cc} \Psi & \Psi^* \\ \frac{d\Psi}{ds} & \frac{d\Psi^*}{ds} \end{array} \right| = \frac{2}{i}. \quad (4)$$

Как известно (см., напр., [5]), нормальные решения обладают свойством

$$\Psi(s+L) = e^{i\mu} \Psi(s) \quad (5)$$

( $\mu$  — характеристический показатель) и имеют такой же модуль, как и функция Флоке.

Максимальное значение  $\Phi(s)$  принято называть эффективным радиусом ускорителя [1, 2]

$$R_{\text{эфф}} = \max \Phi(s). \quad (6)$$

$R_{\text{эфф}}$  имеет разные значения для радиальных и вертикальных колебаний.

Имея в виду важную роль, которую играет функция  $\Phi(s)$  в методе огибающих, наше внимание в дальнейшем обращено на изучение ее поведения.

## 2. Радиальные колебания

В первом приближении можно считать для уравнения (1)

$$g_r(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{r^2} & \text{в секторе 1} \\ -\frac{(1-\alpha) \operatorname{tg} \gamma_{21}}{r l_{21}} & \text{в переходной области из сектора 1} \\ & \text{в сектор 2} \\ \frac{\alpha^2}{r^2} & \text{в секторе 2} \\ -\frac{(1-\alpha) \operatorname{tg} \gamma_{12}}{r l_{12}} & \text{в переходной области из сектора 2} \\ & \text{в сектор 1.} \end{array} \right. \quad (7)$$

В уравнении (7)  $r$  — радиус равновесной орбиты в секторе 1;  $l_{12}$  и  $l_{21}$  — длины переходных областей, измеренных вдоль равновесной орбиты, которую мы считаем в переходной области прямой при условии  $l_{12}, l_{21} \ll r \left( \nu_1 + \frac{\nu_2}{\alpha} \right) = L$  ( $\nu_1$  и  $\nu_2$  — углы поворота равновесной орбиты в секторах 1 и 2);  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{21}$  — углы между касательной к равновесной орбите и нормалью к граничной линии, отделяющей сектор от переходной области. Знак угла  $\gamma$  определяем по принятому в [3] правилу.

Составление точных дифференциальных уравнений движения в переходной области возможно на основе данных магнитных измерений. Однако с учетом результатов работы [6] мы можем при выводе (7) аппроксимировать ход краевого магнитного поля линейной функцией.

Нормальное решение (1) найдем шиванием. Вычисления удобно провести в матричной форме. При этом приняты следующие сокращения:

$$\left. \begin{array}{ll} \sin \frac{s}{r} = \tilde{s}_1 & \sin \frac{\alpha s}{r} = \tilde{s}_2 \\ \sin \nu_1 = s_1 & \sin \nu_2 = s_2 \\ (1-\alpha) \operatorname{tg} \gamma_{jk} = \tau_{jk} & r_{jk} = \sqrt{\frac{r l_{jk}}{\tau_{jk}}} \\ \operatorname{sh} \frac{s}{r ik} = \tilde{sh}_{jk} & \operatorname{sh} \frac{l_{jk}}{r_{jk}} = sh_{jk} \end{array} \right\} \quad (8)$$

( $j \neq k; j, k = 1, 2$ )

Аналогичные обозначения введены также для косинусов. В зависимости от знака  $\gamma_{jk}$  величина  $r_{jk}$  может быть вещественной или мнимой. Отсчет длины  $s$  проводится в формулах (8) от начала сектора и от начала переходной области.

При этих обозначениях решение (1) принимает вид:

в секторе 1

$$\vec{\Psi}_r = \begin{vmatrix} \Psi_r \\ \frac{d\Psi_r}{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{c}_1 & r\tilde{s}_1 \\ -\frac{\tilde{s}_1}{r} & \tilde{c}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_r \\ D_r \end{vmatrix}, \quad (9)$$

в переходной области из сектора 1 в сектор 2

$$\vec{\Psi}_r = \begin{vmatrix} \tilde{c}h_{21} & r_{21}\tilde{s}h_{21} \\ \frac{\tilde{s}h_{21}}{r_{21}} & \tilde{c}h_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & rs_1 \\ -\frac{s_1}{r} & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_r \\ D_r \end{vmatrix}, \quad (10)$$

в секторе 2

$$\vec{\Psi}_r = \begin{vmatrix} \tilde{c}_2 & \frac{r}{\kappa}\tilde{s}_2 \\ -\frac{\kappa}{r}\tilde{s}_2 & \tilde{c}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ch_{21} & r_{21}sh_{21} \\ \frac{sh_{21}}{r_{21}} & ch_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & rs_1 \\ -\frac{s_1}{r} & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_r \\ D_r \end{vmatrix} \quad (11)$$

и в переходной области из сектора 2 в сектор 1

$$\vec{\Psi}_r = \begin{vmatrix} \tilde{c}h_{12} & r_{12}\tilde{s}h_{12} \\ \frac{\tilde{s}h_{12}}{r_{12}} & \tilde{c}h_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & \frac{rs_2}{\kappa} \\ -\frac{\kappa s_2}{r} & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ch_{21} & r_{21}sh_{21} \\ \frac{sh_{21}}{r_{21}} & ch_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & rs_1 \\ -\frac{s_1}{r} & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_r \\ D_r \end{vmatrix}, \quad (12)$$

где  $C_r$  и  $D_r$  — постоянные, которые определяются из условий (4) и (5).

Переходим к рассмотрению случая, когда радиальная скорость изменяется скачкообразно при переходе из одного сектора в другой. Для этого следует полагать в предыдущих формулах  $l_{12} \rightarrow 0$  и  $l_{21} \rightarrow 0$ . Тогда матрицы, описывающие движение в переходной области, принимают форму:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tau_{12}}{r} & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tau_{21}}{r} & 1 \end{vmatrix}.$$

Согласно этому решение в секторе 2 принимает вид:

$$\vec{\Psi}_r = \begin{vmatrix} \tilde{c}_2 & \frac{rs_2}{\kappa} \\ -\frac{\kappa s_2}{r} & \tilde{c}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tau_{21}}{r} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & rs_1 \\ -\frac{s_1}{r} & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_r \\ D_r \end{vmatrix}, \quad (13)$$

а из (5) и (12) вытекает

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tau_{21}}{r} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & \frac{rs_2}{\kappa} \\ -\frac{\kappa s_2}{r} & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tau_{21}}{r} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & rs_1 \\ -\frac{s_1}{r} & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_r \\ D_r \end{vmatrix} = e^{i\mu r} \begin{vmatrix} C_r \\ D_r \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Обозначим произведение 4-х матриц в левой стороне (14) через  $A_r$  и выпишем ее элементы:



$$\left. \begin{aligned}
 (A_r)_{11} &= c_1 c_2 + \frac{\tau_{21} c_1 s_2}{\kappa} - \frac{s_1 s_2}{\kappa} \\
 \frac{(A_r)_{12}}{r} &= s_1 c_2 + \frac{\tau_{21} s_1 s_2}{\kappa} + \frac{c_1 s_2}{\kappa} \\
 r(A_r)_{21} &= -s_1 c_2 - \kappa c_1 s_2 + \tau_{12} \left( c_1 c_2 - \frac{s_1 s_2}{\kappa} \right) + \tau_{21} c_1 c_2 + \frac{\tau_{12} \tau_{21}}{\kappa} c_1 s_2 \\
 (A_r)_{22} &= c_1 c_2 - \kappa s_1 s_2 + \tau_{12} \left( s_1 c_2 + \frac{c_1 s_2}{\kappa} \right) + \tau_{21} s_1 c_2 + \frac{\tau_{12} \tau_{21}}{\kappa} s_1 s_2.
 \end{aligned} \right\} (15)$$

Из (14) и (15) найдем:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos \mu_r &= \frac{(A_r)_{11} + (A_r)_{22}}{2} = \\
 &= c_1 c_2 - \frac{1 + \kappa^2}{2\kappa} s_1 s_2 + \frac{\tau_{12} + \tau_{21}}{2} \left( s_1 c_2 + \frac{c_1 s_2}{\kappa} \right) + \frac{\tau_{12} \tau_{21} s_1 s_2}{2\kappa} \\
 D_r &= \frac{\beta_r}{r} C_r \\
 \beta_r &= \frac{r(e^{i\mu_r} - (A_r)_{11})}{(A_r)_{12}}.
 \end{aligned} \right\} (16)$$

Постоянную  $C_r$  определяем из (4)

$$C_r = \sqrt{\frac{(A_r)_{12}}{\sin \mu_r}}. \quad (17)$$

Таким образом, мы получим нормальное решение в следующей форме:

в секторе 1

$$\Psi_r(s) = \sqrt{\frac{(A_r)_{12}}{\sin \mu_r}} (\tilde{c}_1 + \beta_r \tilde{s}_1), \quad (18)$$

в секторе 2

$$\Psi_r(s) = \sqrt{\frac{(A_r)_{12}}{\sin \mu_r}} (x_r \tilde{c}_2 + y_r \tilde{s}_2),$$

где

$$x_r = c_1 + \beta_r s_1; \quad \kappa y_r = \tau_{21} c_1 - s_1 + \beta_r (\tau_{21} s_1 + c_1). \quad (19)$$

Из (18) найдем квадрат модуля функции Флоке:

в секторе 1

$$\Phi_r(s) = \frac{(A_r)_{12}}{\sin \mu_r} [\tilde{c}_1^2 + (\beta_r + \beta_r^*) \tilde{c}_1 \tilde{s}_1 + \beta_r \beta_r^* \tilde{s}_1^2], \quad (20)$$

в секторе 2

$$\Phi_r(s) = \frac{(A_r)_{12}}{\sin \mu_r} [x_r x_r^* \tilde{c}_2^2 + (x_r y_r^* + x_r^* y_r) \tilde{c}_2 \tilde{s}_2 + y_r y_r^* \tilde{s}_2^2].$$

При проведении численных расчетов удобно пользоваться следующими формулами, вытекающими из (15), (16) и (19):

$$\left. \begin{aligned} \beta_r + \beta_r^* &= \frac{2r[\cos \mu_r - (A_r)_{11}]}{(A_r)_{12}} = \frac{r[(A_r)_{22} - (A_r)_{11}]}{(A_r)_{12}} \\ \beta_r \beta_r^* &= \frac{r^2}{(A_r)_{12}^2} [1 - 2(A_r)_{11} \cos \mu_r + (A_r)_{11}^2] = - \frac{r^2 (A_r)_{21}}{(A_r)_{12}} \\ x_r x_r^* &= c_1^2 + s_1 c_1 (\beta_r + \beta_r^*) + s_1^2 \beta_r \beta_r^* \\ \kappa (x_r y_r^* + x_r^* y_r) &= 2c_1 (\tau_{21} c_1 - s_1) + (2\tau_{21} s_1 c_1 + c_1^2 - s_1^2) (\beta_r + \beta_r^*) + \\ &\quad + 2s_1 (\tau_{21} s_1 + c_1) \beta_r \beta_r^* \\ \kappa^2 y_r y_r^* &= (\tau_{21} c_1 - s_1)^2 + (\tau_{21} c_1 - s_1) (\tau_{21} s_1 + c_1) (\beta_r + \beta_r^*) + (\tau_{21} s_1 + c_1)^2 \beta_r \beta_r^* \end{aligned} \right\} (21)$$

Целесообразно представить (20) в виде:

в секторе 1

$$\Phi_{r1} = \frac{(A_r)_{12}}{\sin \mu_r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sqrt{(\beta_r + \beta_r^*)^2 + (\beta_r \beta_r^* - 1)^2} [\cos \varphi_1 - \cos(2\nu + \varphi_1)] \right\} \left( \nu = \frac{s}{r} \right),$$

в секторе 2

$$\Phi_{r2} = \frac{(A_r)_{12}}{\sin \mu_r} \left\{ x_r x_r^* + \frac{1}{2} \sqrt{(x_r y_r^* + x_r^* y_r)^2 + (y_r y_r^* - x_r x_r^*)^2} [\cos \varphi_2 - \right. \\ \left. - \cos(2\nu + \varphi_2)] \right\} \left( \nu = \frac{\kappa s}{r} \right), \quad (22)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\beta_r + \beta_r^*}{\beta_r \beta_r^* - 1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x_r y_r^* + x_r^* y_r}{y_r y_r^* - x_r x_r^*}. \quad (23)$$

Для сравнения представляет интерес рассмотреть гипотетический случай  $\operatorname{tg} \gamma_{12} = \operatorname{tg} \gamma_{21} = 0$ . В этом случае выведенные формулы упрощаются. Подставляя  $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$  в (15)–(17), (21) и (23), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \mu_r &= c_1 c_2 - \frac{(1 + \kappa^2)}{2\kappa} s_1 s_2, & C_r &= \sqrt{\frac{r(\kappa s_1 c_2 + c_1 s_2)}{\kappa \sin \mu_r}} \\ \beta_r + \beta_r^* &= -\kappa (x_r y_r^* + x_r^* y_r) = \frac{(1 - \kappa^2) s_1 s_2}{\kappa s_1 c_2 + c_1 s_2} \\ \beta_r \beta_r^* - 1 &= -\frac{(1 - \kappa^2) c_1 s_2}{\kappa s_1 c_2 + c_1 s_2}, & \kappa (y_r y_r^* - x_r x_r^*) &= \frac{(1 - \kappa^2) s_1 c_2}{\kappa s_1 c_2 + c_1 s_2} \\ x_r x_r^* &= 1, & \varphi_1 &= \pi - \nu_1, & \varphi_2 &= 2\pi - \nu_2. \end{aligned} \right\} (24)$$



Подставляя (24) в (22), получим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{r1} &= \frac{r}{\sin \mu_r} \left\{ s_1 c_2 + \frac{c_1 s_2}{\kappa} + \frac{(1 - \kappa^2) s_2}{2\kappa} [\cos(2\nu - \nu_1) - c_1] \right\} \left( \nu = \frac{s}{r} \right) \\ \Phi_{r2} &= \frac{r}{\sin \mu_r} \left\{ s_1 c_2 + \frac{c_1 s_2}{\kappa} - \frac{(1 - \kappa^2) s_1}{2\kappa^2} [\cos(2\nu - \nu_2) - c_2] \right\} \left( \nu = \frac{\kappa s}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Из (25) видно, что огибающая имеет максимум в середине сектора 1 и минимум в середине сектора 2. Полученный результат аналогичен хорошо известному из теории сильнофокусирующих ускорителей обстоятельству, что частица находится в фокусирующих секторах дальше от равновесной орбиты, чем в дефокусирующих секторах.

Из теории обычных слабофокусирующих ускорителей известно, что фокусирующие силы изменяются в случае однородного магнитного поля пропорционально напряженности магнитного поля и обратно пропорционально радиусу равновесной орбиты (см., напр., [2]). Применяя это правило в нашем случае, убедимся, что в секторе 2 фокусирующие силы в  $\frac{1}{\kappa^2}$  раз меньше, чем в секторе 1. Теперь становится понятным

смысл вытекающего из (25) факта, что частица находится в секторе 1 дальше от равновесной орбиты, чем в секторе 2. Действительно, в секторе 2 на частицу действуют менее сильные фокусирующие силы и частица попадает в сектор 1 наиболее отклоненной. С другой стороны, на находящуюся в секторе 1 частицу действуют более сильные фокусирующие силы и она попадает в сектор 2 на меньшем расстоянии от равновесной орбиты, чем в секторе 1.

В случае  $\text{tg } \gamma_{12} \neq 0$  и  $\text{tg } \gamma_{21} \neq 0$  возникают фокусирующие и дефокусирующие силы, обусловленные краевым магнитным полем, и экстремумы огибающей смещаются.

### 3. Вертикальные колебания

В первом приближении можно считать для уравнения (1)

$$g_z(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{в секторе 1} \\ \frac{(1 - \kappa) \text{tg } \gamma_{21}}{r l_{21}} & \text{в переходной области из} \\ & \text{сектора 1 в сектор 2} \\ 0 & \text{в секторе 2} \\ \frac{(1 - \kappa) \text{tg } \gamma_{12}}{r l_{12}} & \text{в переходной области из} \\ & \text{сектора 2 в сектор 1.} \end{array} \right\} \quad (26)$$

Расчеты вполне аналогичны проведенным в п. 2 расчетам. Поэтому мы их повторять не будем и приводим сразу окончательный результат:

в секторе 1

$$\Phi_{z1} = \frac{(A_z)_{12}}{\sin \mu_z} [1 + (\beta_z + \beta_z^*) \nu + \beta_z \beta_z^* \nu^2] \quad \left( \nu = \frac{s}{r} \right),$$

в секторе 2

$$\Phi_{z2} = \frac{(A_z)_{12}}{\sin \mu_z} [x_z x_z^* + (x_z y_z^* + x_z^* y_z) \nu + y_z y_z^* \nu^2] \quad \left( \nu = \frac{\kappa s}{r} \right),$$

(27)

где

$$\left. \begin{aligned}
 (A_z)_{11} &= 1 - \frac{\tau_{21} \nu_2}{\kappa}; & \frac{(A_z)_{12}}{r} &= \nu_1 - \frac{\tau_{21} \nu_1 \nu_2}{\kappa} + \frac{\nu_2}{\kappa} \\
 r(A_z)_{21} &= -(\tau_{12} + \tau_{21}) + \frac{\tau_{12} \tau_{21} \nu_2}{\kappa} \\
 (A_z)_{22} &= 1 - \tau_{12} \left( \nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) - \tau_{21} \nu_1 + \frac{\tau_{12} \tau_{21}}{\kappa} \nu_1 \nu_2 \\
 \cos \mu_z &= \frac{(A_z)_{11} + (A_z)_{22}}{2} = 1 - \frac{\tau_{12} + \tau_{21}}{2} \left( \nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) + \frac{\tau_{12} \tau_{21} \nu_1 \nu_2}{2\kappa} \\
 \beta_z + \beta_z^* &= \frac{2r [\cos \mu_z - (A_z)_{11}]}{(A_z)_{12}} = \frac{r [(A_z)_{22} - (A_z)_{11}]}{(A_z)_{12}} \\
 \beta_z \beta_z^* &= \frac{r^2}{(A_z)_{12}^2} [1 - 2(A_z)_{11} \cos \mu_z + (A_z)_{11}^2] = -\frac{r^2 (A_z)_{21}}{(A_z)_{12}} \\
 x_z x_z^* &= 1 + (\beta_z + \beta_z^*) \nu_1 + \beta_z \beta_z^* \nu_1^2 \\
 \kappa(x_z y_z^* + x_z^* y_z) &= -2\tau_{21} + (1 - 2\nu_1 \tau_{21}) (\beta_z + \beta_z^*) + 2\nu_1 (1 - \nu_1 \tau_{21}) \beta_z \beta_z^* \\
 \kappa^2 y_z y_z^* &= \tau_{21}^2 - \tau_{21} (1 - \nu_1 \tau_{21}) (\beta_z + \beta_z^*) + (1 - \nu_1 \tau_{21})^2 \beta_z \beta_z^*
 \end{aligned} \right\} (28)$$

Как видно из (27), экстремумы огибающей для вертикальных колебаний являются минимумами.

#### 4. Пример

В качестве иллюстрации приведем пример со следующими значениями параметров:  $\kappa = 0,3$ ,  $\nu_1 = 1,417$  rad,  $\nu_2 = 0,1544$  rad,  $\text{tg } \gamma_{12} = -0,877$ ,  $\text{tg } \gamma_{21} = 1,25$ . Эти параметры получены нами при расчете одного из вариантов секторного циклотрона с числом элементов периодичности на оборот  $N = 4$ . Тогда по (16) и (28)  $\cos \mu_r = -0,123$  и  $\cos \mu_z = 0,550$ . При таких значениях параметров (22) и (27) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_{r1} &= 1,51r \{1 + 0,295 [\cos(2\nu - 21^\circ 30') - \cos 21^\circ 30']\} \left( \nu = \frac{s}{r} \right) \\
 \Phi_{r2} &= 1,51r \{0,497 - 5,42 [\cos(2\nu + 8^\circ 45') - \cos 8^\circ 45']\} \left( \nu = \frac{\kappa s}{r} \right)
 \end{aligned} \right\} (22')$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_{z1} &= 1,55r (1 + 0,417 \nu^2) \left( \nu = \frac{s}{r} \right) \\
 \Phi_{z2} &= 1,55r (1,84 - 6,77 \nu + 8,76 \nu^2) \left( \nu = \frac{\kappa s}{r} \right)
 \end{aligned} \right\} (27')$$

График функций (22') и (27') представлен на фиг. 1.

Анализ (22'), (27') и фиг. 1 указывает на следующую закономерность: функция  $\Phi_{r,z}$  принимает максимальные значения вблизи граничной линии, где имеется фокусировка краевым магнитным полем, а минимальное значение вблизи граничной линии, где имеется дефокусировка краевым магнитным полем. Это физически понятно, учитывая рассуждения, приведенные в конце п. 2. Из физических соображений ясно, что аналогичное поведение функции  $\Phi_{r,z}$  встречается и при других значениях параметров.

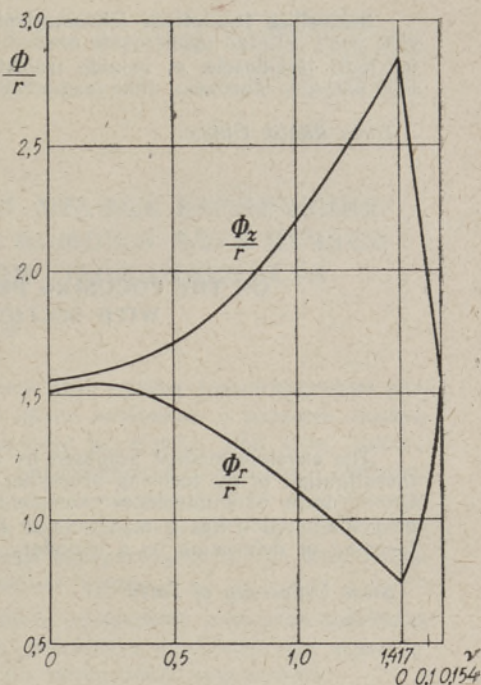


По (6), (22') и (27') найдем эффективные радиусы секторного циклотрона в нашем примере:

$$(R_r)_{\text{эфф}} = 1,54 r$$

$$(R_z)_{\text{эфф}} = 2,85 r.$$

Как указано в [1], для сравнения ускорителей разных типов физически разумно сравнить отношение  $R_{\text{эфф}}$  к линейным размерам зазора магнита. Так, например, можно сравнивать отношения  $R_{\text{эфф}}/R_m$ , где  $R_m$  — максимальное расстояние от равновесной орбиты до центра ускорителя. Используя данное в [3, 4] выражение для  $R_m$  найдем  $(R_r)_{\text{эфф}}/R_m = 1,23$  и  $(R_z)_{\text{эфф}}/R_m = 2,28$ . Напомним, что в слабофокусирующих ускорителях  $R_{\text{эфф}}/R_m > 1$ , а в сильнофокусирующих ускорителях порядок величины  $R_{\text{эфф}}/R_m \approx 0,1$ . Такое сопоставление показывает, что по сравнению с сильнофокусирующими ускорителями секторный циклотрон обладает худшими фокусирующими свойствами. Это понятно, так как в секторном циклотроне данного варианта используется однородное магнитное поле и только для получения вертикальной фокусировки введены краевые магнитные поля. Поэтому параметры, характеризующие его фокусирующие свойства, одного порядка с соответствующими параметрами в обычных слабофокусирующих ускорителях.



Фиг. 1.

Автор выражает благодарность Д. М. Каминкеру за обсуждение результатов этой работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Балдин, В. В. Михайлов, М. С. Рабинович, ЖЭТФ, 31, 993, 1956.
2. М. С. Рабинович, Основы теории синхрофазотрона. Тр. ФИАН, т. 10, М., 1958.
3. Е. М. Мороз, М. С. Рабинович, Proc. CERN Symp., 1, 547, 1956; см. также приложение № 4 к журналу «Атомная энергия», 27, 1957.
4. Е. М. Мороз, М. С. Рабинович, Приборы и техника эксперимента. № 1, 15, 1957.
5. Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах. ИЛ, 1953.
6. J. Teichman, Czechosl. Journ. Phys., 9, 47, 1959.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию  
26. VIII 1959



## SEKTORILISE TSÜKLOTRONI FOKUSSEERIVATEST OMADUSTEST

J. Lembra

*Resümee*

Sektorilise tsüklotroni fokusseerivaid omadusi uuriti Baldini, Mihhailovi ja Rabinovitši poolt esitatud mähisjoonte meetodil. Numbrilise näite ja füüsikaliste kaalutluste põhjal jõuti järeldusele, et ionide trajektoori mähisjoone maksimum (miinimum) paikneb selle äärjoone läheduses, mille magnetväli mõjub ionidele fokusseerivalt (defokusseerivalt).

*Tartu Riiklik Ülikool*Saabus toimetusse  
26. VIII 1959ON THE FOCUSING PROPERTIES OF THE CYCLOTRON  
WITH SECTIONED MAGNET SYSTEM

J. Lembra

*Summary*

The envelope-method proposed by Baldin, Mikhailov and Rabinovich is used for the investigation of the focusing properties of the cyclotron with a sectioned magnet system. On the basis of a numerical example and physical conceptions, it is concluded that the envelope-function has a maximum or minimum close to the boundary line where the focusing or defocusing by a boundary magnetic field exists.

*State University of Tartu*Received  
August 26th, 1959