EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1962.1.06

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ МЕРСЕРА ДЛЯ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Т. СЫРМУС

Настоящая статья является продолжением статьи [3], в которой мы указали, что два основных встречающихся вида теоремы Мерсера (теоремы I и II из [3]) не тождественны. В связи с этим интересно отметить, что результаты, получаемые при обобщении теоремы Мерсера на случай двойных последовательностей, различны в зависимости от того, которая из теорем I и II или ее обобщений берется в основу. Целью настоящей статьи является показать, в чем состоит различие этих результатов и доказать ряд обобщений теоремы Мерсера для двойных последовательностей.

Пусть $P^{\alpha,\beta}$ — факторизирующаяся матрица преобразования двойной последовательности в двойную последовательность и E — матрица тождественного преобразования.

Мы будем называть преобразование последовательности, определенное матрицей вида $\lambda E+(1-\lambda)\ P^{\alpha,\beta}$, двучленным преобразованием Мерсера — $P^{\alpha,\beta}$. Аналогично назовем преобразование последовательности, определенное матрицей вида $\lambda_1\lambda_2 E+(1-\lambda_1)\lambda_2 P^{\alpha,0}+\lambda_1(1-\lambda_2)P^{0,\beta}+(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)P^{\alpha,\beta}$, четырехчленным преобразованием Мерсера — $P^{\alpha,\beta}$.

Для случая четырехчленного преобразования* Мерсера — $H^{1,1}$ имеются два доказательства теоремы Мерсера, принадлежащие одна Мерсеру [12], а другая Рамануджану [14]. Они доказывают теоремы, отличающиеся друг от друга так же, как наши теоремы I и II из [3].

Теорема Мерсера для двучленного преобразования Мерсера — взвешенных средних Рисса, а следовательно, и для преобразования Мерсера — $H^{1,1}$ доказана в [2].

Из [2, 14] и результатов настоящей статьи следует, что в основе теорем Мерсера для четырехчленных преобразований $M-P^{\alpha,\beta}$ лежит теорема II из [3] или ее обобщения, а в основе теорем Мерсера для двучленных преобразований $M-P^{\alpha,\beta}$ лежит теорема I из [3] или ее обобщения.

В первом параграфе нашей статьи мы введем символику, приведем необходимые нам теоремы и докажем ряд лемм. Во втором параграфе докажем теорему Мерсера для двучленного преобразования Мерсера — (H,μ_{kl}), ограничиваясь факторизирующимися преобразованиями Хаусдорфа. Здесь же дадим следствия доказанной теоремы. В третьем параграфе докажем теорему Мерсера для четырехчленных преобразований Мерсера —$C^{\alpha,\beta}$ и Мерсера —$H^{\alpha,\beta}$.

* Определения методов Гелдера $H^{\alpha,\beta}$ даны в [8] и [9], Чезаро $C^{\alpha,\beta}$ — в [8] и [13], Хаусдорфа (H,μ_{kl}) — в [7] и [14], взвешенных средних Рисса $(R,\ p_{kl})$ — в [11].

1. Следуя Адамсу [5], обозначим факторизирующиеся преобразования Хаусдорфа символом $(H, \mu_k) \odot (H, \nu_l) = (H, \mu_{kl})$, где $\mu_{kl} = \mu_k \nu_l$. Матричные методы будем обозначать через $A = (a_{mnkl})$ и т. д., а обратные им, соответственно, через $A^{-1} = (a'_{mnkl})$ и т. д. Для конечных разностей воспользуемся общепринятыми символами. Следуя Гамильтону [10], пусть b — класс ограниченных двойных последовательностей, c — класс сходящихся двойных последовательностей, bc — класс сходящихся и ограниченных двойных последовательностей.

В настоящей работе нам нужны следующие теоремы.

Теорема 1.1. (Польняковский [1]).

В случае методов * C^α *и* H^α, *с* $\alpha = 2, 3, \ldots$, *существуют постоянные, соответственно,* λ'_α *и* λ''_α *такие, что из условия*

$$\lim_n (\lambda s_n + (1-\lambda) t_n) = h,$$

где t_n *означает, соответственно,* C_n^α *или* H_n^α, *следует* $\lim\limits_n s_n = h$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda > \lambda'_\alpha$ *или* $\lambda > \lambda''_\alpha$. *Обе последовательности,* $\{\lambda'_\alpha\}$ *и* $\{\lambda''_\alpha\}$, *являются возрастающими при* $\alpha \geqslant 2$, *неотрицательными и сходящимися к значению* $\frac{1}{2}$.

Справедливы следующие асимптотические представления:

$$\lambda'_\alpha \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \frac{\pi^4}{\ln^2 \alpha},$$

$$\lambda''_\alpha = \frac{\cos^\alpha \frac{\pi}{\alpha}}{1 + \cos^\alpha \frac{\pi}{\alpha}} \sim \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8\alpha}.$$

Теорема 1.2. (Адамс [5], теорема 1L).

Если A' *и* A'' — *регулярные методы простых последовательностей, то метод* $A = A' \odot A''$ *регулярен в этом классе двойных последовательностей,* A*-преобразования которых ограничены.*

Теорема 1.3. (Адамс [6], теорема 7).

Если A' *и* A'' *обратимые методы простых последовательностей, то метод* $A = A' \odot A''$ *имеет обратный метод вида* $A^{-1} = (A')^{-1} \odot (A'')^{-1}$.

Докажем теперь следующие леммы.

Лемма 1.1. *Если* (H, μ_{mn})*-преобразование последовательности* $\{s_{mn}\}$ *ограничено, а метод* $(H, \mu_{mn})^{-1}$ *сохраняет ограниченность, то и сама последовательность* $\{s_{mn}\}$ *ограничена.*

Доказательство. По условию метод $\left(H, \frac{1}{\mu_{mn}}\right)$ сохраняет ограниченность, следовательно, существуют такие постоянные L и M, что

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} \left| \Delta^{m-k, n-l} \frac{1}{\mu_{kl}} \right| \leqslant L \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и, кроме того,

---

* Определения методов Чезаро C^α и Гелдера H^α даны в [4]; символ $\lim\limits_n x_n$ означает $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

$$|t_{mn}| = \left| \sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} \Delta^{m-k,\, n-l} \mu_{kl} s_{kl} \right| \leq M \qquad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

а поэтому

$$|s_{mn}| \leq \sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} \left| \Delta^{m-k,\, n-l} \frac{1}{\mu_{kl}} \right| |t_{kl}| \leq ML \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.2. *Если* $\lambda > \lambda''_\alpha$, *где* $\lambda''_\alpha = \dfrac{\cos^\alpha \frac{\pi}{\alpha}}{1 + \cos^\alpha \frac{\pi}{\alpha}}$ *и* $\alpha = 2, 3, \ldots,$

то последовательность Хаусдорфа $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda + (1-\lambda)\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}}$ *регулярна.*

Доказательство. Из теоремы 1.1 следует, что метод $\lambda E + (1-\lambda) H^\alpha$ при $\lambda > \lambda''_\alpha$ равносилен тождественному. По теоремам 209 и 208 из [4] это означает, что при сделанных относительно λ и λ''_α предположениях последовательность $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda + (1-\lambda)\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}}$ — регулярная последовательность Хаусдорфа, что и требовалось доказать.

Нижеследующие две леммы доказываются аналогично. При этом в доказательстве леммы 1.4 используем вместо теоремы 1.1 теорему 3.1 из [3].

Лемма 1.3. *Если* $\lambda > \lambda'_\alpha$, *где* λ'_α *определено как в теореме* 1.1 *и* $\alpha = 2, 3, \ldots,$ *то последовательность Хаусдорфа* $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda + (1-\lambda)\dfrac{1}{\binom{k+\alpha}{\alpha}}}$ *регулярна.*

Лемма 1.4. *Если* $\lambda > 0$ *и* $0 < \alpha < 1$, *то последовательность Хаусдорфа* $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda + (1-\lambda)\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}}$ *регулярна.*

2. В этом параграфе докажем для методов Хаусдорфа вида $(H, \mu_k) \odot (H, \nu_l) = (H, \mu_{kl})$ следующее обобщение теоремы Мерсера.

Теорема 2.1. *Если* $\lambda > 0$, $h \neq \infty$, *последовательности Хаусдорфа* $\{\mu_k\}$ *и* $\{\nu_l\}$ *абсолютно монотонны и удовлетворяют условиям* $\lim\limits_m \Delta^m \mu_0 = \lim\limits_n \Delta^n \nu_0 = 0$ *и* $\mu_0 \nu_0 = 1$, *то из равенства* *

$$b\text{-}\lim_{m,n} \left(\lambda s_{mn} + (1-\lambda) \sum_{k,l=0}^{m-1,n-1} \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{l} \Delta^{m-1-k,\, n-1-l} \mu_k \nu_l s_{kl}\right) = h$$

вытекает $$b\text{-}\lim_{m,n} s_{mn} = h.$$

---

* Под символом $b\text{-}\lim\limits_{m,n} S_{mn} = S$ мы подразумеваем $\lim\limits_{m,n} S_{mn} = S$ при $S_{mn} = O(1)$.

Доказательство. Пусть

$$t_{mn}=\lambda s_{mn}+(1-\lambda)H_{m-1,\,n-1} \tag{2.1}$$

или

$$t_{mn}=\lambda\sum_{k,l=0}^{m,n}h'_{mnkl}H_{kl}+(1-\lambda)H_{m-1,\,n-1}, \tag{2.2}$$

где

$$h_{mnkl}=\binom{m}{k}\binom{n}{l}\Delta^{m-k,\,n-l}\mu_{kl}\quad\text{и}\quad H_{mn}=\sum_{k,l=0}^{m,n}h_{mnkl}s_{kl}. \tag{2.3}$$

Ввиду леммы 2.1 из [2] результат обращения равенства (2.2) имеет вид

$$H_{mn}=\frac{\sum\limits_{k,l=0}^{m,n}\gamma_{mnkl}t_{kl}}{\sum\limits_{k,l=0}^{m,n}\gamma_{mnkl}}, \tag{2.4}$$

где γ_{mnmn} — произвольная величина, а остальные γ_{mnkl} определяются системой

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=s}^{n}\gamma_{mnml}\binom{l}{s}\Delta^{l-s}\dfrac{1}{\nu_s}=0\quad(s=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1),\\ \sum\limits_{k=r}^{m}\gamma_{mnkn}\binom{k}{r}\Delta^{k-r}\dfrac{1}{\mu_r}=0\quad(r=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,m-1),\\ \sum\limits_{k,l=r,s}^{m,n}\gamma_{mnkl}\binom{k}{r}\binom{l}{s}\Delta^{k-r,\,l-s}\dfrac{1}{\mu_r\nu_s}+\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\gamma_{mn,\,r+1,\,s+1}=0\\ (r=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,m-1;\ s=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1).\end{cases}$$

Из леммы 2.1 [2] также следует, что

$$\sum_{k,l=0}^{m,n}\gamma_{mnkl}=\frac{\lambda\gamma_0}{\mu_m\nu_n}, \tag{2.5}$$

в котором $\gamma_0=\gamma_{mnmn}$.

Обозначив $c=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, приведем полученную систему к виду

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=s}^{n-1}\gamma_{mnml}\binom{l}{s}\Delta^{l-s}\dfrac{1}{\nu_s}=-\binom{n}{s}\Delta^{n-s}\dfrac{1}{\nu_s}\gamma_0\quad(s=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1),\\ \sum\limits_{k=r}^{m-1}\gamma_{mnkn}\binom{k}{r}\Delta^{k-r}\dfrac{1}{\mu_r}=-\binom{m}{r}\Delta^{m-r}\dfrac{1}{\mu_r}\gamma_0\quad(r=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,m-1),\\ \sum\limits_{k,l=r,s}^{m-1,n-1}\gamma_{mnkl}\mu_r\nu_s\binom{l}{s}\binom{k}{r}\Delta^{k-r,\,l-s}\dfrac{1}{\mu_r\nu_s}=\mu_r\nu_s\gamma_0\binom{m}{r}\binom{n}{s}\Delta^{m-r,\,n-s}\dfrac{1}{\mu_r\nu_s}-\\ \qquad -c\mu_r\nu_s\gamma_{mn,\,r+1,\,s+1}\ (r=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,m-1;\ s=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1).\end{cases} \tag{2.6}$$

Выделяя из (2.6) систему

$$\sum_{l=s}^{n-1} \gamma_{mnml} \binom{l}{s} \Delta^{l-s} \frac{1}{\nu_s} = -\binom{n}{s} \Delta^{n-s} \frac{1}{\nu_s} \gamma_0 \quad (s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

и сравнивая ее с системой (2.9) из [3], мы видим, что эти две системы тождественны. Это же справедливо для системы

$$\sum_{k=r}^{m-1} \gamma_{mnkn} \binom{k}{r} \Delta^{k-r} \frac{1}{\mu_r} = -\binom{m}{r} \Delta^{m-r} \frac{1}{\mu_r} \gamma_0 \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1).$$

Следовательно, решения этих двух систем совпадают с решением системы (2.9) из [3], т. е. имеем

$$\left\{ \begin{aligned} &\gamma_{mnml} = \gamma_0 \frac{1}{\nu_n} \binom{n}{l} \Delta^{n-l} \nu_l \quad (l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \\ &\gamma_{mnkn} = \gamma_0 \frac{1}{\mu_m} \binom{m}{k} \Delta^{m-k} \mu_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1). \end{aligned} \right. \tag{2.7}$$

Для решения оставшейся части системы (2.6) представим искомое γ_{mnkl} суммой двух слагаемых, т. е.

$$\gamma_{mnkl} = X_{mnkl} + Y_{mnkl}, \tag{2.8}$$

требуя, чтобы слагаемые удовлетворяли системам

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{k,l=r,s}^{m-1,n-1} X_{mnkl} \binom{k}{r} \binom{l}{s} \Delta^{k-r,\, l-s} \frac{1}{\mu_r \nu_s} = \gamma_0 \binom{m}{r} \binom{n}{s} \Delta^{m-r,\, n-s} \frac{1}{\mu_r \nu_s} \\ &(r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1;\ s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1) \end{aligned} \right. \tag{2.9}$$

и

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{k,l=r,s}^{m-1,n-1} Y_{mnkl} \mu_r \nu_s \binom{k}{r} \binom{l}{s} \Delta^{k-r,\, l-s} \frac{1}{\mu_r \nu_s} = -c\, \mu_r \nu_s \gamma_{mn,\, r+1,\, s+1} \\ &(r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1;\ s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \end{aligned} \right. \tag{2.10}$$

Решение систем (2.9) имеет вид

$$\begin{gathered} X_{mnkl} = \gamma_0 \frac{1}{\mu_m \nu_n} \binom{m}{k} \binom{n}{l} \Delta^{m-k,\, n-l} \mu_k \nu_l \\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1;\ l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Находим это решение аналогично тому, как было найдено решение системы (2.9) из [3].

Путем элементарных, но объемистых вычислений можно показать, применяя формулу (1.3) из [3], что решение системы (2.10) сводится к решению следующего ряда систем:

а) первая группа систем получается при $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$ из системы

$$\begin{aligned} \sum_{l=s}^{n-(m-r)} Y_{mnrl} \nu_s \binom{l}{s} \Delta^{l-s} \frac{1}{\nu_s} = &- \sum_{l=n-(m-r)+1}^{n-1} Y_{mnrl} \nu_s \binom{l}{s} \Delta^{l-s} \frac{1}{\nu_s} - \\ &- c\, \nu_s \sum_{k=r}^{m-1} \binom{k}{r} \Delta^{k-r} \mu_r \gamma_{mn,\, k+1,\, s+1} \quad (s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-(m-r));\end{aligned}$$

б) вторая группа систем получается при $s=n-m,\ n-(m-1),\ \ldots,\ n-1$ из системы

$$\sum_{k=r}^{m-(n-s)} Y_{mnks}\,\mu_r \binom{k}{r} \Delta^{k-r}\frac{1}{\mu_r} = -\sum_{k=m-(n-s)+1}^{m-1} Y_{mnks}\,\mu_r \binom{k}{r}\Delta^{k-r}\frac{1}{\mu_r} -$$

$$-c\,\mu_r \sum_{l=s}^{n-1}\binom{l}{s}\Delta^{l-s}\nu_s\,\gamma_{mn,\,r+1,\,l+1} \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-(n-s)).$$

При получении этих систем сделано предположение $n\geqslant m$, что, конечно, не ограничивает общности.

Решая полученные системы аналогично тому, как была решена система (2.10) из [3], можно путем элементарных, но объемистых вычислений доказать, что система (2.10) имеет следующее решение:

а) при $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$

$$Y_{mnkl} = -c\,\gamma_0 \sum_{\sigma,\,\tau=k,\,l}^{m-1,\,n-1} \frac{1}{\mu_m}\binom{m}{\sigma+1}\Delta^{m-(\sigma+1)}\mu_{\sigma+1}\binom{\sigma}{k}\Delta^{\sigma-k}\mu_k\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{1}{\nu_n}\binom{n}{\tau+1}\Delta^{n-(\tau+1)}\nu_{\tau+1}\binom{\tau}{l}\Delta^{\tau-l}\nu_l + \tag{2.12}$$

$$+c^2\gamma_0 \sum_{\substack{\sigma_1=k\\ \tau_1=l}}^{m-2,\,n-2}\ \sum_{\substack{\sigma=\sigma_1+1\\ \tau=\tau_1+1}}^{m-1,\,n-1} \frac{1}{\mu_m}\binom{m}{\sigma+1}\Delta^{m-(\sigma+1)}\mu_{\sigma+1}\binom{\sigma}{\sigma_1+1}\Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)}\mu_{\sigma_1+1}\binom{\sigma_1}{k}\Delta^{\sigma_1-k}\mu_k\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{1}{\nu_n}\binom{n}{\tau+1}\Delta^{n-(\tau+1)}\nu_{\tau+1}\binom{\tau}{\tau_1+1}\Delta^{\tau-(\tau_1+1)}\nu_{\tau_1+1}\binom{\tau_1}{l}\Delta^{\tau_1-l}\nu_l -$$

$$-c^3\gamma_0 \sum_{\substack{\sigma_2=k\\ \tau_2=l}}^{m-3,\,n-3}\ \sum_{\substack{\sigma_1=\sigma_2+1\\ \tau_1=\tau_2+1}}^{m-2,\,n-2}\ \sum_{\substack{\sigma=\sigma_1+1\\ \tau=\tau_1+1}}^{m-1,\,n-1} \frac{1}{\mu_m}\binom{m}{\sigma+1}\Delta^{m-(\sigma+1)}\mu_{\sigma+1}\binom{\sigma}{\sigma_1+1}\,\cdot$$

$$\cdot\,\Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)}\mu_{\sigma_1+1}\binom{\sigma_1}{\sigma_2+1}\Delta^{\sigma_1-(\sigma_2+1)}\mu_{\sigma_2+1}\,\cdot$$

$$\cdot\,\binom{\sigma_2}{k}\Delta^{\sigma_2-k}\mu_k\cdot\frac{1}{\nu_n}\binom{n}{\tau+1}\Delta^{n-(\tau+1)}\nu_{\tau+1}\binom{\tau}{\tau_1+1}\Delta^{\tau-(\tau_1+1)}\nu_{\tau_1+1}\binom{\tau_1}{\tau_2+1}\,\cdot$$

$$\cdot\,\Delta^{\tau_1-(\tau_2+1)}\nu_{\tau_2+1}\binom{\tau_2}{l}\Delta^{\tau_2-l}\nu_l + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m-k}c^{\,m-k}\gamma_0\mu_k\mu_{k+1}\ldots\mu_{m-1} \sum_{\tau_{m-(k+1)}=l}^{n-(m-k)}\ \sum_{\tau_{m-(k+2)}=\tau_{m-(k+1)}+1}^{n-(m-k)+1}\ \ldots$$

$$\ldots \sum_{\tau=\tau_1+1}^{n-1}\frac{1}{\nu_n}\binom{n}{\tau+1}\Delta^{n-(\tau+1)}\nu_{\tau+1}\binom{\tau}{\tau_1+1}\Delta^{\tau-(\tau_1+1)}\nu_{\tau_1+1}\ldots$$

$$\ldots\binom{\tau_{m-(k+2)}}{\tau_{m-(k+1)}+1}\Delta^{\tau_{m-(k+2)}-(\tau_{m-(k+1)}+1)}\nu_{\tau_{m-(k+1)}+1}\binom{\tau_{m-(k+1)}}{l}\Delta^{\tau_{m-(k+1)}-l}\nu_l$$

$$(l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-(m-k));$$

б) при $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{mnkl} = &-c\gamma_0 \sum_{\sigma,\tau=k,l}^{m-1,n-1} \frac{1}{\mu_m}\binom{m}{\sigma+1}\Delta^{m-(\sigma+1)}\mu_{\sigma+1}\binom{\sigma}{k}\Delta^{\sigma-k}\mu_k\cdot \\
&\cdot\frac{1}{\nu_n}\binom{n}{\tau+1}\Delta^{n-(\tau+1)}\nu_{\tau+1}\binom{\tau}{l}\Delta^{\tau-l}\nu_l+ \qquad (2.13)\\
&+c^2\gamma_0\sum_{\substack{\sigma_1=k\\ \tau_1=l}}^{m-2,n-2}\ \sum_{\substack{\sigma=\sigma_1+1\\ \tau=\tau_1+1}}^{m-1,n-1}\frac{1}{\mu_m}\binom{m}{\sigma+1}\Delta^{m-(\sigma+1)}\mu_{\sigma+1}\binom{\sigma}{\sigma_1+1}\Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)}\mu_{\sigma_1+1}\binom{\sigma_1}{k}\Delta^{\sigma_1-k}\mu_k\cdot \\
&\cdot\frac{1}{\nu_n}\binom{n}{\tau+1}\Delta^{n-(\tau+1)}\nu_{\tau+1}\binom{\tau}{\tau_1+1}\Delta^{\tau-(\tau_1+1)}\nu_{\tau_1+1}\binom{\tau_1}{l}\Delta^{\tau_1-l}\nu_l- \\
&-c^3\gamma_0\sum_{\substack{\sigma_2=k\\ \tau_2=l}}^{m-3,n-3}\ \sum_{\substack{\sigma_1=\sigma_2+1\\ \tau_1=\tau_2+1}}^{m-2,n-2}\ \sum_{\substack{\sigma=\sigma_1+1\\ \tau=\tau_1+1}}^{m-1,n-1}\frac{1}{\mu_m}\binom{m}{\sigma+1}\Delta^{m-(\sigma+1)}\mu_{\sigma+1}\binom{\sigma}{\sigma_1+1}\Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)}\mu_{\sigma_1+1}\cdot \\
&\cdot\binom{\sigma_1}{\sigma_2+1}\Delta^{\sigma_1-(\sigma_2+1)}\mu_{\sigma_2+1}\binom{\sigma_2}{k}\Delta^{\sigma_2-k}\mu_k\,\frac{1}{\nu_n}\binom{n}{\tau+1}\Delta^{n-(\tau+1)}\nu_{\tau+1}\cdot \\
&\cdot\binom{\tau}{\tau_1+1}\Delta^{\tau-(\tau_1+1)}\nu_{\tau_1+1}\binom{\tau_1}{\tau_2+1}\Delta^{\tau_1-(\tau_2+1)}\nu_{\tau_2+1}\binom{\tau_2}{l}\Delta^{\tau_2-l}\nu_l+\ldots \\
&\ldots+(-1)^{n-l}c^{n-l}\gamma_0\nu_l\nu_{l+1}\cdots\nu_{n-1}\sum_{\sigma_{n-(l+1)}=k}^{m-(n-l)}\ \sum_{\sigma_{n-(l+2)}=\sigma_{n-(l+1)}+1}^{m-(n-l)+1}\ldots \\
&\ldots\sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1}\frac{1}{\mu_m}\binom{m}{\sigma+1}\Delta^{m-(\sigma+1)}\mu_{\sigma+1}\cdot \\
&\cdot\binom{\sigma}{\sigma_1+1}\Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)}\mu_{\sigma_1+1}\cdots\binom{\sigma_{n-(l+2)}}{\sigma_{n-(l+1)}+1}\Delta^{\sigma_{n-(l+2)}-(\sigma_{n-(l+1)}+1)}\mu_{\sigma_{n-(l+1)}+1} \\
&\binom{\sigma_{n-(l+1)}}{k}\Delta^{\sigma_{n-(l+1)}-k}\mu_k\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m-(n-l)).
\end{aligned}
$$

Получив при помощи равенств (2.4), (2.7), (2.8), (2.11), (2.12) и (2.13) обратное преобразование преобразования (2.2), найдем результат обращения равенства (2.1), обозначая элементы матрицы, определяющей получаемое обратное преобразование, через b'_{mnkl}. Учитывая (2.1) и (2.3), имеем

$$
s_{pq}=\sum_{m,n=0}^{p,q} b'_{pqmn}t_{mn}=\sum_{m,n=0}^{p,q}\left(\sum_{k,l=m,n}^{p,q} h'_{pqkl}\,\frac{\gamma_{klmn}}{\sum\limits_{m,n=0}^{k,l}\gamma_{klmn}}\right)t_{mn}, \qquad (2.14)
$$

для которого величины b'_{pqmn} легко вычислить из равенства (2.1), если учесть формулы (2.4), (2.7), (2.8), (2.11), (2.12) и (2.13). Именно:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&b'_{mnmn}=\frac{1}{\lambda},\\
&b'_{mnml}=0\quad (l=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1),\\
&b'_{mnkn}=0\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1),\\
&b'_{mnm-1,n-1}=-c\,\mu_{m-1,}\nu_{n-1},
\end{aligned}
\right.
$$

$$\left\{\begin{aligned} & b'_{mnk,\,n-1} = -c\,\nu_{n-1}\binom{m-1}{k}\Delta^{m-1-k}\mu_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ m-2), \\ & b'_{mn,\,m-1,\,l} = -c\,\mu_{m-1}\binom{n-1}{l}\Delta^{n-1-l}\nu_l \quad (l=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-2), \\ & b'_{mnkl} = -\frac{c}{\gamma_0}\mu_{m-1}\nu_{n-1}\gamma_{m-1,\,n-1,\,kl} (l=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-(m-k); \\ & \qquad\qquad k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ m-2), \\ & b'_{mnkl} = -\frac{c}{\gamma_0}\mu_{m-1}\nu_{n-1}\gamma_{m-1,\,n-1,\,kl} \ (k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ m-(n-l); \\ & \qquad\qquad l=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-2), \end{aligned}\right. \tag{2.15}$$

где $\gamma_{m-1,\,n-1,\,kl}$ определены формулами (2.7), (2.11), (2.12) и (2.13).

Мы видим, что 1) b'_{mnkl} — полиномы относительно параметра c и 2) перед четными степенями параметра c стоит знак $+$, перед нечетными знак $-$.

Зависимость элементов b'_{mnkl} и величин γ_{mnkl} от параметра c обозначим через $b'_{mnkl} = b'_{mnkl}(c)$ и $\gamma_{mnkl} = \gamma_{mnkl}(c)$.

Покажем теперь, что последовательность $\{t_{mn}\}$ из (2.1) может сходиться только тогда, когда сходится $\{s_{mn}\}$. Для этого убедимся, что условие (7) теоремы 2.2 из [2] не выполняется, т. е. что

$$\sup_{m,n} \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} |b'_{mnkl}| \neq \infty. \tag{2.16}$$

Рассмотрим здесь два случая.

1) Пусть $c<0$, т. е. $\lambda>1$. По формулам (2.15) и замечаниям, сделанным относительно этих формул, ясно, что в этом случае $b'_{mnkl}>0$. Из (2.14) теперь следует, что

$$\sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} |b'_{pqmn}| = \sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} b'_{pqmn} = \sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} \sum_{k,\,l=m,\,n}^{p,\,q} h'_{pqkl} \frac{\gamma_{klmn}}{\sum\limits_{m,\,n=0}^{k,\,l}\gamma_{klmn}} =$$

$$= \sum_{k,\,l=0}^{p,\,q} h'_{pqkl} \sum_{m,\,n=0}^{k,\,l} \frac{\gamma_{klmn}}{\sum\limits_{m,\,n=0}^{k,\,l}\gamma_{klmn}} = \sum_{k,l=0}^{p,\,q} h'_{pqkl} = 1,$$

ибо $\sum\limits_{k,l=0}^{p,\,q} h_{pqkl} = 1$ по условиям нашей теоремы. Но это и приводит к (2.16).

2) Пусть $c>0$, т. е. $0<\lambda<1$. В этом случае

$$|b'_{mnkl}(c)| \leqslant b'_{mnkl}(-c),$$

что вытекает из (2.15), и мы получаем

$$\sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} |b'_{pqmn}(c)| \leqslant \sum_{m,\,n=0}^{p,q} b'_{pqmn}(-c) = \sum_{m,\,n=0}^{p,q} \sum_{k,l=m,n}^{p,q} h'_{pqkl} \frac{\gamma_{klmn}(-c)}{\sum\limits_{m,\,n=0}^{k,\,l}\gamma_{klmn}(-c)} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{p,q} h'_{pqkl} \sum_{m,n=0}^{k,l} \frac{\gamma_{klmn}(-c)}{\sum\limits_{m,\,n=0}^{k,l}\gamma_{klmn}(-c)} = 1.$$

Это также приводит к (2.16). Следовательно, последовательность $\{t_{mn}\} \in bc$ только тогда, когда $\{s_{mn}\} \in c$. То, что $\{s_{mn}\} \in b$, вытекает из (2.16) и леммы 1.1. Этим теорема доказана.

Так как последовательности Хаусдорфа для методов $H^{\alpha,\beta}$ и $C^{\alpha,\beta}$ при $\alpha, \beta > 0$ удовлетворяют условиям нашей теоремы* 2.1, то понятно, что имеют место две следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Если* $\lambda > 0$, $h \neq \infty$, $\alpha, \beta > 0$ *и*

$$b\text{-}\lim_{m,n} (\lambda s_{mn} + (1-\lambda) C^{\alpha,\beta}_{m-1,\,n-1}) = h,$$

то

$$b\text{-}\lim_{m,n} s_{mn} = h.$$

Теорема 2.3. *Если* $\lambda > 0$, $h \neq \infty$, $\alpha, \beta > 0$ *и*

$$b\text{-}\lim_{m,n} (\lambda s_{mn} + (1-\lambda) H^{\alpha,\beta}_{m-1,\,n-1}) = h$$

то

$$b\text{-}\lim_{m,n} s_{mn} = h.$$

Этим доказаны обобщения теоремы 1.1 из настоящей статьи и теоремы 2.1 из [3] для двойных последовательностей.

3. В этом параграфе мы покажем, что в основе теорем Мерсера для четырехчленных преобразований $M - H^{\alpha,\beta}$ и $M - C^{\alpha,\beta}$ лежат теоремы 3.1 из [3] и 1.1.

Теорема 3.1. *Если* $\alpha, \beta = 2, 3, \ldots$, $h \neq \infty$, $\lambda_1 > \lambda_\alpha$, $\lambda_2 > \lambda_\beta$, *где* λ_α и λ_β *определены в теореме* 1.1 *и*

$$b\text{-}\lim_{m,n} (\lambda_1 \lambda_2 s_{mn} + (1-\lambda_1)\lambda_2 C^{\alpha,0}_{mn} + (1-\lambda_2)\lambda_1 C^{0,\beta}_{mn} + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) C^{\alpha,\beta}_{mn}) = h,$$

то

$$b\text{-}\lim_{m,n} s_{mn} = h.$$

Доказательство. Покажем, что преобразование t_{mn} последовательности $\{s_{mn}\}$, где

$$t_{mn} = \lambda_1 \lambda_2 s_{mn} + (1-\lambda_1)\lambda_2 C^{\alpha,0}_{mn} + \lambda_1(1-\lambda_2) C^{0,\beta}_{mn} + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) C^{\alpha,\beta}_{mn}, \tag{3.1}$$

является (H, μ_{mn})-преобразобанием, которое определено нижеследующей матрицей Хаусдорфа:

$$(H, \mu_{mn}) = (H, \mu_m) \odot (H, \nu_n), \tag{3.2}$$

где

$$\begin{cases} \mu_m = \lambda_1 + \dfrac{1-\lambda_1}{\binom{m+\alpha}{\alpha}} \\ \nu_n = \lambda_2 + \dfrac{1-\lambda_2}{\binom{n+\beta}{\beta}}. \end{cases}$$

---

* См. конец § 2 из [3].

Для этого вычислим произведение (3.2)

$$\left(H, \lambda_1 + \frac{1-\lambda_1}{\binom{m+\alpha}{\alpha}}\right) \odot \left(H, \lambda_2 + \frac{1-\lambda_2}{\binom{n+\beta}{\beta}}\right) =$$

$$= \left(\binom{m}{k} \Delta^{m-k}\left(\lambda_1 + \frac{1-\lambda_1}{\binom{k+\alpha}{\alpha}}\right)\right) \odot \left(\binom{n}{l} \Delta^{n-l}\left(\lambda_2 + \frac{1-\lambda_2}{\binom{l+\beta}{\beta}}\right)\right) =$$

$$= (\lambda_1 E^{1,0} + (1-\lambda_1) C^{\alpha,0}) \odot (\lambda_2 E^{0,1} + (1-\lambda_2) C^{0,\beta}) =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 E + (1-\lambda_1)\lambda_2 C^{\alpha,0} + \lambda_1(1-\lambda_2) C^{0,\beta} + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) C^{\alpha,\beta},$$

где $E^{1,0}$ и $E^{0,1}$ — матрицы тождественного преобразования простых последовательностей.

Поэтому преобразование (3.1) перепишем в виде

$$t_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} \Delta^{m-k,\,n-l}\left(\lambda_1 + \frac{1-\lambda_1}{\binom{k+\alpha}{\alpha}}\right)\left(\lambda_2 + \frac{1-\lambda_2}{\binom{l+\beta}{\beta}}\right) s_{kl} \tag{3.3}$$

и отметим, что матрица, обратная матрице (3.2), имеет вид $\left(H, \frac{1}{\mu_m}\right) \odot \left(H, \frac{1}{\nu_n}\right)$, как это следует из теоремы 1.3.

Нужно показать, что метод (3.2) не может суммировать расходящиеся последовательности, т. е., что из ограниченной сходимости последовательности (3.3) вытекает сходимость $\{s_{mn}\}$. С этой целью произведем следующую оценку:

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} \left| \Delta^{m-k,\,n-l} \frac{1}{\lambda_1 + \frac{1-\lambda_1}{\binom{k+\alpha}{\alpha}}} \cdot \frac{1}{\lambda_2 + \frac{1-\lambda_2}{\binom{l+\beta}{\beta}}} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left| \Delta^{m-k} \frac{1}{\lambda_1 + \frac{1-\lambda_1}{\binom{k+\alpha}{\alpha}}} \right| \cdot \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \left| \Delta^{n-l} \frac{1}{\lambda_2 + \frac{1-\lambda_2}{\binom{l+\beta}{\beta}}} \right| \leqslant K_1 \cdot K_2, \tag{3.4}$$

$$(m, n = 0, 1, 2 \ldots)$$

что вытекает из леммы 1.3.

Ввиду условия (3.4), заключаем по теоремам (2.2) из [2] и 1.2, что $\{s_{mn}\} \in c$. То, что $\{s_{mn}\} \in b$, вытекает из (3.4) и леммы 1.1. Равенство $b\text{-}\lim\limits_{m,n} t_{mn} = b\text{-}\lim\limits_{m,n} s_{mn}$ теперь очевидно.

Теорема доказана.

Аналогично можно доказать нижеследующие три теоремы, применяя при этом вместо леммы 1.3, соответственно, леммы 1.2, 1.4 и одновременно 1.2 и 1.4.

Теорема 3.2. *Если* $h \neq \infty$, $\alpha, \beta = 2, 3, \ldots$, *а* $\lambda_1 > \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos^\alpha \frac{\pi}{\alpha}}}$, $\lambda_2 > \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos^\beta \frac{\pi}{\beta}}}$ *и*

$$b\text{-}\lim_{m,n} (\lambda_1\lambda_2 s_{mn} + (1-\lambda_1)\lambda_2 H^{\alpha,0}_{mn} + \lambda_1(1-\lambda_2) H^{0,\beta}_{mn} + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) H^{\alpha,\beta}_{mn}) = h,$$

то

$$b\text{-}\lim_{m,n} s_{mn} = h.$$

Теорема 3.3. *Если* $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $h \neq \infty$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ *и*

$$b\text{-}\lim_{m,n} (\lambda_1\lambda_2 s_{mn} + (1-\lambda_1)\lambda_2 H^{\alpha,0}_{mn} + \lambda_1(1-\lambda_2) H^{0,\beta}_{mn} + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) H^{\alpha,\beta}_{mn}) = h,$$

то

$$b\text{-}\lim_{m,n} s_{mn} = h.$$

Теорема 3.4. *Если* $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^\beta \frac{\pi}{\beta}}}$, $h \neq \infty$, $0 < \alpha < 1$, $\beta = 2, 3, \ldots$ *и*

$$b\text{-}\lim_{m,n} (\lambda_1\lambda_2 s_{mn} + (1-\lambda_1)\lambda_2 H^{\alpha,0}_{mn} + (1-\lambda_2)\lambda_1 H^{0,\beta}_{mn} + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) H^{\alpha,\beta}_{mn}) = h,$$

то

$$b\text{-}\lim_{m,n} s_{mn} = h.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Польняковский, О некоторых теоремах типа Мерсера. Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 5, 239—242.
2. Т. Сырмус, Об одном обобщении теоремы Мерсера для двойных последовательностей. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 102, 1961, 156—168.
3. Т. Сырмус, О некоторых обобщениях теоремы Мерсера. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 102, 1961, 169—184.
4. Г. Харди, Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1949.
5. C. R. Adams, Transformations of double sequences with applications to Cesàro summability of double series. Bull Amer. Math· Soc., 37, No. 10, 1931, 741—748.
6. C. R. Adams, On summability of double series. Trans. Amer. Math. Soc., **34**, No. 2, 1932, 215—230.
7. C. R. Adams, Hausdorff transformations for double sequences. Bull. Amer. Math. Soc., **39**, 1933, 303—312.
8. R. P. Agnew, On summability of double sequences. Amer. J. Math., **54**, 1932, 648—656.
9. T. J. Bromwich, G. H. Hardy, Some extensions to multiple series of Abel's theorem on the continuity of power series. Proc. London Math· Soc., **2**, No. 2, 1904, 161—189.
10. H. J. Hamilton, Transformations of multiple sequences. Duke Math. J., **2**, No. 1, 1936, 29—60.
11. J. G. Kull, Kahekordsete summeeruvate ridade korrutamine, Диссертация, Тартуск. гос. ун-т; см. также Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **62**, 1958, 3—59.
12. J. Mercer, On the limit of real variants. Proc. London Math. Soc., (2), 1907, 5, 206—224.
13. Ch. N. Moore, Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et sur la série double de Fourier. C. r. Acad. sci. **155**, 1912, 126—129.
14. M. S. Ramanujan, On Hausdorff transformations for double sequences. Proc. Indian Acad. Sci. No. 3, 1955, 42.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
5. V 1961

MÕNINGATEST MERCERI TEOREEMI ÜLDISTUSTEST KAHEKORDSETE JADADE JAOKS

T. Sõrmus

Töö olulisemaks tulemuseks on tuntud Merceri [12] teoreemi järgmine üldistus:

Kui $\lambda>0$, $h\neq\infty$ *ja Hausdorffi jadad* $\{\mu_k\}$ *ja* $\{\nu_l\}$ *on totaalselt monotoonsed ning rahuldavad tingimusi* $\lim\limits_m \Delta^m \mu_0=\lim\limits_n \Delta^n \nu_0=0$ *ja* $\nu_0\mu_0=1$, *siis võrdusest*

$$b\text{-}\lim_{m,n} \left(\lambda s_{mn}+(1-\lambda)\sum_{k,l=0}^{m-1,n-1}\binom{m-1}{k}\binom{n-1}{l}\Delta^{m-1-k,n-1-l}\mu_k\nu_l s_{kl}\right)=h$$

järeldub, et $b\text{-}\lim\limits_{m,n} s_{mn}=h$.

See teoreem on töös [3] tõestatud teoreemi 2.1 analoog kahekordsetele jadadele ning temast saadakse erijuhuna Merceri teoreemi üldistused menetluste $C^{\alpha,\beta}$ ja $H^{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$ jaoks (teoreemid 2.2 ja 2.3).

Ramanujan [14] on tõestanud Merceri teoreemi üldistuste kahekordsete jadade jaoks:

Kui $\lambda_1>0$ *ja* $\lambda_2>0$, *siis võrdusest*

$$b\text{-}\lim_{m,n}\left(\lambda_1\lambda_2 s_{mn}+\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{n+1}\sum_{l=0}^{n}s_{ml}+\frac{(1-\lambda_1)\lambda_2}{m+1}\sum_{k=0}^{m}s_{kn}+\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{(m+1)(n+1)}\sum_{k,l=0}^{m,n}s_{kl}\right)=h$$

järeldub, et $b\text{-}\lim\limits_{m,n} s_{mn}=h$.

Nagu töös näidatakse, osutub Ramanujani teoreem erijuhuks üldisematest teoreemidest, mis käsitlevad menetlusi $C^{\alpha,\beta}$ ja $H^{\alpha,\beta}$ teatud eeldustel α,β ja λ_1, λ_2 kohta (teoreemid 3.1, 3.2, 3.3 ja 3.4).

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
5. V 1961

ÜBER EINIGE VERALLGEMEINERUNGEN DES SATZES VON MERCER FÜR DOPPELFOLGEN

T. Sõrmus

Zusammenfassung

Im Artikel wird der bekannte Satz von Mercer [12] für den Fall der Doppelfolgen verallgemeinert:

$\{\mu_k\}$ *und* $\{\nu_l\}$ *sei total-monotone Folgen mit den Eigenschaften* $\mu_0\nu_0=1$ *und* $\lim\limits_m \Delta^m\mu_0=\lim\limits_n \Delta^n\nu_0=0$; *es sei* $\lambda>0$ *und* $h\neq\infty$. *Dann folgt aus der Existenz von*

$$b\text{-}\lim_{m,n}\left(\lambda s_{mn}+(1-\lambda)\sum_{k,l=0}^{m-1,n-1}\binom{m-1}{k}\binom{n-1}{l}\Delta^{m-1-k,n-1-l}\mu_k\nu_l s_{kl}\right)=h$$

auch die Existenz von $b\text{-}\lim\limits_{m,n} s_{mn}$ *und die Gleichheit beider Grenzwerte.*

Damit ist der Mercersche Satz auch für $H^{\alpha,\beta}$-Verfahren und $C^{\alpha,\beta}$-Verfahren bewiesen.

Ramanujan [14] hat für den Fall der Doppelfolgen eine andere Verallgemeinerung des Mercerschen Satzes bewiesen:

Es sei $\lambda_1>0$ *und* $\lambda_2>0$. *Dann folgt aus der Existenz von*

$$b\text{-}\lim_{m,n}\left(\lambda_1\lambda_2 s_{mn}+\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{n+1}\sum_{l=0}^{n}s_{ml}+\frac{(1-\lambda_1)\lambda_2}{m+1}\sum_{k=0}^{m}s_{kn}+\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{(m+1)(n+1)}\sum_{k,l=0}^{m,n}s_{kl}\right)=h$$

auch die Existenz von $b\text{-}\lim\limits_{m,n} s_{mn}$ *und die Gleichheit beider Grenzwerte.*

Es wird noch gezeigt, dass der Ramanujansche Satz bei speziellen Voraussetzungen über α, β, λ_1 und λ_2 für $H^{\alpha,\beta}$-Verfahren und $C^{\alpha,\beta}$-Verfahren noch in Geltung bleibt (die Sätze 3.1, 3.2, 3.3 und 3.4).

Staatsuniversität zu Tartu

Eingegangen
am 5. Mai 1961