

## О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА ЧЕЗАРО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА

С. БАРОН,

кандидат физико-математических наук

Т. ТАММАЙ

В настоящей заметке\* изучается вопрос о множителях суммируемости как простых, так и двойных рядов, когда ряды  $\sum \varepsilon_n u_n$  и  $\sum_{m,n} \varepsilon_{mn} u_{mn}$  предполагаются суммируемыми или абсолютно суммируемыми методом Чезаро отрицательного порядка. Ввиду того, что метод Чезаро отрицательного порядка (для простых рядов и ограниченных двойных рядов) слабее даже метода сходимости, условия приводимых ниже теорем проще соответствующих теорем для положительного порядка суммирования.

### § 1. Простые ряды

**Теорема 1.** Если  $\alpha \geq 0$ ,  $-1 < \beta < 0$ , то для того, чтобы числа  $\varepsilon_n$  были множителями суммируемости типа  $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$  или  $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$ , необходимо и достаточно условие

$$\varepsilon_n = O[(n+1)^{\beta-\alpha}].$$

**Теорема 2.** Если  $\alpha \geq 0$ ,  $-1 < \beta < 0$ , то для того, чтобы числа  $\varepsilon_n$  были множителями суммируемости типа  $(C^\alpha, |C^\beta|)$  или  $(C^\alpha_0, |C^\beta|)$ , необходимо и достаточно условие

$$\sum (n+1)^{\alpha-\beta} |\varepsilon_n| < \infty.$$

Доказательство теоремы 1. Необходимость условия теоремы вытекает непосредственно из условия (2) статьи [1]. Доказательство его достаточности покрывается случаем 1 доказательства теоремы 1 статьи [1] (стр. 51), ибо в нашем случае  $i + \beta - \alpha - 1 < -1$  для  $i = 0, \dots, a$ .

Доказательство теоремы 2. Необходимость условия теоремы легко вывести непосредственно из условия (24) статьи [1]. Доказательство его достаточности исчерпывается случаем 1 доказательства теоремы 4 статьи [1] (стр. 62), ибо в данном случае  $i + \beta - \alpha - 2 < -1$  при  $i = 0, \dots, a+1$ .

\* Поскольку настоящая заметка тесно примыкает к статьям [1-3], в ней сохраняются определения и обозначения, использованные в них, а также, в целях краткости изложения, приводятся ссылки на доказательства, имеющиеся в названных статьях.

## § 2. Двойные ряды

Теорема 3. Если  $\alpha, \beta \geq 0$ , то для того, чтобы числа  $\varepsilon_{mn}$  были множителями суммируемости типов а)  $(C_l^{\alpha, \beta}, C_l^{\gamma, \delta})$ , б)  $(C_l^{\alpha, \beta}, C_b^{\gamma, \delta})$ , в)  $(C_l^{\alpha, \beta}, C_r^{\gamma, \delta})$ , г)  $(C_r^{\alpha, \beta}, C_l^{\gamma, \delta})$ , необходимы и достаточны

1) в случае  $-1 < \gamma, \delta < 0$  условие

$$\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha} (n+1)^{\delta-\beta}]; \quad (D)$$

2) в случае  $\gamma \geq 0, -1 < \delta < 0$  условие

$$\Delta_m^\alpha \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha} (n+1)^{\delta-\beta}]$$

и при  $\gamma < \alpha$  условие (D), при  $\gamma \geq \alpha$  условие

$$\varepsilon_{mn} = O[(n+1)^{\delta-\beta}];$$

3) в случае  $-1 < \gamma < 0, \delta \geq 0$  условие

$$\Delta_n^\beta \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha} (n+1)^{-\beta}]$$

и при  $\delta < \beta$  условие (D), при  $\delta \geq \beta$  условие

$$\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}].$$

Теорема 4. Если  $\alpha, \beta \geq 0$ , то для того, чтобы числа  $\varepsilon_{mn}$  были множителями суммируемости типов а)  $(C_0^{\alpha, \beta}, C_l^{\gamma, \delta})$ , б)  $(C_b^{\alpha, \beta}, C_l^{\gamma, \delta})$ , в)  $(C_r^{\alpha, \beta}, C_l^{\gamma, \delta})$ , необходимы и достаточны

1) в случае  $-1 < \gamma, \delta < 0$  условие

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} (n+1)^{\beta-\delta} |\varepsilon_{mn}| < \infty; \quad (M)$$

2) в случае  $\gamma \geq 0, -1 < \delta < 0$  условие

$$\sum_{m,n} (m+1)^\alpha (n+1)^{\beta-\delta} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}| < \infty$$

и при  $\gamma < \alpha+1$  условие (M), при  $\gamma \geq \alpha+1$  условие

$$\sum_{m,n} (m+1)^{-1} (n+1)^{\beta-\delta} |\varepsilon_{mn}| < \infty;$$

3) в случае  $-1 < \gamma < 0, \delta \geq 0$  условие

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} (n+1)^\beta |\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}| < \infty$$

и при  $\delta < \beta+1$  условие (M), при  $\delta \geq \beta+1$  условие

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} (n+1)^{-1} |\varepsilon_{mn}| < \infty.$$

Доказательство теоремы 3. Необходимость условий теоремы вытекает из доказательства леммы 4 статьи [2]. Достаточность в случае 1) доказывается точно так же, как оценка первого слагаемого схемы (19) статьи [2], а, например, в случае 2) — как оценки первого, второго и пятого слагаемых схемы (19) статьи [2], ибо в данном случае эта схема заменяется следующей:

$$\sum_{i,j=0}^{a,b} B_2^j B_1^i = \left( \sum_{i,j=0}^{P,b} + \sum_{i,j=a-c+1,0}^{a,b} \right) B_2^j B_1^i + \sum_{j=0}^b B_2^j B_1^{a-c}.$$

Доказательство теоремы 4. Необходимость условий теоремы следует из доказательства леммы 2 статьи [3]. Достаточность в случае 1) доказывается точно так же, как оценка первого слагаемого схемы (20) статьи [3], а, например, в случае 2) — как оценки первого, второго и пятого слагаемых схемы (20) статьи [3], ибо в последнем случае эта схема заменяется следующей:

$$\sum_{i,j=0}^{a+1,b+1} B_2^j B_1^i = \left( \sum_{i,j=0}^{P+1,b+1} + \sum_{i,j=a-c+2,0}^{a+1,b+1} \right) B_2^j B_1^i + \sum_{j=0}^{b+1} B_2^j B_1^{a-c+1}.$$

Замечание. Положив в часть 1) теоремы 3  $\alpha = \beta = 0$  и  $\varepsilon_{mn} = (A_m^\sigma A_n^\tau)^{-1}$  получаем следующую теорему Жака-Тимана ([4], стр. 37):

Если ряд  $\sum_{m,n} u_{mn}$  абсолютно сходится, то ряд  $\sum_{m,n} (A_m^\sigma A_n^\tau)^{-1} u_{mn}$  суммируем методом  $C_1^{-\sigma, -\tau}$ ,  $0 < \sigma, \tau < 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Барон, Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости, Изв. АН Эст. ССР, Сер. физ.-мат. и техн. наук, т. IX, № 1, 1960, 47—68.
2. С. Барон, Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 102, 1961, 118—134.
3. С. Барон, Множители абсолютной суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 102, 1961, 135—155.
4. И. Е. Жак, М. Ф. Тиман, О суммировании двойных рядов, Матем. сб., 35 (77), 1954, 21—56.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию  
5. X 1960

#### SUMMEERUVUSTEGURITEST NEGATIIVSET JÄRKU CESARO MENETLUSE JAOKS

S. Baron,

füüsikalis-matemaatiliste teaduste kandidaat

T. Tammai

Resümee

Vaadeldakse nii harilike kui ka kahekordsete ridade korral mitmesuguseid summeeruvustegurite tüüpe Cesaro menetluse jaoks juhul, kus nõutakse ridade  $\sum \varepsilon_n u_n$  ja  $\sum \varepsilon_{mn} u_{mn}$  negatiivset järku summeeruvust või absoluutset summeeruvust; ridade  $\sum u_n$  ja  $\sum u_{mn}$  kohta käsitletakse mittenegatiivset järku Cesaro menetlusega tõkestatust, summeeruvust või absoluutset summeeruvust. Saadud teoreemide tõestused põhinevad vastavatel tõestustel eelmistest artiklitest. Teoreemist 3 tuleneb erijuhuna Zak-Timani tuntud lause [4].

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse  
5. X 1960

---

**ÜBER SUMMIERBARKEITSAKTOREN BEI CESAROVERFAHREN  
NEGATIVER ORDNUNG**

S. Baron

T. Tammai

*Zusammenfassung*

Es werden einige Typen von Summierbarkeitsfaktoren für gewöhnliche Reihen und für Doppelreihen behandelt. Untersucht wird der Fall, dass die Reihen  $\Sigma e_n u_n$  und  $\Sigma e_{mn} u_{mn}$  negativer Ordnung Cesàro-summierbar oder absolut summierbar sind, die Reihen  $\Sigma u_n$  und  $\Sigma u_{mn}$  jedoch nichtnegativer Ordnung Cesàro-beschränkt, Cesàro-summierbar oder absolut summierbar sind. Die Beweise der Sätze beruhen auf entsprechenden Beweisen aus den Arbeiten [1-3]. Aus Theorem 3 folgert sich als Sonderfall ein bekannter Satz von Zak-Timan [4].

*Staatsuniversität zu Tartu*Eingegangen  
am 5. Okt. 1960