EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 1

О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА ЧЕЗАРО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА

С. БАРОН,
кандидат физико-математических наук

Т. ТАММАЙ

В настоящей заметке* изучается вопрос о множителях суммируемости как простых, так и двойных рядов, когда ряды $\sum \varepsilon_n u_n$ и $\sum\limits_{m,n} \varepsilon_{mn} u_{mn}$ предполагаются суммируемыми или абсолютно суммируемыми методом Чезаро отрицательного порядка. Ввиду того, что метод Чезаро отрицательного порядка (для простых рядов и ограниченных двойных рядов) слабее даже метода сходимости, условия приводимых ниже теорем проще соответствующих теорем для положительного порядка суммирования.

§ 1. Простые ряды

Теорема 1. *Если* $\alpha \geqslant 0$, $-1 < \beta < 0$, *то для того, чтобы числа* ε_n *были множителями суммируемости типа* $(|C^\alpha|, C^\beta)$ *или* $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$, *необходимо и достаточно условие*

$$\varepsilon_n = O[(n+1)^{\beta-\alpha}].$$

Теорема 2. *Если* $\alpha \geqslant 0$, $-1<\beta<0$, *то для того, чтобы числа* ε_n *были множителями суммируемости типа* $(C^\alpha, |C^\beta|)$ *или* $(C_O^\alpha, |C^\beta|)$, *необходимо и достаточно условие*

$$\sum (n+1)^{\alpha-\beta} |\varepsilon_n| < \infty.$$

Доказательство теоремы 1. Необходимость условия теоремы вытекает непосредственно из условия (2) статьи [1]. Доказательство его достаточности покрывается случаем 1 доказательства теоремы 1 статьи [1] (стр. 51), ибо в нашем случае $i+\beta-a-1<-1$ для $i=0,\ldots, a$.

Доказательство теоремы 2. Необходимость условия теоремы легко вывести непосредственно из условия (24) статьи [1]. Доказательство его достаточности исчерпывается случаем 1 доказательства теоремы 4 статьи [1] (стр. 62), ибо в данном случае $i+\beta-a-2<-1$ при $i=0,\ldots, a+1$.

* Поскольку настоящая заметка тесно примыкает к статьям [1-3], в ней сохраняются определения и обозначения, использованные в них, а также, в целях краткости изложения, приводятся ссылки на доказательства, имеющиеся в названных статьях.

§ 2. Двойные ряды

Теорема 3. *Если* $\alpha, \beta \geqslant 0$, *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_l^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, б) $(C_l^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(C_l^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$, г) $(C_l^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны*

1) *в случае* $-1 < \gamma, \delta < 0$ *условие*

$$\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{\delta-\beta}]; \tag{D}$$

2) *в случае* $\gamma \geqslant 0$, $-1 < \delta < 0$ *условие*

$$\Delta_m^{\alpha}\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha}(n+1)^{\delta-\beta}]$$

и при $\gamma < \alpha$ *условие* (D), *при* $\gamma \geqslant \alpha$ *условие*

$$\varepsilon_{mn} = O[(n+1)^{\delta-\beta}];$$

3) *в случае* $-1 < \gamma < 0$, $\delta \geqslant 0$ *условие*

$$\Delta_n^{\beta}\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{-\beta}]$$

и при $\delta < \beta$ *условие* (D), *при* $\delta \geqslant \beta$ *условие*

$$\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}].$$

Теорема 4. *Если* $\alpha, \beta \geqslant 0$, *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_O^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, б) $(C_b^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, в) $(C_r^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны*

1) *в случае* $-1 < \gamma, \delta < 0$ *условие*

$$\sum_{m,n}(m+1)^{\alpha-\gamma}(n+1)^{\beta-\delta}|\varepsilon_{mn}| < \infty; \tag{M}$$

2) *в случае* $\gamma \geqslant 0$, $-1 < \delta < 0$ *условие*

$$\sum_{m,n}(m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta-\delta}|\Delta_m^{\alpha+1}\varepsilon_{mn}| < \infty$$

и при $\gamma < \alpha+1$ *условие* (M), *при* $\gamma \geqslant \alpha+1$ *условие*

$$\sum_{m,n}(m+1)^{-1}(n+1)^{\beta-\delta}|\varepsilon_{mn}| < \infty;$$

3) *в случае* $-1 < \gamma < 0$, $\delta \geqslant 0$ *условие*

$$\sum_{m,n}(m+1)^{\alpha-\gamma}(n+1)^{\beta}|\Delta_n^{\beta+1}\varepsilon_{mn}| < \infty$$

и при $\delta < \beta+1$ *условие* (M), *при* $\delta \geqslant \beta+1$ *условие*

$$\sum_{m,n}(m+1)^{\alpha-\gamma}(n+1)^{-1}|\varepsilon_{mn}| < \infty.$$

Доказательсто теоремы 3. Необходимость условий теоремы вытекает из доказательства леммы 4 статьи [2]. Достаточность в случае 1) доказывается точно так же, как оценка первого слагаемого схемы (19) статьи [2], а, например, в случае 2) — как оценки первого, второго и пятого слагаемых схемы (19) статьи [2], ибо в данном случае эта схема заменяется следующей:

$$\sum_{i,j=0}^{a,b} B_2^j B_1^i = \left(\sum_{i,j=0}^{P,b} + \sum_{i,j=a-c+1,0}^{a,b} \right) B_2^j B_1^i + \sum_{j=0}^{b} B_2^j B_1^{a-c}.$$

Доказательство теоремы 4. Необходимость условий теоремы следует из доказательства леммы 2 статьи [3]. Достаточность в случае 1) доказывается точно так же, как оценка первого слагаемого схемы (20) статьи [3], а, например, в случае 2) — как оценки первого, второго и пятого слагаемых схемы (20) статьи [3], ибо в последнем случае эта схема заменяется следующей:

$$\sum_{i,j=0}^{a+1,b+1} B_2'^j B_1'^i = \left(\sum_{i,j=0}^{P+1,b+1} + \sum_{i,j=a-c+2,0}^{a+1,b+1} \right) B_2'^j B_1'^i + \sum_{j=0}^{b+1} B_2'^j B_1'^{a-c+1}.$$

Замечание. Положив в часть 1) теоремы 3 $\alpha=\beta=0$ и $\varepsilon_{mn} = (A_m^\sigma A_n^\tau)^{-1}$ получаем следующую теорему Жака-Тимана ([4], стр. 37):

Если ряд $\sum\limits_{m,n} u_{mn}$ *абсолютно сходится, то ряд* $\sum\limits_{m,n} (A_m^\sigma A_n^\tau)^{-1} u_{mn}$ *суммируем методом* $C_l^{-\sigma,-\tau}$, $0 < \sigma,\tau < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Барон, Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости, Изв. АН Эст. ССР, Сер. физ.-мат. и техн. наук, т. IX, № 1, 1960, 47—68.
2. С. Барон, Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро, Уч. зап. Тартуск. ун-та, **102**, 1961, 118—134.
3. С. Барон, Множители абсолютной суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов, Уч. зап. Тартуск. ун-та, **102**, 1961, 135—155.
4. И. Е. Жак, М. Ф. Тиман, О суммировании двойных рядов, Матем. сб., **35** (77), 1954, 21—56.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
5. X 1960

SUMMEERUVUSTEGURITEST NEGATIIVSET JÄRKU CESÀRO MENETLUSE JAOKS

S. Baron,
füüsikalis-matemaatiliste teaduste kandidaat

T. Tammai

Resümee

Vaadeldakse nii harilike kui ka kahekordsete ridade korral mitmesuguseid summeeruvustegurite tüüpe Cesàro menetluse jaoks juhul, kus nõutakse ridade $\Sigma\varepsilon_n u_n$ ja $\Sigma\varepsilon_{mn} u_{mn}$ negatiivset järku summeeruvust või absoluutset summeeruvust; ridade Σu_n ja Σu_{mn} kohta käsitletakse mittenegatiivset järku Cesàro menetlusega tõkestatust, summeeruvust või absoluutset summeeruvust. Saadud teoreemide tõestused põhinevad vastavatel tõestustel eelmistest artiklitest. Teoreemist 3 tuleneb erijuhuna Žak-Timani tuntud lause [4].

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
5. X 1960

ÜBER SUMMIERBARKEITSFAKTOREN BEI CESÀROVERFAHREN NEGATIVER ORDNUNG

S. Baron

T. Tammai

Zusammenfassung

Es werden einige Typen von Summierbarkeitsfaktoren für gewöhnliche Reihen und für Doppelreihen behandelt. Untersucht wird der Fall, dass die Reihen $\Sigma\varepsilon_n u_n$ und $\Sigma\varepsilon_{mn}u_{mn}$ negativer Ordnung Cesàro-summierbar oder absolut summierbar sind, die Reihen Σu_n und Σu_{mn} jedoch nichtnegativer Ordnung Cesàro-beschränkt, Cesàro-summierbar oder absolut summierbar sind. Die Beweise der Sätze beruhen auf entsprechenden Beweisen aus den Arbeiten [1—3]. Aus Theorem 3 folgert sich als Sonderfall ein bekannter Satz von Žak-Timan [4].

Staatsuniversität zu Tartu

Eingegangen
am 5. Okt. 1960