EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KOIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1962.1.04

О КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

И. ПЕТЕРСЕН,

кандидат физико-математических наук

1. Пусть функция $f(x)$ определена и конечна на отрезке $[a, b]$ и $x_i = a + ih$ $\left(i = 0, 1, \ldots, n,\ h = \frac{b-a}{n}\right)$ — система равноотстоящих узлов этого отрезка. В статье рассматривается вопрос об интерполировании $f(x)$ функциями, два раза непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$, которые на подинтервалах $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ являются алгебраическими полиномами третьей степени. Первое и второе производные этих функций будут в узлах x_i выражены через значения функции $f(x)$. Эти выражения можно применять вместо формул численного дифференцирования для случаев, в которых надо пользоваться большим количеством значений функции, причем производных необходимого порядка той же функции не существует. На основании этого способа интерполяции построен приближенный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и установлены условия сходимости метода. Раньше такое интерполирование было использовано Д. Голладеем [1] для вывода квадратурной формулы.*

2. Пусть $F[f;\ x]$ два раза на $[a, b]$ непрерывно дифференцируемая функция, принимающая в узлах x_i значения $y_i = f(x_i)$, и такая, что в подинтервале $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ $F[f;\ x] = \varphi_i(x)$ является полиномом третьей степени. Обозначим $\varphi_i'(x_i) = \varphi_i'$, $\varphi_i''(x_i) = \varphi_i''$, $\varphi_i'''(x_i) = \varphi_i'''$.

Тогда в $[x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned}
\varphi_i(x) &= y_i + \varphi_i'(x - x_i) + \frac{\varphi_i''}{2}(x - x_i)^2 + \frac{\varphi_i'''}{6}(x - x_i)^3, \\
\varphi_i'(x) &= \varphi_i' + \varphi_i''(x - x_i) + \frac{\varphi_i'''}{2}(x - x_i)^2, \qquad (2.1) \\
\varphi_i''(x) &= \varphi_i'' + \varphi_i'''(x - x_i).
\end{aligned}$$

Вследствие непрерывности и непрерывной дифференцируемости функции $F[f;\ x]$ до второго порядка, из (2.1) получим

* Уже после сдачи настоящей статьи в печать автору стали известны еще три статьи, посвященные этой проблеме: I. J. Schoenberg, Quart. Appl. Math., **4**, 1946, 45—99 и 112—141; G. Birkoff, H. L. Garabedian, J. Math. Physics, **39**, 1960, 258—268.

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \varphi_i' h + \frac{\varphi_i''}{2} h^2 + \frac{\varphi_i'''}{6} h^3, \\
\varphi_{i+1}' &= \varphi_i' + \varphi_i'' h + \frac{\varphi_i'''}{2} h^2, \\
\varphi_{i+1}'' &= \varphi_i'' + \varphi_i''' h
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

и после исключения φ_i'''

$$
\begin{aligned}
\varphi_{i+1}' &= -2\varphi_i' - \frac{h}{2}\varphi_i'' + \frac{3}{h}(y_{i+1} - y_i), \\
\varphi_{i+1}'' &= -\frac{6}{h}\varphi_i' - 2\varphi_i'' + \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - y_i).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Обозначив

$$
\vec{u}_i = \begin{Vmatrix} \varphi_i' \\ \varphi_i'' \end{Vmatrix}, \qquad D = \begin{Vmatrix} -2 & -\frac{h}{2} \\ -\frac{6}{h} & -2 \end{Vmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{Vmatrix} \frac{3}{h} \\ \frac{6}{h^2} \end{Vmatrix},
$$

(2.3) принимает вид

$$
\vec{u}_{i+1} = D\vec{u}_i + (y_{i+1} - y_i)\vec{v},
$$

так что

$$
\vec{u}_i = D^i \vec{u}_0 + [(y_1 - y_0)D^{i-1} + \ldots + (y_{i-1} - y_{i-2})D + (y_i - y_{i-1})E]\vec{v}
$$

или

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_i = D^i \vec{u}_0 - y_0 D^{i-1}\vec{v} + y_1 (D - E) D^{i-2}\vec{v} + \ldots + y_{i-2}(D - E) D\vec{v} + \\
+ y_{i-1}(D - E)\vec{v} + y_i \vec{v}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Если $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$ собственные значения матрицы D, то

$$
\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{3} \tag{2.5}
$$

и

$$
D^i = (-1)^i \begin{Vmatrix} \frac{\lambda_1^i + \lambda_2^i}{2} & \frac{\lambda_1^i - \lambda_2^i}{4\sqrt{3}} h \\ \frac{\lambda_1^i - \lambda_2^i}{h}\sqrt{3} & \frac{\lambda_1^i + \lambda_2}{2} \end{Vmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
D^{i-1}\vec{v} &= (-1)^{i-1}(3 - \sqrt{3}) \begin{Vmatrix} \frac{\lambda_1^i + \lambda_2^{i-1}}{2h} \\ \frac{\lambda_1^i - \lambda_2^{i-1}}{h^2}\sqrt{3} \end{Vmatrix}, \\
(D - E) D^k \vec{v} &= (-1)^{k+1} \begin{Vmatrix} \frac{\lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1}}{h} 3 \\ \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{h^2} 6\sqrt{3} \end{Vmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Из (2.4) получается при помощи (2.6)

$$\varphi_i' = (-1)^i \Big[\frac{1}{2}(\lambda_1^i + \lambda_2^i)\varphi_0' + \frac{h}{4\sqrt{3}}(\lambda_1^i - \lambda_2^i)\varphi_0'' + \frac{3-\sqrt{3}}{2h}(\lambda_1^i + \lambda_2^{i-1})y_0 + \frac{3}{h}\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^k(\lambda_1^{i-k} + \lambda_2^{i-k})y_k + \frac{3(-1)^i}{h}y^i\Big],$$

$$\varphi_i'' = (-1)^i \Big[\frac{\sqrt{3}}{h}(\lambda_1^i - \lambda_2^i)\varphi_0' + \frac{1}{2}(\lambda_1^i + \lambda_2^i)\varphi_0'' + \frac{3\sqrt{3}-3}{h^2}(\lambda_1^i - \lambda_2^{i-1})y_0 + \frac{6\sqrt{3}}{h^2}\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^k(\lambda_1^{i-k} - \lambda_2^{i-k})y_k + \frac{6(-1)^i}{h^2}y_i\Big]. \tag{2.7}$$

Для однозначного определения φ_i', φ_i'' и тем самым $F[f;\,x]$ придется, кроме значений функции $f(x)$ в узлах, задавать еще и некоторые «краевые» или «начальные» условия, позволяющие в (2.7) определить φ_0' и φ_0''. Рассмотрим три таких условия «краевого» типа.

При $F[f;\,x] = F_{\mathrm{I}}[f;\,x]$ потребуем, чтобы

$$F_{\mathrm{I}}'[f;\,x_0] = y_0', \qquad F_{\mathrm{I}}'[f;\,x_n] = y_n', \tag{2.8}$$

при $F_{\mathrm{II}}[f;\,x]$, чтобы *

$$F_{\mathrm{II}}''[f;\,x_0] = F_{\mathrm{II}}''[f;\,x_n] = 0, \tag{2.9}$$

и $F_{\mathrm{III}}[f;\,x]$ определяем при помощи условий

$$F_{\mathrm{III}}[f;\,x_{1/2}] = y_{1/2}, \quad F_{\mathrm{III}}[f;\,x_{n-1/2}] = y_{n-1/2}. \tag{2.10}$$

Из (2.8) и первого из равенств (2.7) при $i = n$ получаем выражение для φ_0'' и устанавливаем, что $\varphi_0' = y_0'$. После подстановки их в (2.7) имеем для случая $F_{\mathrm{I}}[f;\,x]$

$$\varphi_{\mathrm{I},i}' = \frac{3(-1)^i}{h(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}\Big[(\lambda_1^{n-i} - \lambda_2^{n-i})\Big(\frac{h}{3}y_0' + y_0 + \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^k(\lambda_1^k + \lambda_2^k)y_k\Big) - (-1)^i(\lambda_1^i\lambda_2^{n-i} - \lambda_1^{n-i}\lambda_2^i)y_i - (\lambda_1^i - \lambda_2^i)\Big(\sum_{k=i+1}^{n-1}(-1)^k(\lambda_1^{n-k} + \lambda_2^{n-k})y_k + (-1)^n y_n - \frac{h}{3}(-1)^n y_n'\Big)\Big], \tag{2.11}$$

$$\varphi_{\mathrm{I},i}'' = \frac{6\sqrt{3}(-1)^{i+1}}{h^2(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}\Big[(\lambda_1^{n-i} + \lambda_2^{n-i})\Big(\frac{h}{3}y_0' + y_0 + \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^k(\lambda_1^k + \lambda_2^k)y_k\Big) + (-1)^i\Big(\frac{3+\sqrt{3}}{3}(\lambda_1^{n-1} + \lambda_2^n) + \lambda_1^i\lambda_2^{n-i} + \lambda_1^{n-i}\lambda_2^i\Big)y_i + \tag{2.12}$$

---

* Этот случай использован в [1].

$$+(\lambda_1^i+\lambda_2^i)\left(\sum_{k=i+1}^{n-1}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}+\lambda_2^{n-k})y_k+(-1)^n y_n-\frac{h}{3}(-1)^n y_n'\right)\Bigg]$$

при $i=1, 2, \ldots, n-1$ и

$$\varphi_{\mathrm{I},0}'=y_0',\qquad \varphi_{\mathrm{I},n}'=y_n', \tag{2.13}$$

$$\varphi_{\mathrm{I},0}''=\frac{-6\sqrt{3}}{h^2(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}\left[\frac{h}{3}(\lambda_1^n+\lambda_2^n)y_0'+\frac{3+\sqrt{3}}{3}(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^n)y_0+\right.$$
$$\left.+2\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}+\lambda_2^{n-k})y_k+(-1)^n y_n-\frac{h}{3}(-1)^n y_n'\right)\right], \tag{2.14}$$

$$\varphi_{\mathrm{I},n}''=\frac{6\sqrt{3}(-1)^{n+1}}{h^2(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}\left[2\left(\frac{h}{3}y_0'+y_0+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(\lambda_1^k+\lambda_2^k)y_k\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{3+\sqrt{3}}{3}(-1)^n(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^n)y_n-\frac{h}{3}(-1)^n(\lambda_1^n+\lambda_2^n)y_n'\right]. \tag{2.15}$$

Соответствующие формулы для $F_{\mathrm{II}}[f;\ x]$ принимают вид $(i=0,\ 1,\ldots,\ n)$:

$$\varphi_{\mathrm{II},i}'=\frac{3(-1)^i}{h(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}\left[(\lambda_1^{n-i}+\lambda_2^{n-i})\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y_0+\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^k(\lambda_1^k-\lambda_2^k)y_k\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^i(\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}-\lambda_1^{n-i}\lambda_2^i)y_i-(\lambda_1^i+\lambda_2^i)\left(\sum_{k=i+1}^{n-1}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}-\lambda_2^{n-k})y_k+\frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^n y_n\right)\right], \tag{2.16}$$

$$\varphi_{\mathrm{II},i}''=\frac{6\sqrt{3}(-1)^{i+1}}{h^2(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}\left[(\lambda_1^{n-i}-\lambda_2^{n-i})\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y_0+\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^k(\lambda_1^k-\lambda_2^k)y_k\right)+\right.$$
$$+(-1)^i\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}(\lambda_1^{n-i}+\lambda_2^n)-\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}-\lambda_1^{n-i}\lambda_2^i\right)y_i+ \tag{2.17}$$
$$\left.+(\lambda_1^i-\lambda_2^i)\left(\sum_{k=i+1}^{n-1}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}-\lambda_2^{n-k})y_k+\frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^n y_n\right)\right].$$

Наконец, получаем формулы для $\varphi_{\mathrm{III},i}'$ и $\varphi_{\mathrm{III},i}''$, используя формулы, аналогичные (2.7), и соотношения

$$6h\,\varphi_{\mathrm{III},1}'-h^2\varphi_{\mathrm{III},1}''=2y_0-16y_{1/2}+14y_1,$$
$$6h\,\varphi_{\mathrm{III},n-1}'+h^2\varphi_{\mathrm{III},n-1}''=-14y_{n-1}+16y_{n-1/2}-2y_n, \tag{2.18}$$

которые получаются из условий, что $y=\varphi_{\mathrm{III},0}(x)$ проходит через точки $(x_0;\ y_0)$, $(x_{1/2};\ y_{1/2})$, $(x_1;\ y_1)$ и $y=\varphi_{\mathrm{III},n}(x)$ — через точки $(x_{n-1};\ y_{n-1})$, $(x_{n-1/2};\ y_{n-1/2})$, $(x_n;\ y_n)$.

Имеем для $i=2,3,\ldots,n-2$:

$$\varphi'_{\mathrm{III},\,i}=\frac{3(-1)^i}{h(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})}\Big[-\frac{3+\sqrt{3}}{18}(\lambda_1^{n-i-1}-\lambda_2^{n-i})(y_0-8y_{1/2}+19y_1)+$$

$$+(\lambda_1^{n-i-1}-\lambda_2^{n-i})\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k(\lambda_1^k+\lambda_2^{k-1})y_k-(-1)^i(\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}-\lambda_1^{n-i}\lambda_2^i)y_i- \tag{2.19}$$

$$-(\lambda_1^{i-1}-\lambda_2^i)\sum_{k=i+1}^{n-2}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}+\lambda_2^{n-k-1})y_k+(-1)^n\frac{3+\sqrt{3}}{18}(\lambda_1^{i-1}-\lambda_2^i)(19y_{n-1}-$$

$$-8y_{n-1/2}+y_n)\Big],$$

$$\varphi''_{\mathrm{III},\,i}=\frac{6\sqrt{3}(-1)^i}{h^2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})}\Big[\frac{3+\sqrt{3}}{18}(\lambda_1^{n-i-1}+\lambda_2^{n-i})(y_0-8y_{1/2}+19y_1)+$$

$$+(\lambda_1^{n-i-1}+\lambda_2^{n-i})\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k(\lambda_1^k+\lambda_2^{k-1})y_k-(-1)^i\Big(\frac{3+\sqrt{3}}{3}(\lambda_1^{n-2}+\lambda_2^{n-1})+$$

$$+\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}+\lambda_1^{n-i}\lambda_2^i\Big)y_i-(\lambda_1^{i-1}+\lambda_2^i)\sum_{k=i+1}^{n-2}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}+\lambda_2^{n-k-1})y_k+ \tag{2.20}$$

$$+(-1)^n\frac{3+\sqrt{3}}{18}(\lambda_1^{i-1}+\lambda_2^i)(19y_n-8y_{n-1/2}+y_n)\Big]$$

и

$$\varphi'_{\mathrm{III},\,0}=\frac{3}{h(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})}\Big\{-\frac{1}{18}[(21+\sqrt{3})\lambda_1^{n-1}-(21-\sqrt{3})\lambda_2^{n-1}]y_0+$$

$$+\frac{4}{9}(3+\sqrt{3})(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^n)y_{1/2}+\frac{1}{18}[(15-19\sqrt{3})\lambda_1^{n-1}-(15+19\sqrt{3})\lambda_2^{n-1}]y_1- \tag{2.21}$$

$$-(1-\sqrt{3})\sum_{k=2}^{n-2}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}+\lambda_2^{n-k-1})y_k-(-1)^n\frac{\sqrt{3}}{9}(19y_{n-1}-8y_{n-1/2}+y_n)\Big\},$$

$$\varphi'_{\mathrm{III},\,1}=\frac{-3}{h(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})}\Big\{-\frac{3+\sqrt{3}}{18}(\lambda_1^{n-2}-\lambda_2^{n-1})(y_0-8y_{1/2})-\frac{\sqrt{3}}{18}[(1+7\sqrt{3})\lambda_1^{n-2}+$$

$$+(1-7\sqrt{3})\lambda_2^{n-2}]y_1+(1-\sqrt{3})\sum_{k=2}^{n-2}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}+\lambda_2^{n-k-1})y_k+ \tag{2.22}$$

$$+(-1)^n\frac{\sqrt{3}}{9}(19y_{n-1}-8y_{n-1/2}+y_n)\Big\},$$

$$\varphi''_{\mathrm{III},\,0}=\frac{6\sqrt{3}}{h^2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})}\Big\{\frac{1}{18}[(3+7\sqrt{3})\lambda_1^{n-1}+(3-7\sqrt{3})\lambda_2^{n-1}]y_0-$$

$$-\frac{4}{3}(3+\sqrt{3})(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^n)y_{1/2}+\frac{1}{18}[(57-17\sqrt{3})\lambda_1^{n-1}+(57+17\sqrt{3})\lambda_2^{n-1}[y_1- \tag{2.23}$$

$$-(3-\sqrt{3})\sum_{k=2}^{n-2}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}+\lambda_2^{n-k-1})y_k+(-1)^n\frac{1}{3}(19y_{n-1}-8y_{n-1/2}+y_n)\Big\},$$

$$\varphi''_{\mathrm{III},1}=\frac{-6\sqrt{3}}{h^2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})}\left\{\frac{3+\sqrt{3}}{18}(\lambda_1^{n-2}+\lambda_2^{n-1})(y_0-8y_{1/2})+\right.$$
$$+\frac{1}{18}[(39+7\sqrt{3})\lambda_1^{n-2}+(39-7\sqrt{3})\lambda_2^{n-2}]y_1- \tag{2.24}$$
$$\left.-(3-\sqrt{3})\sum_{k=2}^{n-2}(-1)^k(\lambda_1^{n-k}+\lambda_2^{n-k-1})y_k+(-1)^n\frac{1}{3}(19y_{n-1}-8y_{n-1/2}+y_n)\right\}.$$

Перенумерацией y-ов и изменением знака у h из последних четырех формул получаются соответствующие выражения и для $\varphi'_{\mathrm{III},n-1}$, $\varphi'_{\mathrm{III},n}$, $\varphi''_{\mathrm{III},n-1}$ и $\varphi''_{\mathrm{III},n}$.

Отметим, что все приведенные формулы линейны и имеют рациональные коэффициенты.

Выпишем в качестве примера эти формулы для $n=5$:

$$\varphi'_{\mathrm{I},0}=y'_0$$
$$\varphi'_{\mathrm{I},1}=\frac{1}{209h}(-56hy'_0-168y_0+45y_1+156y_2-42y_3+12y_4-3y_5+hy'_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{I},2}=\frac{1}{209h}(15hy'_0+45y_0-180y_1+3y_2+168y_3-48y_4+12y_5-4hy'_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{I},3}=\frac{1}{209h}(-4hy'_0-12y_0+48y_1-168y_2-3y_3+180y_4-45y_5+15hy'_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{I},4}=\frac{1}{209h}(hy'_0+3y_0-12y_1+42y_2-156y_3-45y_4+168y_5-56hy'_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{I},5}=y_5$$
$$\varphi''_{\mathrm{I},0}=\frac{1}{209h^2}(-724hy'_0-918y_0+1164y_1-312y_2+84y_3-24y_4+6y_5-2hy'_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{I},1}=\frac{1}{209h^2}(194hy'_0+582y_0-1074y_1+624y_2-168y_3+48y_4-12y_5+4hy'_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{I},2}=\frac{1}{209h^2}(-52hy'_0-156y_0+624y_1-930y_2+588y_3-168y_4+42y_5-14hy'_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{I},3}=\frac{1}{209h^2}(14hy'_0+42y_0-168y_1+588y_2-930y_3+624y_4-156y_5+52hy'_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{I},4}=\frac{1}{209h^2}(-4hy'_0-12y_0+48y_1-168y_2+624y_3-1074y_4+582y_5-194hy'_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{I},5}=\frac{1}{209h^2}(2hy'_0+6y_0-24y_1+84y_2-312y_3+1164y_4-918y_5+724hy'_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{II},0}=\frac{1}{209h}(-265y_0+336y_1-90y_2+24y_3-6y_4+y_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{II},1}=\frac{1}{209h}(-97y_0-45y_1+180y_2-48y_3+12y_4-2y_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{II},2}=\frac{1}{209h}(26y_0-156y_1-3y_2+168y_3-42y_4+7y_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{II},3}=\frac{1}{209h}(-7y_0+42y_1-168y_2+3y_3+156y_4-26y_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{II},4}=\frac{1}{209h}(2y_0-12y_1+48y_2-180y_3+45y_4+97y_5)$$
$$\varphi'_{\mathrm{II},5}=\frac{1}{209h}(-y_0+6y_1-24y_2+90y_3-336y_4+265y_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{II},0}=0$$
$$\varphi''_{\mathrm{II},1}=\frac{1}{209h^2}(336y_0-762y_1+540y_2-144y_3+36y_4-6y_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{II},2}=\frac{1}{209h^2}(-90y_0+540y_1-906y_2+576y_3-144y_4+24y_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{II},3}=\frac{1}{209h^2}(24y_0-144y_1+576y_2-906y_3+540y_4-90y_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{II},4}=\frac{1}{209h^2}(-6y_0+36y_1-144y_2+540y_3-762y_4+336y_5)$$
$$\varphi''_{\mathrm{II},5}=0.$$

$$\varphi'_{\mathrm{III},0}=\frac{1}{336h}\,(-1273y_0+2120y_{1/2}-1003y_1+198y_2-54y_3+19y_4-8y_{4^1/_2}+y_5)$$

$$\varphi'_{\mathrm{III},1}=\frac{1}{336h}\,(71y_0-568y_{1/2}+341y_1+198y_2-54y_3+19y_4-8y_{4^1/_2}+y_5)$$

$$\varphi'_{\mathrm{III},2}=\frac{1}{336h}\,(-19y_0+152y_{1/2}-361y_1+18y_2+270y_3-95y_4+40y_{4^1/_2}-5y_5)$$

$$\varphi'_{\mathrm{III},3}=\frac{1}{336h}\,(5y_0-40y_{1/2}+95y_1-270y_2-18y_3+361y_4-152y_{4^1/_2}+19y_5)$$

$$\varphi'_{\mathrm{III},4}=\frac{1}{336h}\,(-y_0+8y_{1/2}-19y_1+54y_2-198y_3-341y_4+568y_{4^1/_2}-71y_5)$$

$$\varphi'_{\mathrm{III},5}=\frac{1}{336h}\,(-y_0+8y_{1/2}-19y_1+54y_2-198y_3+1003y_4-2120y_{4^1/_2}+1273y_5)$$

$$\varphi''_{\mathrm{III},0}=\frac{1}{56h^2}\,(489y_0-1224y_{1/2}+891y_1-198y_2+54y_3-19y_4+8y_{4^1/_2}-y_5)$$

$$\varphi''_{\mathrm{III},1}=\frac{1}{56h^2}\,(-41y_0+328y_{1/2}-443y_1+198y_2-54y_3+19y_4-8y_{4^1/_2}+y_5)$$

$$\varphi''_{\mathrm{III},2}=\frac{1}{112h^2}\,(11y_0-88y_{1/2}+209y_1-258y_2+162y_3-57y_4+24y_{4^1/_2}-3y_5)$$

$$\varphi''_{\mathrm{III},3}=\frac{1}{112h^2}\,(-3y_0+24y_{1/2}-57y_1+162y_2-258y_3+209y_4-88y_{4^1/_2}+11y_5)$$

$$\varphi''_{\mathrm{III},4}=\frac{1}{56h^2}\,(y_0-8y_{1/2}+19y_1-54y_2+198y_3-443y_4+328y_{4^1/_2}-41y_5)$$

$$\varphi''_{\mathrm{III},5}=\frac{1}{56h^2}\,(-y_0+8y_{1/2}-19y_1+54y_2-198y_3-891y_4+1224y_{4^1/_2}-489y_5)$$

Исключая из (2.1) и (2.2) φ_i''', получим при помощи формул (2.11)—(2.24) явные выражения для $F_{\mathrm{I}}[f;\ x]$, $F_{\mathrm{II}}[f;\ x]$ и $F_{\mathrm{III}}\ [f;\ x]$ и для их производных. Формулы (2.11)—(2.24) можно рассматривать и самостоятельно как формулы приближенного дифференцирования, принимая $f'(x_i)\approx\varphi_i'$, $f''(x_i)\approx\varphi_i''$. В [1] показано, что рассмотренный способ аппроксимации можно в первом приближении механически интерпретировать как замену кривой $y=f(x)$ упругим стержнем, укрепленным в точках $(x_i;\ y_i)$.

3. Рассмотрим применение полученных формул для приближенного решения дифференциального уравнения

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \tag{3.1}$$

при граничных условиях

$$y(a)=y(b)=0. \tag{3.2}$$

Для конкретности ограничимся вариантом III из 2.

Заменяем в (3.1) y и ее производные соответственно через $F_{\mathrm{III}}\ [f;\ x]$ и ее производными и потребуем, чтобы полученное равенство удовлетворялось в узлах $x_i=a+ih$ $\left(i=0,1,\ldots,n;\ h=\dfrac{b-a}{n}\right)$. Тогда получим систему из $n+1$ уравнений

$$\varphi''_{\mathrm{III},i}+p(x_i)\ \varphi'_{\mathrm{III},i}+q(x_i)y_i=r(x_i) \qquad (i=0,1,\ldots,\ n) \tag{3.3}$$

с $n+1$ неизвестными $y_{1/2},\ y_1,\ldots,\ y_{n-1},y_{n-1/2}$ (так как $y_0=y_n=0$ на основании (3.2)), которые можно считать приближенными значениями точного решения $y(x)$ задачи (3.1)—(3.2) в узлах x_i. Такой способ приближенного решения является интерполяционным. В отличие от обыкновенного интерполяционного метода, рассмотренного в [2], и его видоизменений, рассмотренных в [3], при этом способе приближенное решение ищется не в виде полинома, а в виде кусочно-кубической два раза дифференцируемой функции.

Если $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и задача (3.1)—(3.2) *имеет единственное решение при любом $r(x)$, то система* (3.3) *имеет единственное решение для всех достаточно больших n и определенные этими решениями функции F_{III}, F'_{III} и F''_{III} равномерно сходятся на $[a, b]$ к решению $y_*(x)$ задачи* (3.1)—(3.2) *и к соответствующим производным этого решения со скоростью*

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |y^{(i)}_*(x) - F^{(i)}_{III}[f;\ x]| = O\left(\omega_p\left(\tfrac{1}{n}\right) + \omega_q\left(\tfrac{1}{n}\right) + \omega_r\left(\tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{n}\right), \quad (i=0, 1, 2) \qquad (3.4)$$

где ω_p, ω_q и ω_r — модули непрерывности функций $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ соответственно.

Для доказательства этого предложения пользуемся общей теорией приближенных методов Л. В. Канторовича [4].

Задачу (3.1)—(3.2) рассмотрим как задачу о решении операторного уравнения

$$Gy + Hy = r, \qquad (3.5)$$

где G и H $(Gy = y'',\ Hy = py' + qy)$ — линейные операторы, отображающие пространство $У$ функций, два раза непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (3.2) с нормой

$$\| y \| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |y''(x)| \qquad (3.6)$$

в пространство C всех непрерывных на $[a, b]$ функций с обыкновенной нормой. Система (3.3) тогда эквивалентна уравнению

$$Gy + P_nHy = P_nr, \qquad (3.7)$$

где $P_nz = \tilde{z}$ — кусочно-линейная функция, значения которой в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ совпадают с соответствующими значениями функции $z(x)$. Тогда

$$\| P_n \| = 1 \qquad (3.8)$$

и для любого i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$

$$\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} |z(x) - \tilde{z}(x)| = \max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} \frac{1}{h} |[z(x) - z(x_i)](x_{i+1} - x) +$$

$$+ [z(x) - z(x_{i+1})](x - x_i)| \leqslant \omega_z(h),$$

так что

$$\| z - P_nz \| \leqslant \omega_z(h). \qquad (3.9)$$

Дальше известно [4], что в наших условиях

$$|y(x)| \leqslant A \| y \|, \qquad |y'(x)| \leqslant B \| y \|, \qquad (3.10)$$

где A и B — постоянные, не зависящие от y. На основании (3.9) и (3.10) имеем

$$\| Hy - P_nHy \| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |p(x)y'(x) + q(x)y(x) - P_n[p(x)y'(x) + q(x)y(x)]| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|x'-x''|\leqslant h} |p(x')y'(x') + q(x')y(x') - p(x'')y'(x'') - q(x'')y(x'')| =$$

$$= \sup_{|x'-x''|\leqslant h} |[p(x') - p(x'')]y'(x') + p(x'')[y'(x') - y'(x'')] +$$

$$+[q(x')-q(x'')]y(x')+q(x'')[y(x')-y(x'')]|\leqslant$$
$$\leqslant\omega_p(h)B\|y\|+K\|y\|h+\omega_q(h)A\|y\|+LB\|y\|h,$$

где $K=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|p(x)|$ и $L=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|q(x)|$. Следовательно,

$$\|Hy-P_nHy\|\leqslant M(\omega_p(h)+\omega_q(h)+h)\|y\|. \tag{3.11}$$

Наше предложение следует теперь из (3.8), (3.9), (3.11) и из общей теории Л. В. Канторовича.

Из доказанного предложения, в частности, следует, что *если $f(x)$ на $[a, b]$ два раза непрерывно дифференцируема и $\omega_{f''}(h)$ модуль непрерывности $f''(x)$, то*

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(i)}(x)-F_{\text{III}}^{(i)}[f;x]|=O(\omega_{f''}(\tfrac{1}{n}))\ \text{для}\ i=0,1,2. \tag{3.12}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. Holladay, A smoothest curve approximation. Math. Tables and other Aids to Computation, Vol. XI, No. 60, 1957, 233—243.
2. Э. Б. Карпиловская, Усп. матем. наук VIII, вып. 3 (55), 1953, 111—118.
3. И. Петерсен, О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-мат. и техн. наук, т. X, № 1, 1961.
4. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
24. II 1961

TÜKITI POLÜNOMIAALSEST APROKSIMATSIOONIST

I. Petersen,
füüsikalis-matemaatiliste teaduste kandidaat

Resümee

Artiklis käsitletakse ühemuutuja funktsiooni interpoleerimist tükiti kuuppolünomiaalsete kaks korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonidega. Tuletatakse avaldised aproksimeeriva funktsiooni esimese ja teise tuletise jaoks. Selle interpolatsioonmenetluse alusel esitatakse harilike teist järku diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete ligikaudse lahendamise meetod ja tõestatakse tema koonduvus.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
24. II 1961

ÜBER DIE STÜCKWEISE POLYNOMISCHE APPROXIMATION

I. Petersen

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird die Interpolation der Funktionen einer Veränderlichen mit stückweise kubisch-polynomischen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen behandelt. Es werden die Ausdrücke der ersten und zweiten Ableitung der approximierenden Funktion hergeleitet. Auf Grund dieses Interpolationsverfahrens wird eine Methode zur angenäherten Lösung der Grenzaufgaben der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dargestellt und ihre Konvergenz bewiesen.

Institut für Kybernetik
der Akademie der Wissenschaften der Estnischen SSR

Eingegangen
am 24. Febr. 1961