EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1962.1.02

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОГЛОЩАЮЩИХ ОПТИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ

П. КАРД,

член-корреспондент Академии наук Эстонской ССР

В настоящей заметке мы выведем несколько соотношений, характеризующих поглощающие оптические покрытия, причем особое внимание будет уделено частным случаям, когда покрытие симметрично или просветлено (о понятии просветления поглощающего покрытия см. статьи [1—3]). Как особый случай будем рассматривать также отсутствие поглощения.

Напомним прежде всего основные формулы (см. [1—3], а также [4]). Если r и d — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания света каким-либо покрытием, и

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{r}{d} \\ b &= \frac{1}{d}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

то

$$bb^* - a\tilde{a}^* = 1 \tag{2}$$

и

$$\left.\begin{aligned} b' &= b \\ a' &= -\tilde{a}^*. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь $\sim$ — знак сопряженного покрытия, звездочка (*) означает комплексно-сопряженные величины, а штрих (′) означает падение света на покрытие с обратной стороны. Если покрытие симметрично, то $a' = a$; однако, вначале мы условия симметричности не ставим.

Как показано в предыдущих работах автора [2—4], целесообразно ввести в рассмотрение вещественные величины φ, S, U, σ, согласно равенствам

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch}\varphi + S &= bb^* - aa^* \\ \operatorname{ch}\varphi - S &= \tilde{b}\tilde{b}^* - \tilde{a}\tilde{a}^* \quad \varphi \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$Ue^{i\sigma} = \tilde{a}b - a\tilde{b} \quad U \geqslant 0, \tag{5}$$

причем всегда

$$S^2 - U^2 = \operatorname{sh}^2\varphi. \tag{6}$$

Величина φ характеризует поглощение, так как $\varphi = 0$ тогда и только тогда, когда покрытие является непоглощающим. Величина U тоже равна нулю при отсутствии поглощения, однако, она может быть равна нулю и при наличии поглощения. Она является параметром, характеризующим в основном просветление. Если поглощающее покрытие просветлено, то $U = 0$; наоборот, если $U = 0$ и покрытие является поглощающим, то оно просветлено.

Введем еще комплексную величину Ψ, определяемую (пока с точностью до знака) равенством

$$\mathrm{ch}\Psi = \frac{1}{2}\left(be^{-i\sigma} + \tilde{b}^* e^{i\sigma}\right). \tag{7}$$

Эта величина в частном случае единичного металлического слоя уже рассматривалась в [5]. Здесь мы обобщаем данное в [5] определение на любое покрытие. Следует, однако, заметить, что это определение теряет непосредственный смысл при $U = 0$, так как в этом случае σ неопределенно. Все-таки, рассматривая случай $U = 0$ как результат предельного перехода $U \to 0$, мы можем рассматривать величину Ψ как имеющую определенное значение, в зависимости от пути этого предельного перехода.

Выведем теперь путем простых преобразований несколько новых соотношений. Умножая первое равенство (4) на $\tilde{a}^*$ и вычитая a^*, находим с учетом (2) и (5)

$$b = e^{i\sigma} \cdot \frac{\tilde{a}^*(\mathrm{ch}\varphi + S) - a^*}{U}. \tag{8}$$

Аналогично находим

$$\tilde{b} = e^{i\sigma} \cdot \frac{-a^*(\mathrm{ch}\varphi - S) + \tilde{a}^*}{U} \tag{9}$$

и, соответственно,

$$b^* = e^{-i\sigma} \cdot \frac{\tilde{a}(\mathrm{ch}\varphi + S) - a}{U}, \tag{10}$$

$$\tilde{b}^* = e^{-i\sigma} \cdot \frac{-a(\mathrm{ch}\varphi - S) + \tilde{a}}{U}. \tag{11}$$

В этих формулах все b выражены через a. Далее, умножая первую формулу (4) на $\tilde{a}\tilde{a}^*$, вторую на aa^*, и складывая их, находим с учетом (2) и (5)

$$\tilde{a}\tilde{a}^*(\mathrm{ch}\varphi + S) + aa^*(\mathrm{ch}\varphi - S) - a\tilde{a}^* - a^*\tilde{a} = U^2. \tag{12}$$

С помощью формул (8) и (11) можем переписать формулу (7) в виде

$$\mathrm{ch}\Psi = \frac{\tilde{a}^*(\mathrm{ch}\varphi + S) - a(\mathrm{ch}\varphi - S) - a^* + \tilde{a}}{2U}, \tag{13}$$

откуда также

$$\mathrm{ch}\Psi^* = \frac{\tilde{a}(\mathrm{ch}\,\varphi + S) - a^*(\mathrm{ch}\varphi - S) - a + \tilde{a}^*}{2U}. \tag{14}$$

По поводу формул (8)—(11), (13) и (14) следует сказать то же, что уже сказано выше по поводу формулы (7). Именно, при $U = 0$ они прямого смысла не имеют, так как их правые части принимают вид $\frac{0}{0}$ (кроме того, в формулах (8)—(11) σ становится неопределенным). Однако, мы можем применить эти формулы в предельном переходе $U \to 0$; тогда, в зависимости от пути этого перехода, правые части наших формул примут вполне определенные значения. В частности, Ψ и Ψ^* будут иметь вполне определенные предельные значения (зависящие, вообще говоря, от пути перехода к пределу $U = 0$). Ниже, для случая симметричных покрытий, мы рассмотрим этот вопрос более подробно. Отметим еще, что, как вытекает из формул (6) и (12), при $U = 0$ имеет место равенство

$$(\tilde{a}e^{\varphi} - a)\,(\tilde{a}^* - a^*e^{-\varphi}) = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a} &= ae^{-\varphi}\\ \tilde{a}^* &= a^*e^{-\varphi}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Кроме того, отсюда и из формул (2), (4), (5) и (6) легко находим

$$\left.\begin{aligned}\tilde{b} &= be^{-\varphi}\\ \tilde{b}^* &= b^*e^{-\varphi}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Эти формулы замечательным образом симметричны по отношению к формулам (15).

Легко убедиться, что при подстановке (15) в числители формул (8)—(11), (13) и (14) они действительно обращаются в нуль (если учесть также, что при $U = 0$ $S = \mathrm{sh}\varphi$).

Перейдем теперь к рассмотрению свойств симметричных покрытий. В этом случае, согласно (3),

$$a + \tilde{a}^* = a^* + \tilde{a} = 0. \tag{17}$$

Следовательно, формулы (12)—(14) принимают следующий более простой вид:

$$a^2 + a^{*2} + 2aa^*\,\mathrm{ch}\varphi = U^2, \tag{18}$$

$$\mathrm{ch}\Psi = -\frac{a\,\mathrm{ch}\varphi + a^*}{U}, \tag{19}$$

$$\mathrm{ch}\Psi^* = -\frac{a^*\mathrm{ch}\varphi + a}{U}. \tag{20}$$

Рассмотрим сначала формулу (18). Если положим

$$a = \sqrt{\frac{R}{D}}\,e^{i\mu}, \tag{21}$$

где R и D — энергетические коэффициенты отражения и пропускания, то ее можно переписать в виде

$$\frac{2R}{D}\,(\mathrm{ch}\varphi + \cos 2\mu) = U^2, \tag{22}$$

откуда, в случае, если $\mathrm{ch}\varphi + \cos 2\mu \neq 0$,

$$\frac{R}{D} = \frac{U^2}{2(\mathrm{ch}\varphi + \cos 2\mu)}. \tag{23}$$

Очевидно, случай $\mathrm{ch}\varphi + \cos 2\mu = 0$ имеет место тогда и только тогда, если $\varphi = 0$, т. е. когда поглощение отсутствует. В самом деле, как вытекает из равенства $a = -a^*$, симметричное непоглощающее покрытие имеет $\cos\mu = 0$, т. е. $\cos 2\mu = -1$; наоборот, если $\mathrm{ch}\varphi + \cos 2\mu = 0$, то $\varphi = 0$ и $\cos 2\mu = -1$. Таким образом, равенство (23) верно для любого симметричного покрытия, если только последнее имеет отличное от нуля поглощение. Но и в случае отсутствия поглощения его можно считать верным, если в правой части заменить неопределенность $\frac{0}{0}$ ее предельным значением при переходе $\varphi \to 0$.

Если симметричное поглощающее покрытие просветлено, то из (23) вытекает

$$\left.\begin{aligned} R &= 0 \\ a &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Следует подчеркнуть, что здесь наличие отличного от нуля поглощения существенно; для симметричного непоглощающего покрытия формула (24) в общем случае неверна.

Обратимся к формулам (19) и (20). Учитывая формулу (18), из (19) можем легко получить

$$\mathrm{sh}^2\Psi = \frac{a^2\mathrm{sh}^2\varphi}{U^2},$$

откуда

$$\mathrm{sh}\Psi = -\frac{a\,\mathrm{sh}\varphi}{U}. \tag{25}$$

Знак минус выбран здесь произвольно, так что величина Ψ определяется теперь однозначно. Аналогично,

$$\mathrm{sh}\Psi^* = -\frac{a^*\mathrm{sh}\varphi}{U}. \tag{26}$$

Далее, из формул (19), (20), (25) и (26) находим

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(\Psi + \Psi^*) &= \mathrm{sh}\varphi \\ \mathrm{ch}(\Psi + \Psi^*) &= \mathrm{ch}\varphi \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathrm{Re}\Psi = \frac{\varphi}{2}. \tag{27}$$

Следует отметить, что в этом вычислении нужно выполнить сокращение

$$\frac{a^2 + a^{*2} + 2aa^*\mathrm{ch}\varphi}{U^2} = 1,$$

что мы всегда имеем право сделать, включая предельный переход $U \to 0$. Поэтому наш результат (27) верен и при $U = 0$, т. е. тогда, когда для $\mathrm{ch}\Psi$, $\mathrm{ch}\Psi^*$, $\mathrm{sh}\Psi$ и $\mathrm{sh}\Psi^*$ формулы (19), (20), (25) и (26) дают $\frac{0}{0}$.

Обозначим мнимую часть Ψ через Θ, так что

$$\Psi = \frac{\varphi}{2} + i\Theta. \tag{28}$$

Чтобы найти Θ, перепишем формулу (25) в виде

$$-\frac{\mathrm{sh}\varphi}{U}\sqrt{\frac{R}{D}}\,e^{i\mu} = \mathrm{sh}\frac{\varphi}{2}\cos\Theta + i\,\mathrm{ch}\frac{\varphi}{2}\sin\Theta,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \tan\Theta = \mathrm{th}\frac{\varphi}{2}\tan\mu \\ \cos\mu\cos\Theta \leqslant 0, \quad \sin\mu\sin\Theta \leqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Подобно (27), этот результат верен и при $U \to 0$. При наличии поглощения формула (29) дает возможность непосредственно вычислить Θ, хотя бы $U = 0$. При отсутствии же поглощения правая часть этой формулы принимает вид $0 \cdot \infty$. Поэтому значение Θ в случае отсутствия поглощения следует находить как предел при $\varphi \to 0$, причем значение этого предела зависит от пути приближения к нему.

Найдем еще формулы для $\operatorname{sh}\Psi$ и $\operatorname{ch}\Psi$ с исключенным U. Заменяя в формуле (25) $a=\sqrt{\frac{R}{D}}e^{i\mu}$ и исключая U по формуле (22), находим $\left(\text{после сокращения на } \frac{R}{D}\right)$

$$\operatorname{sh}\Psi = -\frac{\operatorname{sh}\varphi\, e^{i\mu}}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\varphi+\cos 2\mu)}}. \tag{30}$$

Аналогично, из формулы (19) имеем

$$\operatorname{ch}\Psi = -\frac{\operatorname{ch}\varphi\, e^{i\mu}+e^{-i\mu}}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\varphi+\cos 2\mu)}}. \tag{31}$$

Как и формула (29), эти формулы при наличии поглощения всегда непосредственно применимы; если же поглощение отсутствует, то в правых частях этих формул получается неопределенность $\frac{0}{0}$, раскрытие которой возможно только в том случае, если известен путь перехода к пределу (например, стремление толщин поглощающих слоев к нулю или стремление мнимых частей показателей преломления к нулю).

Обратимся, наконец, к формулам (8)—(11). В случае симметричного покрытия они запишутся, в силу формул (17), в виде

$$\left.\begin{aligned}
b &= -e^{i\sigma}\cdot\frac{a(\operatorname{ch}\varphi+S)+a^*}{U}\\
\tilde{b} &= -e^{i\sigma}\cdot\frac{a^*(\operatorname{ch}\varphi-S)+a}{U}\\
b^* &= -e^{-i\sigma}\cdot\frac{a^*(\operatorname{ch}\varphi+S)+a}{U}\\
\tilde{b}^* &= -e^{-i\sigma}\cdot\frac{a(\operatorname{ch}\varphi-S)+a^*}{U}.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

С помощью формул (19), (20), (25) и (26) вместо этого можно написать

$$\left.\begin{aligned}
b &= e^{i\sigma}\left(\operatorname{ch}\Psi+\frac{S\operatorname{sh}\Psi}{\operatorname{sh}\varphi}\right)\\
\tilde{b} &= e^{i\sigma}\left(\operatorname{ch}\Psi^*-\frac{S\operatorname{sh}\Psi^*}{\operatorname{sh}\varphi}\right)\\
b^* &= e^{-i\sigma}\left(\operatorname{ch}\Psi^*+\frac{S\operatorname{sh}\Psi^*}{\operatorname{sh}\varphi}\right)\\
\tilde{b}^* &= e^{-i\sigma}\left(\operatorname{ch}\Psi-\frac{S\operatorname{sh}\Psi}{\operatorname{sh}\varphi}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Эти формулы непосредственно неприменимы, если $U=0$, так как σ неопределенно. Однако, при предельном переходе, в зависимости от пути этого перехода, σ тоже стремится к некоторому пределу. Беря в правых частях этих формул соответствующие предельные выражения, мы будем и при $U=0$ иметь правильные соотношения.

В заключение отметим, что наиболее интересным из наших выводов представляется формула (23). Если симметричное поглощающее покрытие просветлено, то, согласно этой формуле, $R=0$ в любом случае, т. е. даже тогда, когда поглощение минимально. Однако, при полном отсутствии поглощения $R\neq 0$. Пусть, например, покрытие содержит только один очень тонкий поглощающий слой, расположенный в середине покрытия. Тогда $R=0$. Если же этот слой убрать, оставив в остальных частях покрытие неизменным, то оно останется симметричным, но, поскольку поглощение отсутствует, равенство $R=0$ уже, вообще говоря, не выполняется. В одной из следующих статей этот вопрос будет рассмотрен более подробно.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Г. Кард, Теория просветления металлических покрытий. Оптика и спектроскопия, 9, 1960, 248.
2. П. Кард, К теории поглощающих оптических покрытий. Изв. АН Эст. ССР, Сер. физ.-мат. и техн. наук, т. IX, № 3, 1960, 250.
3. П. Г. Кард, Основы теории синтеза просветленных поглощающих покрытий. Оптика и спектроскопия, 9, 1960, 386.
4. P. Kard, Uusi tulemusi neelavate optiliste katete teoorias. Loodus ja matemaatika, пг. 4 (в печати).
5. P. Pard, Kahekomponendilise metallodielektrilise selgendatud optilise filtri teooria. Loodus ja matemaatika, пг. 4 (в печати).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
9. II 1961

NEELAVATE OPTILISTE KATETE MÕNINGAID OMADUSI

P. Kard,
Eesti NSV Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige

Resümee

Artiklis tuletatakse rida uusi seoseid suuruste vahel, mis iseloomustavad neelavaid optilisi katteid. Lähemalt vaadeldakse sümmeetriliste katete juhtu. Saadud seostest on eriti märkimisväärne valem (23), kus R ja D on sümmeetrilisel kattel valguse peegeldumise ja läbilaskvuse energeetilised koefitsiendid, U — selgenduse ja φ — neeldumise parameeter ning μ — peegeldumise ja läbilaskvuse amplituudsete koefitsientide suhte r/d faasinurk.

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
9. II 1961

SOME PROPERTIES OF ABSORBING OPTICAL COATINGS

P. Kard,
Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.

Summary

The paper deals with some new relations between the quantities describing the absorbing optical coatings. The case of symmetrical coatings is subject to a detailed consideration. Among the established relations the formula (23) is especially noteworthy. In that formula R and D are the reflectance and transmittance of a symmetrical coating, U is the parameter of improvement (i. e. of minimization of absorption), φ is the parameter of absorption, and μ is the phase angle of the ratio, r/d, of the amplitude reflectance, r, and amplitude transmittance, d, of the coating.

State University of Tartu

Received
February 9th, 1961