EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. X KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1961, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ X
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1961, № 1

О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ТИПА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. ПЕТЕРСЕН,

кандидат физико-математических наук

1. Задачей, рассматриваемой ниже, является решение дифференциального уравнения

$$Lx \equiv x^{(2m)}(t) - \lambda[p_1(t)x^{(2m-1)}(t) + \ldots + p_{2m}(t)] = y(t) \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$\begin{gathered} x(-1) = x'(-1) = \ldots = x^{(m-1)}(-1) = 0, \\ x(1) = x'(1) = \ldots = x^{(m-1)}(1) = 0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Приближенное решение этой задачи будем искать в виде полинома, удовлетворяющего граничным условиям

$$\tilde{x} = (1-t^2)^m \sum_{i=1}^{N} c_i t^{i-1}, \tag{1.3}$$

в котором $c_1, c_2, \ldots, c_N$ определяются условием, что уравнение (1.1) удовлетворяется в каком-то смысле на некоторой заданной системе узлов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ интервала [—1; 1]. Такие приближенные методы естественно назвать интерполяционными.

2. Э. Б. Карпиловской [1, 2] установлены условия сходимости метода совпадения, т. е. интерполяционного метода в частном случае $N = n$, когда n коэффициентов c_i определяются n уравнениями

$$[L\tilde{x} - y]_{t=t_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.1}$$

К. Б. Биценко и Р. Граммель [3] предложили метод подобластей, при котором $N = n-1$ и условие (2.1) заменяется уравнениями

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (L\tilde{x} - y)\,dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.2}$$

Предложим еще три метода интерполяционного типа:

А. Берется $N = 2n-1$ и коэффициенты c_i определяются уравнениями (2.1) и (2.2).

B. Берется $N=2n$ и коэффициенты c_i определяются уравнениями (2.1) и

$$\left[\frac{d}{dt}(L\tilde{x}-y)\right]_{t=t_j}=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{2.3}$$

C. Берется $N=2n$ и коэффициенты c_i определяются * уравнениями (2.1) и

$$\left[\frac{d^{2m+1}\tilde{x}}{dt^{2m+1}}\right]_{t=t_j}=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{2.4}$$

Для простоты ограничимся при рассмотрении этих методов интерполяционными узлами Чебышева.

3. Следуя идеям Л. В. Канторовича, рассмотрим задачу (1.1) — (1.2) как функциональное уравнение

$$Lx \equiv Gx - \lambda Tx = y, \tag{3.1}$$

где

$$Gx = \frac{d^{2m}x}{dt^{2m}}, \qquad Tx = \sum_{i=1}^{2m} p_i \frac{d^{2m-i}x}{dt^{2m-i}}, \tag{3.2}$$

операторы G и T отображают нормированное пространство X в нормированное пространство Y, причем X состоит из функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.2), и

$$\|x\|_X = \|Gx\|_Y. \tag{3.3}$$

Уравнения для определения коэффициентов c_i в (1.3) означают при каждом методе «приближенное» уравнение

$$G\tilde{x} - \lambda\Phi T\tilde{x} = \Phi\tilde{y}, \tag{3.4}$$

где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — элементы некоторых полных подпространств $\tilde{X}=\tilde{X}(n)\subset X$ и $\tilde{Y}=\tilde{Y}(n)\subset Y$ соответственно, причем $G(\tilde{X})=\tilde{Y}$, и $\Phi=\Phi(n)$ есть некоторый линейный оператор проектирования Y на $\tilde{Y}$.

Если операторы T и L^{-1} линейны и для всякого $x\in X$ найдется такое $\tilde{y}\in\tilde{Y}$, что

$$\|Tx-\tilde{y}\|_Y \leqslant \mu_1\|x\|_X, \tag{3.5}$$

и такое $\tilde{y}\in\tilde{Y}$, что

$$\|y-\tilde{y}\| \leqslant \mu_2, \tag{3.6}$$

причем

$$\lim_{n\to\infty}\mu_1\|\Phi\| = \lim_{n\to\infty}\mu_2\|\Phi\| = 0, \tag{3.7}$$

то, по Канторовичу [1], уравнение (3.4) имеет для всех достаточно больших n единственное решение $\tilde{x}^*$, сходящееся при $n\to\infty$ к решению x^* уравнения (3.1) со скоростью

* Метод C является методом совпадения, но не с таким видом $\tilde{x}$, как рассмотренный в [1,2].

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X = O(\varepsilon\|\Phi\|), \tag{3.8}$$

где ε такое, что найдется $\tilde{x} \in \tilde{X}$, при котором

$$\|x^* - \tilde{x}\|_X \leqslant \varepsilon. \tag{3.9}$$

4. Введем условия:

I. λ не является собственным числом задачи (1.1) — (1.2).

II. $p_1(t) = 0$.*

III. Коэффициенты $p_2(t), \ldots, p_{2m}(t)$ и свободный член $y(t)$ на $[-1;1]$ r раз непрерывно дифференцируемы и их производные порядка r удовлетворяют условию Липшица с показателем α.

IV. Существует такая постоянная A, что на $(-1; 1)$

$$\frac{|p_2(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant A. \tag{4.1}$$

V. Узлы $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — нули полинома Чебышева $T_n(t)$.

Теорема 1. *Если выполнены условия* I—V, *то при* $r \geqslant 1$, $\alpha > 0$ *уравнения* (2.2) *для определения n-го приближения*** *задачи* (1.1) — (1.2) *методом подобластей однозначно разрешимы для всех достаточно больших n. Получаемые приближения и их производные, до порядка* $2m-1$ *включительно, сходятся равномерно на* $[-1; 1]$, *а производные порядка* $2m$ *сходятся равномерно на всяком интервале* $[a; b] \subset (-1; 1)$ *к решению задачи* (1.1) — (1.2) *и к его соответствующим производным. Или, более подробно,*

$$\begin{gathered}\max_t \left|\frac{d^k x^*}{dt^k} - \frac{d^k \tilde{x}^*}{dt^k}\right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1), \\ \max_t \left(\left|\frac{d^{2m} x^*}{dt^{2m}} - \frac{d^{2m} \tilde{x}^*}{dt^{2m}}\right| \sqrt{1-t^2}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1}}\right),\end{gathered} \tag{4.2}$$

где x^* *точное решение задачи* (1.1) — (1.2), *а* $\tilde{x}^*$ *n-ое приближение по методу подобластей.*

Доказательство. Для применения общей теории, кратко сформулированной в **3**, возьмем в качестве пространства Y пространство Y_1 всех непрерывных на $[-1; 1]$ функций с нормой

$$\|y\|_{Y_1} = \max_t |y(t)\sqrt{1-t^2}|. \tag{4.3}$$

---

* Если $p_1(t) \neq 0$, но $2m-1$ раз непрерывно дифференцируема, то путем подходящей подстановки всегда можно добиться выполнения условия II.

** Под порядком приближения понимаем число узлов.

Соответствующим пространством X является тогда пространство X_1 на $[-1;\ 1]$ $2m$ раз непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих условиям (1.2) функций с нормой

$$\|x\|_{X_1} = \max_t |x^{(2m)}(t)\sqrt{1-t^2}|. \tag{4.4}$$

Пусть $g(s,\ t)$ функция Грина оператора G. Если $y = Gx$, то

$$x(s) = \int_{-1}^{+1} g(s,\ t)y(t)\,dt, \quad x^{(k)}(s) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^k}{\partial s^k} g(s,\ t)y(t)\,dt,$$

$$(k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$$

и на основании ограниченности частых производных $\frac{\partial^k}{\partial s^k} g(s,\ t)$ до порядка $2m-1$ имеем

$$\max_s |x^{(k)}(s)| \leqslant \max_s \int_{-1}^{+1} \frac{\left|\frac{\partial^k}{\partial s^k} g(s,t)\right|}{\sqrt{1-t^2}} \,|y(t)\sqrt{1-t^2}|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_s \int_{-1}^{+1} \frac{\left|\frac{\partial^k}{\partial s^k} g(s,t)\right|}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \cdot \max_t |y(t)\sqrt{1-t^2}|\,.$$

Следовательно,

$$\max_t |x^{(k)}(t)| \leqslant A_k \|x\|_{X_1} \qquad (k = 0,\ 1, \ldots,\ 2m-1). \tag{4.5}$$

Из (4.5), I и III (при $r > 0$) легко заключить ограниченность операторов T и L^{-1} относительно норм (4.3) и (4.4).

Подпространство $\tilde{X}_1$ состоит из всех полиномов вида

$$(1-t^2)^m \sum_{i=1}^{n-1} c_i t^{i-1},$$

а $\tilde{Y}_1$ — из всех полиномов степени не выше $n-2$. Оператор Φ относит к каждой непрерывной функции $y \in Y_1$ такой полином $\mathcal{L}[y;\ t]$ степени не выше $n-2$, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathcal{L}[y;\ t]\,dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)\,dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4.6}$$

Имеем

$$\mathcal{L}[y;\ t] = \frac{d}{dt} L[z;\ t], \tag{4.7}$$

где $L[z;\ t]$ — интерполяционный полином Лагранжа функции

$$z(t) = \int_0^t y(t)\,dt \tag{4.8}$$

по узлам $t_1, t_2, \ldots, t_n$, так как

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{d}{dt} L[z;\ t]\,dt = L[z;\ t_{j+1}] - L[z;\ t_j] = z(t_{j+1}) - z(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)\,dt.$$

Однозначность и аддитивность оператора Φ очевидны. Оценим его норму. Прежде всего по (4.8) имеем

$$\max_t |z(t)| = \max_t \left| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} y(t)\sqrt{1-t^2}\,dt \right| \leqslant \frac{\pi}{2}\|y\|_{Y_1}. \tag{4.9}$$

Дальше известно [4], что для интерполяционного полинома Лагранжа в случае узлов Чебышева имеет место оценка

$$\max_t |L[z;\ t]| \leqslant \max_t |z(t)|\,O(\ln n).$$

Наконец, по теореме Бернштейна,

$$\|\Phi y\|_{Y_1} = \max_t |\mathscr{L}[y;\ t]\sqrt{1-t^2}| \leqslant (n-1)\max_t |L[z;\ t]| \leqslant \frac{\pi}{2}(n-1)\,O(\ln n)\,\|y\|_{Y_1}.$$

Следовательно,

$$\|\Phi\| = O(n\ln n). \tag{4.10}$$

Пусть теперь выполнены условия II, III, IV с $r \geqslant 1$, $\alpha > 0$ и при $i = 2, 3, \ldots, 2m$

$$|p_i(t)| \leqslant L_i,\ |p_i'(t)| \leqslant M_i,\ |p_i'(t') - p_i'(t'')| \leqslant N_i|t' - t''|^{\alpha}. \tag{4.11}$$

Если $Tx = z$, $z(t) = \sum_{i=2}^{2m} p_i(t)\,x^{(2m-i)}(t)$, то из (4.11), (4.5) и (4.1) следует

$$|z'(t') - z'(t'')| \leqslant \sum_{i=2}^{2m} [|p_i'(t')|\ |x^{(2m-i)}(t') - x^{(2m-i)}(t'')| +$$

$$+ |x^{(2m-i)}(t'')|\ |p_i'(t') - p_i'(t'')|] + \sum_{i=2}^{2m} |p_i(t')\,x^{(2m-i+1)}(t') - p_i(t'')\,x^{(2m-i+1)}(t'')| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=2}^{2m} (M_i\,|x^{(2m-i+1)}(\tau_i')|\,|t' - t''| + N_i\,|x^{(2m-i)}(t'')|\,|t' - t''|^{\alpha}) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{2m} |p_i'(\tau_i'')\,x^{(2m-i+1)}(\tau_i'') + p_i(\tau_i'')\,x^{(2m-i+2)}(\tau_i'')|\,|t' - t''| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=2}^{2m} (M_i A_{2m-i+1}\,|t' - t''|^{1-\alpha} + N_i A_{2m-i})\right] \|x\|_{X_1}\,|t' - t''|^{\alpha} +$$

$$+ \left[\sum_{i=3}^{2m} (M_i A_{2m-i+1} + L_i A_{2m-i+2})\right] \|x\|_{X_1}\,|t' - t''| + \left[M_2 A_{2m-1}\,\|x\|_{X_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{|p_2(\tau_2'')|}{\sqrt{1-\tau_2''^2}}\,|x^{(2m)}(\tau_2'')|\sqrt{1-\tau_2''^2}\right] |t' - t''| \leqslant C\,\|x\|_{X_1}\,|t' - t''|^{\alpha}.$$

Таким образом, $\frac{d}{dt} Tx$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α и с постоянной $C\|x\|_{X_1}$. По теореме Джексона тогда существует такой полином $\tilde{y} \in \tilde{Y}_1$, что

$$\|Tx-\tilde{y}\|_{Y_1} \leqslant \max_t |Tx-\tilde{y}| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)\|x\|_{X_1}. \tag{4.12}$$

Из III при $r \geqslant 1$, $\alpha > 0$ следует также, что и для свободного члена $y(t)$ существует $\tilde{y} \in \tilde{Y}_1$ такой, что

$$\|y-\tilde{y}\|_{Y_1} \leqslant \max_t |y-\tilde{y}| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right). \tag{4.13}$$

Оценки (4.12), (4.13) и (4.10) показывают, что условия (3.5), (3.6) и (3.7) выполнены.

Для доказательства утверждения (4.2) отметим, что из III следует $(2m+r)$-кратная непрерывная дифференцируемость решения x^* нашей задачи и что его производная порядка $2m+r$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α. По теореме Джексона, тогда существует такое $\tilde{x} \in \tilde{X}_1$, что

$$\|x^*-\tilde{x}\|_{X_1} \leqslant \max_t \left|\frac{d^{2m}x^*}{dt^{2m}} - \frac{d^{2m}\tilde{x}}{dt^{2m}}\right| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{4.14}$$

Ввиду этого (4.2) следует теперь из (3.8), (4.5) и (4.10).

5. Для метода A в качестве пространств X и Y возьмем те же X_1 и Y_1, что и в **4**. Подпространство $\tilde{X}_1$ в этом случае состоит из всех полиномов вида $(1-t^2)^m \sum_{i=1}^{2n-1} c_i t^{i-1}$, а $\tilde{Y}_1$ — из всех полиномов степени не выше $2n-2$. Оператор Φ относит теперь к непрерывной функции $y \in Y_1$ полином $\mathscr{H}[y;\ t]$ степени не выше $2n-2$, однозначно определенный условиями

$$\mathscr{H}[y;\ t_j] = y(t_j) \qquad (j=1, 2, \ldots, n),$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathscr{H}[y;\ t]\,dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)\,dt \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1). \tag{5.1}$$

Если опять $z(t) = \int_0^t y(t)\,dt$, а $H[z;\ t]$ — ее интерполяционный полином Эрмита по узлам $t_1, t_2, \ldots, t_n$, т. е.

$$H[z;\ t] = \sum_{i=1}^{n} z(t_i) A_i(t) + z'(t_i) B_i(t),$$

где $A_i(t)$ и $B_i(t)$ — основные функции эрмитовой интерполяции, то

$$\mathscr{H}[y;\ t] = \frac{d}{dt} H[z;\ t], \tag{5.2}$$

так как

$$\frac{d}{dt} H[z;\ t]\Big|_{t=t_j} = z'(t_j) = y(t_j)$$

и

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{d}{dt} H[z;\ t]\,dt = H[z;\ t_{j+1}] - H[z;\ t_j] = z(t_{j+1}) - z(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)\,dt.$$

Для оценки $\|\Phi\|$ воспользуемся (5.2), теоремой Бернштейна, (4.9), неравенством

$$|z'(t)| = |y(t)| \leqslant \frac{\max\limits_t |y(t)\sqrt{1-t^2}\,|}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\|y\|_{Y_1}}{\sqrt{1-t^2}}$$

и тем, что при узлах Чебышева [4]

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i(t)| = 1, \qquad \max_t \sum_{i=1}^{n} \frac{|B_i(t)|}{\sqrt{1-t_i^2}} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{5.3}$$

Имеем

$$\|\Phi y\|_{Y_1} = \max_t |\mathscr{H}[y;\ t]\sqrt{1-t^2}\,| \leqslant (2n-1)\max_t |H[z;\ t]| \leqslant$$

$$\leqslant (2n-1)\left[\frac{\pi}{2}\|y\|_{Y_1} \max_t \sum_{i=1}^{n} |A_i(t)| + \|y\|_{Y_1} \max_{t_*} \sum_{i=1}^{n} \frac{|B_i(t)|}{\sqrt{1-t_i^2}}\right] = O(n)\,\|y\|_{Y_1},$$

так что

$$\|\Phi\| = O(n). \tag{5.4}$$

На основании 4, в частности (4.12) — (4.14), и (5.4) имеет место

Теорема 2. *Если выполнены условия* I—V, *то при* $r \geqslant 1$, $\alpha > 0$ *уравнения* (2.1) — (2.2) *для определения* n*-го приближения задачи* (1.1) — (1.2) *методом* А *однозначно разрешимы для всех достаточно больших* n *и эти приближения* $\tilde{x}^*$ *сходятся к точному решению* x^* *со скоростью*

$$\max_t \left|\frac{d^k x^*}{dt^k} - \frac{d^k \tilde{x}^*}{dt^k}\right| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots,\quad 2m-1),$$

$$\max_t \left(\left|\frac{d^{2m} x^*}{dt^{2m}} - \frac{d^{2m} \tilde{x}^*}{dt^{2m}}\right| \sqrt{1-t^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right).$$

6. Приступим к изучению сходимости метода В. Пространство Y_2 определяем как пространство всех один раз непрерывно дифференцируемых на $[-1;\ 1]$ функций с нормой

$$\|y\|_{Y_2} = \max_t |y(t)| + \max_t |y'(t)\sqrt{1-t^2}\,|. \tag{6.1}$$

Соответствующее пространство X_2 состоит тогда из всех $2m+1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[-1;\ 1]$ функций, удовлетворяющих условиям (1.2). При этом по (3.3)

$$\|x\|_{X_2} = \max_t |x^{(2m)}(t)| + \max_t |x^{(2m+1)}(t)\sqrt{1-t^2}\,|. \tag{6.2}$$

При исследовании метода совпадения для задачи (1.1) — (1.2) в [1] установлено, что

$$\max_t |x^{(k)}(t)| \leqslant A_k \max |x^{(2m)}(t)| \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m). \tag{6.3}$$

Согласно (6.2) и (6.3) имеем

$$\max_t |x^{(k)}(t)| \leqslant A_k \|x\|_{X_2} \qquad (k=0,\ 1, \ldots,\ 2m),$$
$$\max_t |x^{(2m+1)}(t)\sqrt{1-t^2}| \leqslant A_{2m+1} \|x\|_{X_2}. \tag{6.4}$$

Если условия I и III выполнены с $r \geqslant 1$, то при помощи (6.4) не трудно установить ограниченность операторов T и L^{-1}.

Соответствующий методу В оператор Φ относит к дифференцируемой функции $y \in Y_2$ ее интерполяционный полином Эрмита $H[y;\ t]$ по узлам $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Следовательно на основании теоремы Бернштейна и (5.3)

$$\|\Phi y\|_{Y_2} = \max_t |H[y;\ t]| + \max_t |H'[y;\ t]\sqrt{1-t^2}| \leqslant$$
$$\leqslant (1+2n-1) \max_t |H[y;\ t]| \leqslant 2n \left[\max_t |y(t)| \cdot \max_t \sum_{i=1}^{n} |A_i(t)| + \right.$$
$$\left. + \max_t |y'(t)\sqrt{1-t^2}| \cdot \max_t \sum_{i=1}^{n} \frac{|B_i(t)|}{\sqrt{1-t_i^2}}\right] = O(n)\ \|y\|_{Y_2}$$

и поэтому

$$\|\Phi\| = O(n). \tag{6.5}$$

Если выполнены условия II, III и IV с $r \geqslant 2$, $\alpha > 0$, то можно аналогично 4 показать, что $\frac{d^2}{dt^2} Tx$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α и постоянной $D\|x\|_{X_2}$, причем D не зависит от x. Тогда существует такой полином $\tilde{y} \in \tilde{Y}_2$ степени не выше $2n-1$, что одновременно

$$\max_t |Tx - \tilde{y}| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) \|x\|_{X_2} \text{ и } \max_t \left|\frac{d}{dt}(Tx - \tilde{y})\right| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) \|x\|_{X_2}$$

и, следовательно,

$$\|Tx - \tilde{y}\|_{Y_2} = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) \|x\|_{X_2}. \tag{6.6}$$

В то же время существует и такой $\tilde{y} \in \tilde{Y}_2$, что

$$\|y - \tilde{y}\|_{Y_2} = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right). \tag{6.7}$$

Из (6.5), (6.6) и (6.7) видно, что (3.7) выполнено.

На основании III имеем в (3.9) в рассматриваемом случае

$$\varepsilon = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right).$$

Таким образом доказана

Теорема 3. *Если выполнены условия* I — V, *то при* $r \geqslant 2$, $\alpha > 0$ *уравнения* (2.1) — (2.3) *для определения n-го приближения задачи* (1.1) — (1.2) *методом* В *однозначно разрешимы для всех достаточно больших n и эти приближения $\tilde{x}^*$ сходятся к точному решению x^* со скоростью*

$$\max_t \left| \frac{d^k x^*}{dt^k} - \frac{d^k \tilde{x}^*}{dt^k} \right| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-2}}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m),$$

$$\max_t \left(\left| \frac{d^{2m+1} x^*}{dt^{2m+1}} - \frac{d^{2m+1} \tilde{x}^*}{dt^{2m+1}} \right| \sqrt{1-t^2} \right) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-2}}\right).$$

7. Теорема 4. *Если λ не является собственным числом задачи* (1.1) — (1.2), $p_1(t), \ldots, p_{2m}(t)$ *и* $y(t)$ *на* $[-1;\ 1]$ *непрерывны и удовлетворяют условию Липшица с положительным показателем* α, *то метод С при узлах Чебышева применим к приближенному решению этой задачи при всех достаточно больших n. Приближенные решения при этом сходятся к точному со скоростью*

$$\max_t \left| \frac{d^k x^*}{dt^k} - \frac{d^k \tilde{x}^*}{dt^k} \right| = O\left(n^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m). \tag{7.1}$$

Доказательство. Пусть Y_3 — пространство непрерывных на $[-1;\ 1]$ функций с обычной нормой

$$\|y\|_{Y_3} = \max_t |y(t)|. \tag{7.2}$$

Тогда в X_3 согласованная норма определена равенством

$$\|x\|_{X_3} = \max_t |x^{(2m)}(t)|. \tag{7.3}$$

В связи с методом совпадения показано [1], что операторы T и L^{-1} (если λ не собственное число задачи) ограничены относительно норм (7.2) и (7.3).

Подпространство $\tilde{X}_3$, соответствующее методу С, состоит из всех полиномов вида $(1-t^2)^m \sum_{i=1}^{2n} c_i t^{i-1}$, удовлетворяющих условию (2.4), а подпространство $\tilde{Y}_3$ — из всех полиномов степени не выше $2n-1$, первые производные которых имеют нулями $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Оператор Φ относит к любой функции $y(t)$ из Y_3 ее интерполяционный полином Фейера $F[y;\ t]$, определенный условиями

$$F[y;\ t_j] = y(t_j), \ \frac{d}{dt} F[y;\ t] \Big|_{t=t_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Как известно,

$$F[y;\ t] = \sum_{i=1}^{n} y(t_i) A_i(t).$$

По (5.3) для узлов Чебышева имеем

$$\|\Phi\| = O(1). \tag{7.4}$$

Если функция $y(t)$ на $[-1;\ 1]$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha > 0$ и постоянной K, то для узлов Чебышева имеет место оценка [5]

$$\max_t |y(t) - F[y;\ t]| \leqslant 5 \cdot 2^{\alpha} K n^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{7.5}$$

Из (7.5) следует, что условие (3.6) выполнено с $\mu_2 = O\left(n^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$.

В рассматриваемом теоремой случае T_x удовлетворяет условию Липшица с показателем α и постоянной $E\|x\|$, где E не зависит от x. Поэтому и (3.5) выполнено, причем $\mu_1 = O\left(n^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$. Из-за (7.4) условие (3.7) выполнено. Наконец, для (3.9) имеем $\varepsilon = O\left(n^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$, так что (7.1) следует из (3.8) и (6.3). Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
2. Э. Б. Карпиловская, Успехи матем. наук, т. VIII, вып. 3 (55), 1953, 111—118.
3. К. Б. Биценко, Р. Граммель, Техническая динамика, т. I, Гостехиздат, 1950.
4. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
5. O. Shisha, C. Sternin, M. Fekete, Riveon lemat., 8, 1954, 59—64.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
15. VII 1960

INTERPOLATSIOONITÜÜPI LIGIKAUDSETE MEETODITE KOONDUVUSEST HARILIKE DIFERENTSIAALVÕRRANDITE PUHUL

I. Petersen,
füüsikalis-matemaatiliste teaduste kandidaat

Resümee

Artiklis vaadeldakse rajaülesande (1.1) — (1.2) ligikaudse lahendamise meetodeid, milles lahend otsitakse polünoomina (1.3) ja kordajad c_i määrab tingimus, et võrrand (1.1) oleks teataval viisil rahuldatud antud sõlmedes $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Osapiirkondade meetodi [3] puhul on ligikaudne lahend määratud tingimustega (2.2), meetodi A puhul tingimustega (2.1) ja (2.2), meetodi B puhul tingimustega (2.1) ja (2.3) ning meetodi C puhul tingimustega (2.1) ja (2.4). Kasutades üldist ligikaudsete meetodite teooriat [1], antakse nende nelja meetodi koonduvustingimused ja koonduvuskiiruse hinnangud Tšebõševi sõlmede juhul.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
15. VII 1960

ÜBER DIE KONVERGENZ DER ANNÄHERUNGSMETHODEN VOM INTERPOLATIONSTYPUS FÜR GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

I. Petersen

Zusammenfassung

In der Abhandlung werden einige angenäherte Lösungsmethoden der Grenzwertaufgabe (1.1) — (1.2) betrachtet, die die Lösung in Form eines Polynoms (1.3) suchen, wobei die Koeffizienten c_i durch die Bedingung bestimmt sind, dass die Gleichung (1.1) in gewissem Sinne in gegebenen Knotenpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ erfüllt ist. Bei der Teilgebietsmethode [3] ist die angenäherte Lösung durch die Bedingungen (2.2), bei der Methode A durch (2.1) und (2.2), bei der Methode B durch (2.1) und (2.3), bei der Methode C durch (2.1) und (2.4) bestimmt. Auf Grund der allgemeinen Theorie der Annäherungsmethoden [1] werden die Konvergenzbedingungen dieser vier Methoden festgestellt und die Abschätzung ihrer Konvergenzgeschwindigkeit im Falle der Tschebyschevschen Knotenpunkte durchgefürt.

Institut für Kybernetik
der Akademie der Wissenschaften der Estnischen SSR

Eingegangen
am 15. Juli 1960