EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. X KÕIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1961, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ X
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1961, № 1

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

И. КУЛЛЬ,

кандидат физико-математических наук

Целью настоящей статьи является разработка метода нахождения необходимых и достаточных условий для линейных преобразований некоторых классов двойных последовательностей. В статье приводятся также два примера применения полученных результатов для исследования сходимости произведения двух рядов.

§ 1. В статье рассматриваются двойные последовательности $x = \{\xi_{kl}\}$ с комплексными членами. Рассмотрению подвергаются следующие классы двойных последовательностей: $\mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{c}_\lambda$, $\mathbf{c}^{\mathbf{m}}_\chi$ и $\mathbf{m}^{\mathbf{m}}_\chi$, определения которых можно найти в статье [5] (стр. 5—6)*.

Кроме того, используются и другие классы двойных последовательностей, определения которых даны ниже. Пусть задана двойная последовательность $\{\Phi_{kl}\}$, удовлетворяющая условию $\Phi_{kl} > 0$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$. При помощи ее определяем классы двойных последовательностей $\mathbf{m}_\Phi$, $\mathbf{mc}_\Phi$, $\mathbf{r}_\Phi$ и $\mathbf{l}_\Phi$ следующим образом: считаем, что $x = \{\xi_{kl}\} \in \alpha_\Phi$, если $\left\{\frac{\xi_{kl}}{\Phi_{kl}}\right\} \in \alpha$ ($\alpha = \mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$, $\mathbf{r}$ или $\mathbf{l}$). В частном случае, если $\Phi_{kl} = 1$, получаем классы $\mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{l}$.

Пусть задано счетное множество двойных последовательностей $\Phi^{(p)} = \{\Phi^{(p)}_{kl}\}$ $(p = 0, 1, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\Phi^{(p)}_{kl} > 0$ $(k, l, p = 0, 1, \ldots)$. При помощи этих последовательностей можем определить классы $\mathbf{m}^{(p)}_\Phi$, $\mathbf{mc}^{(p)}_\Phi$, $\mathbf{r}^{(p)}_\Phi$ и $\mathbf{l}^{(p)}_\Phi$, где классы $\alpha^{(p)}_\Phi$ ($\alpha = \mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$, $\mathbf{r}$ или $\mathbf{l}$) определены при помощи $\Phi^{(p)}$. При помощи этих классов получаем новые классы $\mathbf{m}^*_\Phi = \bigcup_p \mathbf{m}^{(p)}_\Phi$, $\mathbf{mc}^*_\Phi = \bigcup_p \mathbf{mc}^{(p)}_\Phi$, $\mathbf{r}^*_\Phi = \bigcup_p \mathbf{r}^{(p)}_\Phi$ и $\mathbf{l}^*_\Phi = \bigcup_p \mathbf{l}^{(p)}_\Phi$.

В частности, положив

$$\Phi^{(p)}_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } k, l > p, \\ \chi(k,l), & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

получаем $\mathbf{m}^{\mathbf{m}}_\chi = \mathbf{m}^*_\Phi$ и $\mathbf{c}^{\mathbf{m}}_\chi = \mathbf{mc}^*_\Phi$.

---

* Кроме этих классов можно рассматривать и другие классы ограниченных двойных последовательностей, как *BCN*, *RCN*, *RCRN* и т. д., которые определены в работе Гамильтона [1]. Все последующие математические конструкции в той же мере возможны и для этих классов (и не только для двойных последовательностей). В настоящей статье выбраны, по нашему мнению, наиболее существенные классы двойных последовательностей.

§ 2. Пусть α и β некоторые классы двойных последовательностей. Рассматриваем матричное преобразование

$$\xi'_{mn} = \sum_{k,l} a_{mnkl}\, \xi_{kl} \qquad (m, n = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

где a_{mnkl} $(m, n, k, l = 0, 1, \ldots)$ — комплексные числа. Ищем необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование (1) переводило все последовательности $x = \{\xi_{kl}\}$ класса α в последовательности $x' = \{\xi'_{mn}\}$ класса β. При этом подразумевается, что двойные ряды в (1) сходятся при всех $x \in \alpha$ и $m, n = 0, 1, \ldots$. Искомые необходимые и достаточные условия назовем необходимыми и достаточными (или коротко: точными) условиями линейного преобразования $\alpha \to \beta$.

Поставленную проблему нахождения точных условий можно решить методами функционального анализа, как это сделано в статьях [2] и [5]. Для нахождения точных условий линейных преобразований, рассматриваемых в настоящей статье, можно обойтись без прямого применения методов функционального анализа, сведя их нахождение к применению точных условий уже известных линейных преобразований.

В первую очередь изучим линейные преобразования $\alpha_\Phi \to \beta_\psi$, где α_Φ — один из классов $\mathbf{m}_\Phi$, $\mathbf{mc}_\Phi$, $\mathbf{r}_\Phi$ или $\mathbf{l}_\Phi$ и β_ψ — один из классов $\mathbf{m}_\psi$, $\mathbf{mc}_\psi$, $\mathbf{r}_\psi$ или $\mathbf{l}_\psi$. В этом случае $\left\{\frac{\xi_{kl}}{\Phi_{kl}}\right\} = \{\zeta_{kl}\} \in \alpha$ и $\left\{\frac{\xi'_{mn}}{\psi_{mn}}\right\} = \{\eta_{mn}\} \in \beta$.

Члены последовательностей x и x' можно привести к виду

$$\xi_{kl} = \Phi_{kl}\zeta_{kl} \qquad (k, l = 0, 1, \ldots)$$

и

$$\xi'_{mn} = \psi_{mn}\eta_{mn} \qquad (m, n = 0, 1, \ldots),$$

вследствие чего равенство (1) перепишется так:

$$\eta_{mn} = \sum_{k,l} \frac{\Phi_{kl}\, a_{mnkl}}{\psi_{mn}}\, \zeta_{kl} \qquad (m, n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где $\{\zeta_{kl}\} \in \alpha$ и $\{\eta_{mn}\} \in \beta$. Очевидно, что точные условия линейного преобразования $\alpha_\Phi \to \beta_\psi$ для матрицы $A = (a_{mnkl})$ совпадают с точными условиями линейного преобразования $\alpha \to \beta$ для матрицы

$$B = \left(\frac{\Phi_{kl}\, a_{mnkl}}{\psi_{mn}}\right).$$

Последние найдены в работах [1], [2] и [5], за исключением точного условия для линейных преобраозваний $\alpha \to \mathbf{l}$ $(\alpha \neq \mathbf{l})$, которое найдем в § 3 настоящей статьи.

Далее рассматриваем линейные преобразования $\alpha^*_\Phi \to \beta_\psi$, где α^*_Φ — один из классов $\mathbf{m}^*_\Phi$, $\mathbf{mc}^*_\Phi$, $\mathbf{r}^*_\Phi$ или $\mathbf{l}^*_\Phi$ и β_ψ имеет то же самое значение, что и выше. Для того, чтобы матрица $A = (a_{mnkl})$ удовлетворяла точным условиям линейного преобразования $\alpha^*_\Phi \to \beta_\psi$, она должна удовлетворять точным условиям линейного преобразования $\alpha^{(p)}_\Phi \to \beta_\psi$ для любого $p = 0, 1, \ldots$. Следовательно, матрицы

$$B_p = \left(\frac{\Phi^{(p)}_{kl}\, a_{mnkl}}{\psi_{mn}}\right)$$

должны удовлетворять точным условиям линейного преобразования $\alpha \to \beta$ для любого $p=0, 1, \ldots$.

Наконец, рассмотрим линейные преобразования $\alpha_\Phi^* \to \mathbf{c}_\lambda$. Аналогично рассуждая, придем к заключению, что в данном случае матрицы

$$C_p = (\Phi_{kl}^{(p)} a_{mnkl})$$

должны удовлетворять точным условиям линейного преобразования $\alpha \to \mathbf{c}_\lambda$ для любого $p=0, 1, \ldots$. Соответствующие условия даны в [5] (за исключением случая $\mathbf{m} \to \mathbf{c}_\lambda$, который приведем ниже).

Приведем теперь два примера получения точных условий линейных преобразований.

Пример 1. Найдем точные условия $\mathbf{mc}_\Phi^* \to \mathbf{mc}_\psi$. Матрицы B_p должны для любого $p=0, 1, \ldots$ удовлетворять условиям $\mathbf{mc} \to \mathbf{mc}$, т. е. условиям c_1, d_3 и d_4 (см. [5], стр. 19—21). Применяя их к матрицам B_p, получаем:

$$1^\circ \quad \sum_{k,l} \Phi_{kl}^{(p)} |a_{mnkl}| \leqslant M_p \psi_{mn} \qquad (m,n,p=0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \quad \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\psi_{mn}} \sum_{k,l} \Phi_{kl}^{(p)} a_{mnkl} = a_p \qquad (p=0, 1, \ldots),$$

$$3^\circ \quad \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} \Phi_{kl}^{(p)} \left| \frac{a_{mnkl}}{\psi_{mn}} - b_{kl} \right| = 0 \qquad (l,p=0, 1, \ldots),$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{l} \Phi_{kl}^{(p)} \left| \frac{a_{mnkl}}{\psi_{mn}} - b_{kl} \right| = 0 \qquad (k,p=0, 1, \ldots),$$

где $b_{kl} = \lim\limits_{m,n\to\infty} \dfrac{a_{mnkl}}{\psi_{mn}} \qquad (k,l=0, 1, \ldots)$.

Условия 1°, 2° и 3° и являются искомыми точными условиями $\mathbf{mc}_\Phi^* \to \mathbf{mc}_\psi$. В частности, из этих условий можно вывести точные условия для $\mathbf{mc}_\Phi^* \to \mathbf{mc}$, $\mathbf{mc}_\Phi \to \mathbf{mc}_\psi$, $\mathbf{mc}_\Phi \to \mathbf{mc}$, $\mathbf{mc} \to \mathbf{mc}_\psi$ и $\mathbf{mc} \to \mathbf{mc}$.

Пример 2. Найдем точные условия $\mathbf{m}_\Phi^* \to \mathbf{c}_\lambda$. Матрицы C_p должны для любого $p=0, 1, \ldots$ удовлетворять условиям $\mathbf{m} \to \mathbf{c}_\lambda$. Эти условия легко найти, применяя использованный в статье [5] метод функционального анализа. Учитывая существование преобразования (1), получаем условие a_1:

$$\sum_{k,l} |a_{mnkl}| < +\infty \qquad (m, n=0, 1, \ldots),$$

учитывая ограниченность в смысле $\mathbf{m}_\lambda$, получаем условие $\bar{c}_1$:

$$\sum_{k,l} |a_{mnkl}| \leqslant M(\lambda) \qquad \left(\text{при любых } \lambda \geqslant 1 \text{ и для всех } m,n, \text{ удовлетворяющих условию } \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda\right).$$

Учитывая сходимость в смысле $\mathbf{c}_\lambda$ на основном множестве пространства $\mathbf{m}$, получаем

$$\lim_{(m,n)_\lambda \to\infty} \sum_{k,l\in G} a_{mnkl} = a(G),$$

где G означает любое подмножество множества пар неотрицательных целых чисел.* Последнее условие можно привести к следующему более удобному виду:

$$\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty} \sum_{k,l} |a_{mnkl} - a_{kl}| = 0,$$

где $a_{kl} = \lim\limits_{(m,n)_\lambda \to \infty} a_{mnkl}$ $(k, l = 0, \ldots)$.**

Точные условия линейного преобразования $\mathfrak{m}_\Phi^* \to \mathfrak{c}_\lambda$, на основе сказанного, суть следующие:

$$1^\circ \quad \sum_{k,l} \Phi_{kl}^{(p)} |a_{mnkl}| < +\infty \qquad (m, n, p = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \quad \sum_{k,l} \Phi_{kl}^{(p)} |a_{mnkl}| \leqslant M_p(\lambda) \qquad \left(p = 0, 1, \ldots, \text{ при любых } \lambda \geqslant 1 \text{ и для всех } m, n, \text{ удовлетворяющих условию } \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda\right),$$

$$3^\circ \quad \lim_{(m,n)_\lambda \to \infty} \sum_{k,l} \Phi_{kl}^{(p)} |a_{mnkl} - a_{kl}| = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots),$$

где $a_{kl} = \lim\limits_{(m,n)_\lambda \to \infty} a_{mnkl}$.

В частности, из этих условий можно вывести точные условия для $\mathfrak{m}_\Phi \to \mathfrak{c}_\lambda$ и $\mathfrak{m} \to \mathfrak{c}_\lambda$.

§ 3. Теперь выведем точное условие линейных преобразований $\alpha \to \mathfrak{l}$ $(\alpha = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{mc}$ или $\mathfrak{r})$. Вывод этого условия аналогичен выводу соответственного условия в случае простых последовательностей.***

Нам нужна следующая

Лемма. *Для того, чтобы $x \in \mathfrak{l}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная K, такая что*

$$\left| \sum_{k,l \in \mathfrak{M}} \xi_{kl} \right| \leqslant K, \tag{3}$$

для любого $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ означает конечное множество пар неотрицательных целых чисел.

Доказательство. Необходимость условия (3) очевидна. Докажем достаточность. Поскольку $\xi_{kl} = c_{kl} + i d_{kl}$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$, то

$$\left| \sum_{k,l \in \mathfrak{M}} c_{kl} \right| \leqslant \left| \sum_{k,l \in \mathfrak{M}} \xi_{kl} \right| \leqslant K$$

имеет место для любого $\mathfrak{M}$. Выбрав $\mathfrak{M}$ таким, что $c_{kl} \geqslant 0$, получаем

---

* Основное множество пространства $\mathfrak{m}$ составляется всевозможными последовательностями, членами которых являются числа 0 или 1 в произвольном порядке (см. [2], стр. 158—159).

** См. условие (d_5) в работе Гамильтона [1].

*** См. Пейеримхофф [3], стр. 141—142.

$$\sum_{k,l\in\mathfrak{M}} |c_{kl}| \leqslant K, \tag{4}$$

вследствие чего неотрицательные вещественные части комплексных чисел ξ_{kl} образуют абсолютно сходящийся ряд. Таким же образом находим, что все отрицательные вещественные, неотрицательные мнимые и отрицательные мнимые части комплексных чисел ξ_{kl} образуют абсолютно сходящиеся ряды. Неравенство (4) показывает, что сумма ни одного из этих четырех рядов не превосходит K. Следовательно,

$$\sum_{k,l} |\xi_{kl}| \leqslant 4K, \tag{5}$$

чем лемма доказана.

Теорема. *Для того, чтобы преобразование* (1) *переводило все последовательности класса* $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = \mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$ *или* $\mathbf{r}$) *в последовательности класса* $\mathbf{l}$, *необходимо и достаточно существование постоянной* M, *такой что*

$$\left| \sum_{m,n\in\mathfrak{M}} \sum_{k,l\in\mathfrak{K}} a_{mnkl} \right| \leqslant M, \tag{6}$$

для любых $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{K}$, *где* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{K}$ — *конечные множества пар неотрицательных целых чисел.*

Доказательство. Для сходимости ряда (1) при любом $x \in \mathfrak{a}$ и $m, n = 0, 1, \ldots$ необходимо и достаточно условие a_1.* Для того, чтобы $x' \in \mathbf{l}$, по лемме необходимо и достаточно условие (3), которое в данном случае принимает вид

$$\left| \sum_{m,n\in\mathfrak{M}} \left(\sum_{k,l} a_{mnkl}\xi_{kl} \right) \right| \leqslant K, \tag{7}$$

где K не зависит от $\mathfrak{M}$, но может зависеть от $\{\xi_{kl}\}$. Так как ряды в условии (7) при любом $m, n = 0, 1, \ldots$ сходятся и $\mathfrak{M}$ — конечное множество, можно условие (7) представить в виде

$$\left| \sum_{k,l} \left(\sum_{m,n\in\mathfrak{M}} a_{mnkl} \right) \xi_{kl} \right| \leqslant K. \tag{8}$$

Поскольку все конечные подмножества $\mathfrak{M}$ пар неотрицательных целых чисел можно упорядочить в последовательность, то выражение в скобках в условии (8) можно рассматривать как линейное преобразование $\mathfrak{a} \to \mathbf{m}$, точным условием которого является c_1, что в данном случае дает **

$$\sum_{k,l} \left| \sum_{m,n\in\mathfrak{M}} a_{mnkl} \right| \leqslant M \qquad (\text{для любого } \mathfrak{M}). \tag{9}$$

Согласно условию (3) леммы можем неравенство (9) переписать в виде (6), чем теорема доказана.

Относительно этой теоремы сделаем некоторые примечания.

---

* См. Гамильтон [1], стр. 41 и 47.

** См. там же, стр. 42 и 47.

Примечание 1. Условия (6), (9) и

$$\sum_{m,n}\left|\sum_{k,l\in\mathfrak{K}} a_{mnkl}\right| \leqslant M' \tag{10}$$

равносильны. Равносильность их вытекает из доказанной выше леммы Условие a_1 существования преобразования (1) содержится в самих условиях (6), (9) и (10).

Примечание 2. Условие $\sum\limits_{m,n}\sum\limits_{k,l}|a_{mnkl}| < +\infty$ достаточно для преобразования $\alpha\to\mathbf{l}$ ($\alpha=\mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$ или $\mathbf{r}$), но не необходимо. Чтобы опровергнуть ее необходимость применим аналогичный результат для простых рядов. А именно, Пейеримхофф показал, что матрица с элементами

$$a_{mk}=\frac{1}{m+1}\int\limits_{\ln(k+1)}^{\ln(k+2)} e^{imt}\,\frac{dt}{(t+1)^2}$$

переводит все ограниченные простые последовательности в абсолютно сходящиеся, в то время как

$$\sum_m\sum_k|a_{mk}|=\infty.^{*}$$

Положив в (1)

$$a_{mnkl}=\begin{cases} a_{mk}, & \text{если } n=m \text{ и } l=k,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

находим, что преобразование (1) переводит все последовательности $\{\xi_{kl}\}\in\mathbf{m}$ в последовательности $\{\xi'_{mn}\}\in\mathbf{l}$, в то время как

$$\sum_{m,n}\sum_{k,l}|a_{mnkl}|=\sum_m\sum_k|a_{mk}|=\infty.$$

Примечание 3. Учитывая то обстоятельство, что результаты Гамильтона [1] справедливы для q-кратных ($q\geqslant 1$) последовательностей, можно лемму и теорему настоящего параграфа без существенных изменений сразу доказать для q-кратных последовательностей. При этом $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$ нужно понимать как конечные множества упорядоченных систем q неотрицательных целых чисел.

Примечание 4. Условие (6) (или равносильные ему условия (9) или (10)) является точным условием линейного преобразования $\alpha\to\mathbf{l}$ не только в случаях $\alpha=\mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$ или $\mathbf{r}$, но также в случаях $\alpha=BCN$, RCN, $RCRN$ и других классов ограниченных последовательностей, определенных в статье [1]. Это объясняется тем, что точное условие преобразования $\alpha\to\mathbf{m}$ для всех этих классов α то же самое — c_1. Применение условия c_1 к (8) во всех этих случаях дает условие (9).

§ 4. Наконец, применим полученные условия для исследования проблемы умножения двойных рядов, где ряд-произведение составляется по правилу Коши. По этому правилу член w_{st} ряда-произве-

* См. Пейеримхофф [4], стр. 35—36.

дения $\sum w_{kl}$ двух рядов $\sum u_{kl}$ и $\sum v_{kl}$ определяется следующим образом:

$$w_{st} = \sum_{k,\,l=0}^{s,\,t} v_{s-k,\,t-l}\, u_{kl} \qquad (s, t = 0, 1, \ldots), \tag{11}$$

где, суммируя по s и t, получаем для частичной суммы W_{mn} ряда-произведения следующее выражение:

$$W_{mn} = \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} v_{m-k,\,n-l} U_{kl} \qquad (m, n = 0, 1, \ldots). \tag{12}$$

Ищем необходимые и достаточные условия для того, чтобы из $\{U_{kl}\} \in \mathbf{r}_\Phi$ всегда следовало $\{W_{mn}\} \in \mathbf{mc}_\psi$. Соотношение (12) можно рассматривать как линейное преобразование, которое должно удовлетворять точным условиям $\mathbf{r}_\Phi \to \mathbf{mc}_\psi$. Таким образом, для решения поставленной проблемы умножения рядов получаем следующие точные условия:

$$1^\circ \quad \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} \Phi_{kl} |v_{m-k,\,n-l}| \leqslant M\psi_{mn} \qquad (m, n = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \quad \lim_{m,\,n \to \infty} \frac{1}{\psi_{mn}} \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} \Phi_{kl}\, v_{m-k,\,n-l} = a,$$

$$3^\circ \quad \lim_{m,\,n \to \infty} \frac{1}{\psi_{mn}} \sum_{k=0}^{m} \Phi_{kl}\, v_{m-k,\,n-l} = a_l \qquad (l = 0, 1, \ldots).$$

$$\lim_{m,\,n \to \infty} \frac{1}{\psi_{mn}} \sum_{l=0}^{n} \Phi_{kl}\, v_{m-k,\,n-l} = a'_k \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

$$4^\circ \quad \lim_{m,\,n \to \infty} \frac{v_{m-k,\,n-l}}{\psi_{mn}} = a_{kl} \qquad (k, l = 0, 1, \ldots).^*$$

В заключение докажем еще одну теорему об умножении двойных рядов, в которой воспользуемся точным условием для $\alpha \to \mathbf{l}$ $(\alpha \neq \mathbf{l})$.

Теорема. *Для того, чтобы ряд-произведение $\sum w_{kl}$ двух рядов $\sum u_{kl}$ и $\sum v_{kl}$ было абсолютно сходящимся для любого $\sum u_{kl}$, частичные суммы которого принадлежат классу α $(\alpha = \mathbf{m}, \mathbf{mc}, \mathbf{r}, \ldots, RCRN)$, необходимо и достаточно, чтобы $v_{kl} = 0$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$.*

Доказательство. Достаточность условия теоремы сразу вытекает из (11). Для доказательства необходимости перепишем (11) в виде

* Условие 2° дает идею для определения нового метода суммирования, где за обобщенную сумму ряда $\sum u_{kl}$ понимается предел $\lim\limits_{m,\,n \to \infty} \frac{1}{b_{mn}} \sum\limits_{k,\,l=0}^{m,\,n} a_{m-k,\,n-l}\, U_{kl}$. Определенный метод суммирования является обобщением метода Вороного-Нерлунда.

$$w_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \Delta_{kl} v_{m-k,\, n-l} \cdot U_{kl} \qquad (m, n = 0,\ 1, \ldots), \tag{13}$$

где $\{U_{kl}\} \in \alpha$ и $\{w_{mn}\} \in \mathbf{1}$. Следовательно, матрица $(\Delta_{kl} v_{m-k,\, n-l})$ должна удовлетворять точному условию $\alpha \to \mathbf{1}$, т. е. должно выполняться

$$\left| \sum_{m,n \in \mathfrak{M}} \sum_{k,l \in \mathfrak{K}} \Delta_{kl} v_{m-k,\, n-l} \right| \leqslant M. \tag{14}$$

Взяв в неравенстве (14) $\mathfrak{K}\{(0,\ 0)\}$, получаем, согласно лемме параграфа 3, что ряд

$$\sum_{m,n} \Delta_{mn} v_{mn} \tag{15}$$

сходится абсолютно.

Теперь покажем, что $v_{00} = 0$. Для этого определим множества $\mathfrak{M}_j = \mathfrak{K}_j = \{(0,0),\ (2,2),\ \ldots,\ (n_j,\ n_j)\}$, где $n_j = 2n_{j-1} + 2$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и $n_0 = 0$. Вставляя $\mathfrak{M}_j$ и $\mathfrak{K}_j$ в соотношение (14), получаем

$$|(j+1) v_{00} + \Delta_{22} v_{22} + \ldots + \Delta_{n_j n_j} v_{n_j n_j}| \leqslant M. \tag{16}$$

Учитывая абсолютную сходимость ряда (15), должно

$$|(j+1) v_{00}| \leqslant M$$

для любого j, откуда следует $v_{00} = 0$.

Допустим, что $v_{kl} = 0$, если $k \leqslant s-1$ или $l \leqslant t-1$ и докажем, что тогда $v_{st} = 0$. Для доказательства последнего определим множества $\mathfrak{K}_j$ как выше, но множества $\mathfrak{M}_j$ определим следующим образом: если $(p,\ q) \in \mathfrak{K}_j$, то $(p+s,\ q+t) \in \mathfrak{M}_j$. Вставляя эти множества в соотношение (14), получаем неравенство, аналогичное (16), лишь с тем отличием, что все первые индексы больше на s и все вторые индексы больше на t. Отсюда следует, что

$$|(j+1) v_{st}| \leqslant M$$

для любого j, откуда, в свою очередь, $v_{st} = 0$. Этим теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место и для простых рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Hamilton, Transformations of multiple sequences, Duke Math. J., Vol. 2, No. 1, 1936, 29—60.
2. J. D. Hill and H. J. Hamilton, Operation theory and multiple sequence transformations, Duke Math. J., Vol. 8, No. 1, 1941, 154—162.
3. A. Peyerimhoff, Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren I, Publications de l'Institut Mathématique, VIII, 1955, 139—156.
4. A. Peyerimhoff, Über ein Lemma von Herrn H. C. Chow, J. London Math. Soc., 32, 1957, 33—36.
5. И. Г. Кулль, Умножение суммируемых двойных рядов, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 62, 1959, 3—59.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 24. VII 1959

TEATAVATE KAHEKORDSETE JADADE KLASSIDE LINEAARTEISENDUSED

I. Kull,
füüsikalis-matemaatiliste teaduste kandidaat

Resümee.

Artiklis vaadeldakse kahekordseid jadasid $x=\{\xi_{kl}\}$ kompleksarvuliste liikmetega. Töös defineeritakse järgmised kahekordsete jadade klassid: $\mathbf{m}_{\Phi}$, $\mathbf{mc}_{\Phi}$, $\mathbf{r}_{\Phi}$, $\mathbf{l}_{\Phi}$, $\overset{*}{\mathbf{m}}_{\Phi}$, $\overset{*}{\mathbf{mc}}_{\Phi}$, $\overset{*}{\mathbf{r}}_{\Phi}$ ja $\overset{*}{\mathbf{l}}_{\Phi}$, mis on tuntud kahekordsete jadade klasside $\mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$, $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{l}$ üldistuseks (§ 1).

Töös antakse meetod tarvilike ja piisavate tingimuste saamiseks lineaarteisenduste $\alpha \rightarrow \beta$ jaoks, kus α tähistab mistahes klassi ülaltoodud klassidest, β aga on kas klass $\mathbf{m}_{\psi}$, $\mathbf{mc}_{\psi}$, $\mathbf{r}_{\psi}$, $\mathbf{l}_{\psi}$ või $\mathbf{c}_{\lambda}$ (§ 2).

Edasi antakse tarvilik ja piisav tingimus lineaarteisenduste $\alpha \rightarrow \mathbf{l}$ ($\alpha=\mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$, $\mathbf{r}$) jaoks (§ 3).

Töös tuuakse kaks näidet saadud tingimuste rakendamise kohta Cauchy korrutisrea koonduvuse uurimiseks (§ 4).

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
24. VII 1959

LINEAR TRANSFORMATIONS OF CERTAIN CLASSES OF DOUBLE SEQUENCES

I. Kull

Summary

In the present paper double sequences $x=\{\xi_{kl}\}$ with complex-valued elements are considered. In this paper the following classes of double sequences are defined: $\mathbf{m}_{\Phi}$, $\mathbf{mc}_{\Phi}$, $\mathbf{r}_{\Phi}$, $\mathbf{l}_{\Phi}$, $\overset{*}{\mathbf{m}}_{\Phi}$, $\overset{*}{\mathbf{mc}}_{\Phi}$, $\overset{*}{\mathbf{r}}_{\Phi}$ and $\overset{*}{\mathbf{l}}_{\Phi}$, which generalize the well-known classes $\mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$, $\mathbf{r}$ and $\mathbf{l}$ respectively (§ 1).

The author gives the method of obtaining the necessary and sufficient conditions for the linear transformations $\alpha \rightarrow \beta$, where α denotes one of the classes given above, and β is one of the classes $\mathbf{m}_{\psi}$, $\mathbf{mc}_{\psi}$, $\mathbf{r}_{\psi}$, $\mathbf{l}_{\psi}$ or $\mathbf{c}_{\lambda}$ (§ 2).

Further, the necessary and sufficient condition is given for the linear transformations $\alpha \rightarrow \mathbf{l}$ ($\alpha=\mathbf{m}$, $\mathbf{mc}$, $\mathbf{r}$) (§ 3).

Two examples are presented on the application of these conditions to the investigation of the convergence of the Cauchy product series (§ 4).

Tartu State University

Received
July 24th, 1959