

УДК 535.552.24

Альфред Пуро\*

## К ПРИМЕНЕНИЮ ЗАКОНА СУММЫ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ

(Представил Х. Абен)

Рассматривается задача определения осесимметричного распределения напряжений в прозрачном теле вращения по результатам его сквозного просвечивания [1] в предположении слабой оптической анизотропии [2, 3]. Боковая поверхность тела считается свободной от нагрузок. Изменение разности фаз и параметра изоклины [4] проводится в семействе плоскостей ортогональных оси тела  $z$ . При таком проведении исследований на основе экспериментальных данных и уравнений равновесия удастся определить только компоненту тензора напряжений  $\sigma_{zz}$ , нормальную к плоскости просвечивания, и тангенциальную компоненту  $\sigma_{\rho z}$  [5, 6].

Нахождение остальных компонент связано с обратной задачей теории упругости, решение которой для случая напряжений, вызванных внешними нагрузками, рассмотрено в [7, 8].

Определение внутренних напряжений, обусловленных дисторсией, является качественно более сложной проблемой. Для стекла она несколько облегчается тем фактом, что в большинстве случаев тензор остаточных деформаций в нем шаровой  $\epsilon^0_{xx} = \epsilon^0_{yy} = \epsilon^0_{zz} = \alpha T_0$  и может характеризоваться одним параметром  $T_0$  — эффективной температурой остаточных деформаций [9]. Решение обратной задачи термоупругости в случае плоской деформации ( $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ) позволяет восстановить напряжения полностью [10]. Частное ее решение для круглых образцов приводит к закону суммы [1, 11], который в некоторых работах [12] предлагается использовать для нахождения напряжения в случае его произвольного осесимметричного распределения.

Ниже приведен вывод краевой задачи, позволяющей по экспериментальным данным восстановить напряженное состояние полностью. Интересно отметить, что методы решения этой задачи достаточно подробно описаны в литературе и поэтому нами подробно не рассматриваются.

В случае слабой оптической анизотропии при просвечивании в плоскости  $x, y$  вдоль луча  $l$  можно измерить два лучевых интеграла [2, 3]

$$A(m, \theta) = \int (m_i m_j \sigma_{ij} - \sigma_{zz}) dl; \quad H(m, \theta) = \int m_i \sigma_{iz} dl.$$

Здесь  $i, j = x, y$ ; по повторяющемуся индексу ведется суммирование;  $m_i$  — компоненты единичного вектора, нормального к лучу  $l$ ;  $m_x = \cos \theta$ ,  $m_y = \sin \theta$ ;  $m$  — расстояние от начала координат до прямой  $l$ .

Значение осевой компоненты напряжений  $\sigma_{zz}$  определяется из обращения линейной комбинации лучевых интегралов [4, 5]

$$\int \sigma_{zz} dl = -\frac{\partial}{\partial z} \int_m^{m_1} H(m', \theta, z) dm' - A(m, \theta, z).$$

Здесь  $m_1$  — одна из крайних точек проекции контура сечения на ось  $m$ .

\* Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut (Институт кибернетики Академии наук Эстонии), 200108 Akadeemia tee 21, Estonia.

Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, z$ , совместив ось  $z$  с осью тела вращения. При осесимметричном распределении напряжений лучевые интегралы не зависят от угла  $\theta$  и их обращение упрощается. Компоненты  $\sigma_{zz}, \sigma_{rz}$  восстанавливаются по исходным измерениям с помощью инверсии Абелевских интегралов

$$2 \int_m^R \frac{\sigma_{zz}(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} \rho d\rho = \frac{\partial}{\partial z} \int_m^R H(m', z) dm' - A(m, z),$$

$$2m \int_m^R \frac{\sigma_{rz}(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} d\rho = H(m).$$

Здесь  $R(z)$  — радиус сечения исследуемого объекта.

Одним из наиболее простых и эффективных методов обращения этих интегралов является разложение разыскиваемых функций по полиномам Цернике  $R_n^h(\rho)$

$$\sigma_{zz}(\rho) = \sum_{h=0} \sigma_h^0 R_0^h(\rho); \quad \sigma_{rz}(\rho) = \sum_{h=0} \sigma_h^1 R_0^h(\rho).$$

Способ определения коэффициентов в разложении достаточно подробно описан Кормаком [13]. Отметим простую связь между полиномами Цернике  $R_0^h(\rho) = P_h(2\rho^2 - 1)$  и полиномами Лежандра  $P_h(x)$ . Можно показать, что применение такого разложения облегчает во многих случаях дальнейшее решение задачи.

Таким образом, будем считать известными функции  $\sigma_{zz}, \sigma_{rz}$  в исследуемом объеме. Для нахождения остальных компонент тензора напряжений воспользуемся уравнениями равновесия и соотношениями Дюгамеля—Неймана в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \sigma_\rho + \frac{(\sigma_\rho - \sigma_\varphi)}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_{rz}) = - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}, \quad (2)$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_\rho = 2\mu \frac{\partial u}{\partial \rho} + h; \quad \sigma_\varphi = 2\mu \frac{u}{\rho} + h; \quad \sigma_z = 2\mu \frac{\partial \omega}{\partial z} + h;$$

$$h = \lambda \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} \right) + 3K\alpha(T - T_0).$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  $K$  — модуль объемного сжатия,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения,  $(T - T_0)$  — учитывает как действительную, так и эффективную температуру дисторсий.

Преобразуем исходную систему соотношений с целью получить разрешающее уравнение относительно  $\sigma_\rho$ . Используя выражение для  $\sigma_\rho$  и  $\sigma_\varphi$ , преобразуем уравнение (1)

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \sigma_\rho + \frac{2\mu u}{\rho} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} = 0$$



и проинтегрируем его по  $q$

$$2\mu u = -q \left\{ \sigma_p + \frac{\partial}{\partial z} \tau - c \right\}, \quad (4)$$

где  $\tau = \int_0^p \sigma_{pz}(t, z) dt$ ;  $C(z)$  — постоянная интегрирования

$$C(z) = + \left[ \sigma_p(0, z) + 2\mu \lim_{p \rightarrow 0} \frac{u(q, z)}{q} \right].$$

Представляя в разность  $\sigma_z - \sigma^0$  значение  $u$  из (4), преобразуем ее к виду

$$\sigma_z - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} [q^2 \sigma_p] + \frac{\partial}{\partial q} \left[ q \frac{\partial}{\partial z} \tau \right] - C(z). \quad (5)$$

Заметим, что соотношение (5) в случае плоской деформации ( $\sigma_{pz} = \partial w / \partial z = 0$ ) выражает известный закон суммы [1, 11].

Исключим также  $u$  из (3)

$$2\sigma_{pz} = 2\mu \left[ \frac{\partial w}{\partial q} \right] - 2q \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sigma_p - C(z) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \right]. \quad (6)$$

Окончательный результат получаем дифференцированием (5) по  $q$ , (6) по  $z$  и вычитанием одного из другого

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} (q^2 \sigma_p) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} q \sigma_p = \frac{\partial}{\partial q} \sigma_z + q \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma_z - 3 \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{pz} - \\ - q \frac{\partial^3}{\partial z^3} \tau + q \frac{\partial^2}{\partial z^2} C(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, проблема восстановления в объеме значений  $\sigma_p$ ,  $\sigma_\varphi$  по известным  $\sigma_z$  и  $\sigma_{zp}$  сводится к решению краевой задачи, определяемой уравнением в частных производных (7) и краевыми условиями на свободной боковой поверхности  $q = R(z)$

$$\sigma_p = \left[ \frac{\partial}{\partial z} R(z) \right]^2 \sigma_{zz}. \quad (8)$$

Значения  $\sigma_z$  и  $\sigma_{zp}$  при этом связаны уравнением (3), а компонента  $\sigma_z$  удовлетворяет условию статики — сохранению главного вектора силы в сечении

$$\int_0^{R(z)} \sigma_z(q, z) q dq = 0. \quad (9)$$

Общее исследование краевой задачи начнем с рассмотрения однородного уравнения, приравнявая в (7) правую часть нулю.

Оно является стандартным уравнением математической физики, получающимся при решении уравнения Лапласа относительно угловой гармоник  $\sigma(q, z) \cos \varphi = q \sigma_p(q, z) \cos \varphi$ . Такое уравнение, в частности, возникает в связи с задачами кручения вокруг оси тел вращения [14]. В связи с проблемой концентрации напряжений в валах с переменным сечением для нахождения его решения были разработаны различные методы, в том числе, методы электроаналогий, численные и аналитические. Прежде чем завершить рассмотрение краевой задачи, остановимся на правой части уравнения, определяющей частные решения.

Произвольная функция  $C(z)$ , входящая в (7), определяет частное решение  $\sigma_p(z) = C(z)$ . Из уравнения (1) для него находим  $\sigma_\varphi^1(z) = \sigma_p(z) =$

$=C(z)$ , причем в этом случае  $\sigma_{\rho z}^1(q)$  зависит только от  $q$ , а следовательно,  $\sigma_z^1(q, z)$  является линейной функцией от  $z$ . Покажем, что на самом деле этому решению соответствует  $\sigma_z^1(q, z) = (\sigma_0 + \sigma_1 z) + (\sigma_2 + \sigma_3 z) q^2$ . Действительно, из (4) следует, что  $u_1(q, z) = u_1(q, z) q$ , а из (6) —  $2\mu\omega_1(q, z) = 2\mu\omega_1(z) - \mu u_1'(z) q^2 + 2\tau(q)$ . Окончательный результат получается из анализа выражения (5). Условие равновесия (9) позволяет определить форму тела, в котором может существовать это решение

$$R^2(z) = -2(\sigma_0 + \sigma_2 z) / (\sigma_3 + \sigma_4 z). \quad (10)$$

Уравнению (10) соответствует незамкнутая поверхность, на бесконечности переходящая в цилиндрическую и имеющая почти параболическое начало. При  $\sigma_4 = 0$  поверхность переходит в параболоид вращения. Значение  $\sigma_\rho$  для этого решения находится из граничного условия (8).

Заканчивая вопрос о приведении уравнения (7) к однородному, укажем второе частное решение, окончательно решающее эту проблему

$$q\sigma_\rho(q, z) = -\int_0^z \sigma_{\rho z}(q, t) dt - q \frac{\partial}{\partial z} \tau + \int_0^p t \sigma_z(t, 0) dt. \quad (11)$$

Таким образом, краевая задача свелась к решению однородного уравнения (7) с соответственно измененными краевыми условиями.

Не разбирая всех способов решения краевой задачи (7), (8), (9), остановимся кратко на методе сращивания асимптотических разложений [15]. Для получения решения в этом методе исследуемая область разбивается на части в зависимости от характерных параметров (размеров области, изменения кривизны поверхности или внешних сил). Решение строится для каждого участка отдельно, чаще всего используя для этого асимптотическое разложение; полностью для всего объема окончательный результат получается путем сращивания этих решений. Проще всего асимптотическое решение получается для удлиненных частей тела с медленно меняющейся формой. В этом случае главный член асимптотического разложения получается из решения плоской задачи, удовлетворяющей краевым условиям; т. е. в уравнении (7) в левой части производная по  $z$  приравнивается нулю. Решение этого уравнения известно, оно выражается суммой двух частных решений

$$\sigma_\rho(q, 0) = \sigma_\rho^1(q) + \sigma_\rho^2(q, 0).$$

Значение  $\sigma_\rho^1$  определяется из краевого условия (8). Ясно, что для участка тела с плавно изменяющейся границей решение задачи можно проводить, используя измерения в нескольких сечениях с последующей аппроксимацией значений  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\rho z}$  на весь объем сплайнами. Решение краевой задачи для всего выделенного объема позволяет существенно улучшить нулевое приближение. Завершая обсуждение вопроса о построении нулевого приближения, в качестве справки приведем выражения интегралов, входящих в (11), для случая, когда  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\rho z}$  представлены в виде рядов по полиномам Цернике

$$\int_0^p t R_0^m(t) dt = \frac{q}{2(2m+1)} (R_1^m(q) - R_1^{m-1}(q)),$$

$$\int_0^p R_1^m(t) dt = \frac{q}{2(2m+1)} (R_0^m(q) - R_0^{m+1}(q)).$$

Использование этих интегралов позволяет существенно упростить процесс вычисления окончательных результатов.



Таким образом, проблема полного определения внутренних напряжений методом интегральной фотоупругости сведена к решению хорошо изученной краевой задачи. Для определенных форм тела и напряжений решение этой задачи можно проводить локально, используя асимптотические разложения. В качестве примера построено нулевое приближение для участков тела с плавно изменяющейся границей. Это решение обобщает известный закон суммы, применяемый при плоской деформации цилиндров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость. Таллинн, Валгус, 1975.
2. Aben, H. K., Josepson, J. I., Kell, K.-J. E. Opt. and lasers in engineering, 1989, 11, 145—157.
3. Келл К.-Ю. Э., Пуру А. Э. Опт. и спектр., 1991, 70, 2, 390—393.
4. Абен Х., Иднурм С., Пуру А. Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, 3, 268—275.
5. Пуру А. Э. Томография при слабой оптической анизотропии. — В кн.: Тез. докл. 4. Всесоюз. симпозиума по вычислительной томографии. Т. I. Новосибирск, 1989, 36—37.
6. Шарафутдинов В. А. ДАН СССР, 1990, 311, 2, 350—353.
7. Aben, H. Rev. franc. мес., 1989, 1, 121—131.
8. Пуру А. Э. Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1991, 2, 41—48.
9. Бартенев Г. М. Строение и механические свойства неорганических стекол. Москва, Изд. литерат. по строительству, 1966.
10. Пуру А. Э. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1991, 4.
11. O'Rourke, R. C. J. Appl. Phys., 1951, 22, 7, 872—878.
12. Godbole, P. B., Chaudhari, U. M., Bhave, S. K. Exp. Mech., 1987, 27, 1, 31—36.
13. Cormak, A. M. J. Appl. Phys., 1964, 35, 6, 2908—2913.
14. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. Москва, Наука, 1979.
15. Коул Д. Методы возмущений в прикладной математике. Москва, Мир, 1972.

Поступила в редакцию  
28/III 1991

Alfred PURO

## SUMMA SEADUSE KASUTAMISEST INTEGRAALSES FOTOELASTSUSES

On vaadeldud pöördkehades telgsümmeetriliste sisepingete määramist integraalse fotoelastsuse meetodil. Läbivalgustus toimub keha teljega risti olevates tasandites. Pingete määramine teisendatakse matemaatilise füüsika ääreväärtusülesande lahendamiseks. Asümptootilise arenduse ühendamise meetodi kasutamine võimaldab saada ligikaudse lahendi lokaalselt. Näiteks on saadud asümptootiline lahend keha osadele, kus külgpind muutub aeglaselt. See lahend üldistab tuntud summa seadust, mis on kasutusel tasapinnalise deformatsiooni korral.

Alfred PURO

## TO THE USE OF SUM RULE IN INTEGRATED PHOTOELASTICITY

In the paper the problem of determination of internal stresses using the method of integrated photoelasticity in the bodies of revolution is considered. The illumination is performed in the plane which is perpendicular to the axes of the body. The determination of stresses is transformed into solving the boundary-value problem. Using the method of asymptotic connection enables to get an approximate solution locally. For example, there is derived an asymptotic solution for the places of body where the variation of tangential surfaces is weak. This generalises the known sum rule which is used in the case of plane strains.