Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1991, 40, № 4, 266—278

https://doi.org/10.3176/phys.math.1991.4.03

УДК 519.687.5

*Янус ТЕККО**

ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЯЗЫКА LSD И ИСЧИСЛЕНИЯ CSD

(Представил Ю. Яаксоо)

Введение

Язык LSD и исчисление CSD [1] построены как теоретико-доказательственный аппарат для исследования логических основ теории взаимодействующих процессов.

Основные средства, которые применяются в математической логике для исследования различных формальных языков и исчислений, а также теоретические результаты, получаемые с помощью этих средств, разделяются на два класса: теоретико-доказательственные и теоретико-модельные. Для создания LSD и CSD были использованы главным образом теоретико-доказательственные средства.

В данной работе основное внимание уделяется теоретико-модельному аппарату языка LSD и исчислению CSD. Строится модель для системы аксиом исчисления CSD и тем самым доказывается непротиворечивость этой системы аксиом. Предлагается один из возможных методов построения модели для любой системы взаимодействующих процессов, описанной на языке LSD. Носители этой модели сконструированы на базе натуральных чисел. Используемый метод создания модели основывается на кодировании синтаксических объектов с помощью степеней простых чисел. На примере сконструированной модели показана совместимость выведенных секундарных терминов LSD (напр., канал, функция канала) с соответствующими неформальными понятиями о системе взаимодействующих процессов.

Системы взаимодействующих процессов

Системой взаимодействующих процессов (СВП) в настоящей и в некоторых других работах [1, 2] называется описание задачи графоподобной структурой, которая состоит из элементов двух типов: процессов и каналов. Каждый процесс рассматривается как преобразователь информации, а канал — как средство для односторонней передачи информации.

С СВП связано т. н. системное время. Каждый процесс либо имеет свое собственное множество моментов времени для запуска, либо элементы этого множества постепенно генерируются некоторыми другими процессами системы. После запуска процесс преобразует свой комплект исходных данных, поступающих по входным каналам, в результат, который попадает в выходные каналы. Алгоритм этого преобразования зависит от момента запуска процесса.

* Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut (Институт кибернетики Академии наук Эстонии). 200108 Tallinn, Akadeemia tee 21. Estonia.

Канал является средством накопления результатов процесса производителя и передачи накопленных данных процессу потребителю. Каждый канал имеет два параметра (т. н. функцию и тип), которые определяют передаваемый потребителю комплект результатов производителя. Более подробную информацию о процессах и каналах можно найти в [1].

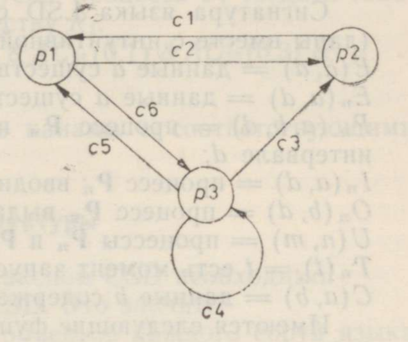

Рис. 1. Пример СВП.

Рассмотрим в качестве примера трехпроцессовую СВП (рис. 1), которую будем в дальнейшем использовать для построения модели. Множество $R_1 = \{0, \beta, 2\beta, 3\beta, \ldots\}$ является множеством моментов запуска для процессов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Длительности работы процессов $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ равны соответственно ν_1, ν_2, ν_3 единиц времени $(\nu_i < \beta)$. Процесс $\mathbf{P}_3$ запускается всегда сразу после завершения процесса $\mathbf{P}_2$. Значит, можно определить множество моментов запуска для $\mathbf{P}_3$: $R_3 = \{\nu_2, \nu_2 + \beta, \nu_2 + 2\beta, \ldots\}$. Процесс $\mathbf{P}_3$ употребляет в качестве исходных данных свои три последних результата, а также последние результаты от $\mathbf{P}_1$ и производит данные для процессов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Процесс $\mathbf{P}_1$ употребляет, кроме последнего результата от процесса $\mathbf{P}_3$, также последний результат от $\mathbf{P}_2$, который готов к моменту запуска процесса $\mathbf{P}_1$. Процесс $\mathbf{P}_2$ употребляет, кроме последнего и предпоследнего результатов от $\mathbf{P}_3$, результат от $\mathbf{P}_1$, который подготавливается во время работы процесса P_2.

Такие соотношения определяют следующие параметры каналов:

c_1 — тип синхронный, функция (1, 2);
c_2 — тип синхронный, функция (0, 1);
c_3 — тип асинхронный, функция (0, 1);
c_4 — тип асинхронный, функция (0, 2);
c_5 — тип асинхронный, функция (0, 0);
c_6 — тип полусинхронный, функция (0, 1).

Поведение рассматриваемого примера во времени (процесс $\mathbf{P}_i$ = процесс с индексом i) иллюстрирует рис. 2.

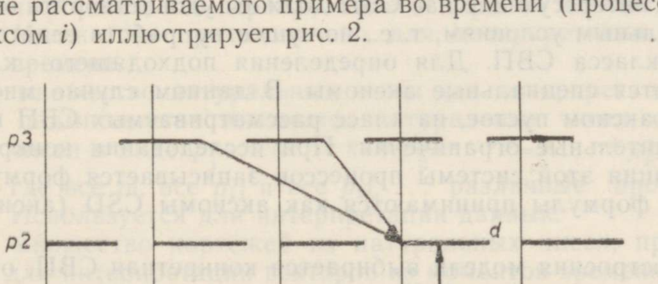

Рис. 2. Функционирование СВП (показано происхождение входных данных при произведении данных d).

Язык LSD и исчисление CSD

LSD — многосортный язык исчисления предикатов, имеющий 4 основных сорта: моменты времени, интервалы времени, индексы и данные. Кроме того, он имеет еще сорта для обозначения векторов из объектов каждого основного сорта.

Сигнатура языка LSD содержит следующие предикатные символы (даны вместе с интуитивной семантикой):

$E(a, d)$ = данные a существуют на интервале d;

$E_n(a, d)$ = данные a существуют на интервале d для процесса $\mathbf{P}_n$;

$P_n(a, b, d)$ = процесс $\mathbf{P}_n$ перерабатывает данные a в данные b на интервале d;

$I_n(a, d)$ = процесс $\mathbf{P}_n$ вводит данные a на интервале d;

$O_n(b, d)$ = процесс $\mathbf{P}_n$ выдает данные b на интервале d;

$U(n, m)$ = процессы $\mathbf{P}_n$ и $\mathbf{P}_m$ взаимосвязаны непосредственно;

$T_n(t) = t$ есть момент запуска процесса $\mathbf{P}_n$;

$C(a, b)$ = данные b содержат данные a.

Имеются следующие функциональные символы:

$l(d)$ = определяет левый конец интервала d;

$r(d)$ = определяет правый конец интервала d;

$\mathrm{long}\ (\bar{x})$ = определяет количество компонентов вектора $\bar{x}$.

Термы и формулы языка LSD определяются индукцией по длине выражения. Для формулирования утверждений в языке LSD используется понятие секвенций [3]:

$$\text{секвенция } A_1, \ldots, A_n \rightarrow B_1, \ldots, B_m,$$

где A_i и B_j формулы языка LSD, понимается как формула в виде

$$A_1 \& \ldots \& A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m.$$

Исчисление CSD, базирующееся на исчислении предикатов с равенством, содержит кроме схемы аксиом $A \rightarrow A$ аксиомы равенства и правила вывода в виде правил Генцена [3] и еще дополнительные аксиомы, которые разделяются на следующие три группы:

1) общие аксиомы,
2) специальные аксиомы,
3) спецификация конкретной СВП.

Группа общих аксиом является основной. Они обязательны для любых систем взаимодействующих процессов. Часто возникают ситуации, в которых интересующие нас СВП должны удовлетворять определенным дополнительным условиям, т. е., по существу, работа ведется внутри некоторого класса СВП. Для определения подходящего класса СВП используются специальные аксиомы. В данном случае множество специальных аксиом пустое, на класс рассматриваемых СВП не налагаются дополнительные ограничения. При исследовании конкретной СВП спецификация этой системы процессов записывается формулами языка LSD. Эти формулы принимаются как аксиомы CSD (аксиомы третьей группы).

Для построения модели выбирается конкретная СВП, описание которой приведено на рис. 1. Хотя, в принципе, нас удовлетворяет и модель для общих аксиом, в данной работе выбирается конкретная СВП по двум причинам:

во-первых, построенная здесь модель является также моделью для общих аксиом;

во-вторых, метод, употребляемый для построения модели данной конкретной СВП, является универсальным (применяем для любой СВП) и настоящее его применение носит иллюстрирующий характер.

Аксиомы, специфицирующие в LSD СВП на рис. 1, следующие:

1) $\rightarrow \forall i\{i>3 \supset \neg\exists x, y, w[P_i(x, y, w) \vee O_i(x, w) \vee I_i(x, w)]\}$.

Единственные процессы, которые могут вводить, выводить или перерабатывать данные имеют индекс 1, 2 или 3.

2) $\rightarrow \forall i\{i\leqslant 3 \supset \forall t[t\in R_i \Leftrightarrow T_i(t)]\}$. (1)

Момент времени является моментом запуска процесса $\mathbf{P}_i$ тогда и только тогда, когда он принадлежит к множеству R_i.

3) $\rightarrow SC_{21}(1,2)\ \&\ SC_{12}(0,1)\ \&\ AC_{32}(0,2)\ \&\ AC_{31}(0,1)\ \&\ AC_{33}(0,3)\ \&$
$\&\ PC_{13}(0,1)$.

В системе существуют соответствующие каналы с соответствующими параметрами.

Определение структуры

При построении модели для системы аксиом CSD необходимо:

1. Определить структуру $\mathfrak{M}$ для языка LSD. Это значит:

а) определить носители $\mathfrak{M}_i$ модели для объектов каждого сорта языка LSD;

б) определить n-местное отношение $\mathfrak{R}^{\mathfrak{M}}$ на $\mathfrak{M}_{i1}\times\mathfrak{M}_{i2}\times\ldots\times\mathfrak{M}_{in}$ для каждой n-местной предикатной константы $\mathfrak{R}$;

в) определить функцию $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}: \bigtimes_{i=1}^{n}\mathfrak{M}_{ji}\rightarrow\mathfrak{M}_j$ для каждого n-местного функционального символа $\mathfrak{F}$;

г) определить элемент множества $\mathfrak{M}_i$ для каждого константного символа c сорта i языка LSD.

2. Проверить для каждой аксиомы Ψ расширенной системы аксиом исчисления CSD, выполнимость Ψ в $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}\models\Psi$).

Определение носителей для модели

Язык LSD содержит кроме основных сортов (данные, индексы, моменты времени, интервалы времени) сорта для векторов из символов основных сортов (векторы любой конечной длины). Выберем следующие множества в качестве носителей модели:

$\mathfrak{M}_1\equiv T$ — множество натуральных чисел, предназначено для интерпретации моментов времени.

$\mathfrak{M}_2\equiv I$ ($\mathfrak{M}_2\subseteq\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$) — множество таких упорядоченных пар из натуральных чисел, что первый элемент пары не больше, чем второй. Множество предназначено для интерпретации интервалов времени.

$\mathfrak{M}_3\equiv K$ — множество натуральных чисел для интерпретации индексов.

$\mathfrak{M}_4\equiv D$ — подмножество множества натуральных чисел, состоящее из чисел в виде $p_1^{p_{11}*p_{12}*\cdots*p_{1k}} * p_2^{p_{21}*\cdots*p_{2m}} * \ldots * p_n^{p_{n1}*\cdots*p_{ns}}$, где все p_i, все p_{1j} и все p_{2i}, ... различные простые числа. Используется для интерпретации данных.

$\mathfrak{M}_5\equiv\mathbf{T}$ — множество кортежей из натуральных чисел, предназначено для интерпретации векторов из моментов времени.

$\mathfrak{M}_6\equiv\mathbf{I}$, ($\mathfrak{M}_6\subset\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$) — множество кортежей из упорядоченных пар натуральных чисел, таких, что первый элемент каждой пары не больше, чем второй. Множество предназначено для интерпретации векторов из интервалов времени.

$\mathfrak{M}_7\equiv\mathbf{K}$ — множество кортежей из натуральных чисел для интерпретации векторов из индексов.

$\mathfrak{M}_8\equiv\mathbf{D}$ — множество кортежей из множеств D для интерпретации векторов из данных.

Функция $\varrho(x)$ для определения семантики данных

Представим содержательную интерпретацию элементов множества D как данные. Множество D состояло из чисел в виде:

$$p_1^{p_{11} * p_{12} * \cdots * p_{1k}} * p_2^{p_{21} * \cdots * p_{2m}} * \ldots * p_n^{p_{n1} * \cdots * p_{ns}},$$

где p_i, p_{1j} и p_{2j}, ... различные простые числа.

В дальнейшем используется обозначение prim_i для i-го простого числа.

На рис. 2 показана временная диаграмма функционирования СВП. Элементарные данные (например данные d на рис. 2) возникают в системе всегда только после завершения некоторого процесса. Функция интерпретации φ определяет для константы данных d число из множества D:

$\varphi(d) = y$ и $y = \alpha^\gamma$, (где α, γ простые и определяют соответственно процесс, производящий данные d и порядковой номер запуска, результатом которого являются данные d).

В данном случае $\alpha = \mathrm{prim}_2 = 3$ и $\gamma = \mathrm{prim}_4 = 7$. Данные d являются результатом четвертого запуска процесса $\mathbf{P}_2$.

Если данные состоят из нескольких элементарных данных, то нижеопределенная функция ϱ используется для определения момента времени, к которому все компоненты этих данных выработаны процессами. Точнее, пусть для константного символа d^* сорта данных

$$\varphi(d^*) = h.$$

Перепишем число h следующим образом:

$$h = p_1^{p_{11} * p_{12} * \cdots * p_{1k}} * p_2^{p_{21} * \cdots * p_{2m}} * \ldots * p_n^{p_{n1} * \cdots * p_{ns}},$$

где все p_i, p_{1j} и p_{2j}, ... различные простые числа.

Пусть $p_1^{\max} = \max\{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1k}\}, \ldots p_m^{\max} = \max\{p_{m1}, \ldots p_{mk}\}$.

Теперь определим формально:

$$\varrho(h) = \begin{cases} \infty, \text{ если } \exists i, j, k\,[\,|R_j| < k \,\&\, \mathrm{prim}_j = p_i \,\&\, \mathrm{prim}_k = p_i^{\max}] \\ \max(\alpha_j + \nu_j), \text{ где } \alpha_j = n(R_j, k) \,\&\, \mathrm{prim}_k = p_i^{\max} \,\&\, \mathrm{prim}_j = p_i. \end{cases}$$

Здесь:

R_j — множество моментов запуска процесса с индексом j (процесса $\mathbf{P}_j$),
ν_j — время работы процесса $\mathbf{P}_j$,
$|R_j|$ — мощность множества R_j,
$n(R_j, k)$ — функция, которая выдает k-й элемент упорядоченного множества R_j.

Каждый член $p_i^{p_{t1} * p_{t2} * \cdots * p_{tm}}$ в выражении для h отражает все результаты процесса $\mathbf{P}_k$, (где $\mathrm{prim}_k = p_i$), которые входят в состав данных d^*, $\varphi(d^*) = h$.

Каждый p_{ij} из показателя степени указывает конкретно на момент запуска процесса $\mathbf{P}_k$ ($\mathrm{prim}_k = p_i$), в котором началось изготовление результата, входящего в состав d. Этот момент запуска вычисляется следующим путем: $t_0 = n(R_k, m)$, где $\mathrm{prim}_m = p_{ij}$. $\varrho(h)$, по существу, определяет минимальный момент системного времени, в котором данные d могут возникать в СВП.

Например. $\varphi(d) = 2^{3\cdot5\cdot7} * 5^{11}$ означает, что рассматриваемые данные состоят из результатов процесса $\mathbf{P}_1$ (соответствует число 2) и процесса $\mathbf{P}_3$ (соответствует число 5). В состав данных входят результаты второго (3), третьего (5) и четвертого (7) запусков процесса $\mathbf{P}_1$ и пятого (11) запуска процесса P_3.

В данной работе конкретизируется предикат соединения процессов $(U(i,j))$ бинарными предикатами As, Ss, Ps.

$As(i,j)$ — процесс $\mathbf{P}_i$ связан с процессом $\mathbf{P}_j$ через асинхронное соединение;

$Ss(i,j)$ — процесс $\mathbf{P}_i$ связан с процессом $\mathbf{P}_j$ через синхронное соединение;

$Ps(i,j)$ — процесс $\mathbf{P}_i$ связан с процессом $\mathbf{P}_j$ через полусинхронное соединение.

Замечание. Эти предикаты выражают направленную связь и из того, что, например, Ss (1,2) истино не следует, что Ss (2,1) истино.

Интерпретация символов языка LSD

Определим для каждого функционального символа $\mathfrak{F}$ интерпретацию $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}: \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_{ji} \to \mathfrak{M}_j$.

Левый конец интервала времени $l\ (w)$:

$l^{\mathfrak{M}}: I \to T$ и $l(w)=t$, если $w=(t,t^*)$, где $t \leqslant t^*$ и $t, t^* \in T$.

Правый конец интервала времени $r(w)$:

$r^{\mathfrak{M}}: I \to T$ и $r(w)=t^*$, если $w=(t,t^*)$, где $t \leqslant t^*$ и $t, t^* \in T$.

Интерпретация общеизвестных функциональных символов $+$, $-$ обычная.

Определим для каждой предикатной константы $\mathfrak{K}$ интерпретацию:

$$\mathfrak{K}^{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}_{i1} \times \mathfrak{M}_{i2} \times \ldots \times \mathfrak{M}_{in}.$$

Предикат обработки $\mathfrak{P}_i(x,\ y,\ w)$:

$$(a, b, \tau) \in \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{M}}, \text{ если } \varphi(a) = 3^{\mathrm{prim}_k \cdot \mathrm{prim}_{k-1}} * 5^{\mathrm{prim}_m},$$

где

$$m = \max_s (\beta \cdot k > \nu_2 + \beta \cdot s + \nu_3), \quad \varphi(b) = 2^{\mathrm{prim}_{k+1}}, \quad l(\tau) = t_1,$$

$$r(\tau) = t_2, \quad \varphi(t_1) = \beta \cdot k, \quad \varphi(t_2) = \beta \cdot k + \nu_1$$

(данные s-го запуска самые свежие от процесса $\mathbf{P}_3$, которые готовы к моменту запуска процесса $\mathbf{P}_1$ $(\varphi(t_1) = \beta \cdot k)$),

$$(a, b, \tau) \in \mathfrak{P}_2^{\mathfrak{M}}, \text{ если } \varphi(a) = 2^{\mathrm{prim}_k \cdot \mathrm{prim}_{k+1}} * 5^{\mathrm{prim}_m \cdot \mathrm{prim}_{m-1}},$$

где

$$m = \max_s (\beta \cdot k > \nu_2 + \beta \cdot s + \nu_3), \quad \varphi(b) = 3^{\mathrm{prim}_{k+1}}, \quad l(\tau) = t_1,$$

$$r(\tau) = t_2, \quad \varphi(t_1) = \beta \cdot k, \quad \varphi(t_2) = \beta \cdot k + \nu_2,$$

$$(a, b, \tau) \in \mathfrak{P}_3^{\mathfrak{M}}, \text{ если } \varphi(a) = 3^{\mathrm{prim}_{k+1}} * 5^{\mathrm{prim}_k \cdot \mathrm{prim}_{k-1} \cdot \mathrm{prim}_{k-2}}$$

и

$$\varphi(b) = 5^{\mathrm{prim}_{k+1}}, \quad l(\tau) = t_1, \quad r(\tau) = t_2, \quad \varphi(t_1) = \beta \cdot k + \nu_2,$$

$$\varphi(t_2) = \beta \cdot k + \nu_2 + \nu_3.$$

Предикат $C(a, b)$ о включении данных:

$$(a, b) \in C^{\mathfrak{M}}, \text{ если } \varphi(a) = p_1^{p_{11} * p_{12} * , \ldots, * p_{1n}} * \ldots * p_m^{p_{m1} * p_{m2} * , \ldots, * p_{ms}},$$

$$\varphi(b) = \bar{p}_1^{\bar{p}_{11} * \bar{p}_{12} * , \ldots, * \bar{p}_{1h}} * \ldots * \bar{p}_k^{\bar{p}_{k1} * \bar{p}_{k2} * , \ldots, * \bar{p}_{kv}},$$

$$\forall i \leqslant m \; \exists j \leqslant k \; \exists X \in \mathfrak{N} \; [\bar{p}_j = p_i \; \& \; \bar{p}_{j1} \cdot \ldots \cdot \bar{p}_{jl} = p_{i1} \cdot \ldots \cdot p_{iq} \cdot X]$$

(если в составе данных a имеются результаты i-го запуска некоторого процесса, то в составе данных b имеются те же результаты).

Предикат существования данных $E(x, w)$:

$$(a, \tau) \in E^{\mathfrak{M}}, \text{ если } \varphi(a) = n, \; l(\tau) = t_1 \text{ и } \varrho(n) \leqslant \varphi(t_1).$$

Предикат существования данных для i-го процесса $E_i \; (x, w)$:

$$E_i^{\mathfrak{M}} = E^{\mathfrak{M}}.$$

Предикат ввода данных $I_i(x, w)$:

$$(a, \tau) \in I_i^{\mathfrak{M}}, \text{ если } l(\tau) = t_1 \; \& \; r(\tau) = t_2, \; \varphi(t_1) \geqslant \varrho(\varphi(a)),$$

$$\exists k [(\beta * k + \overline{\operatorname{sgn}(3 - i)} * \nu_2 \leqslant \varphi(t_1) \; \& \; \varphi(t_2) < (\beta * k + \nu_i + \overline{\operatorname{sgn}(3 - i)} * \nu_2)] \; \&$$

$$\& \; \exists c, b, \tau^* [(b, c, \tau^*) \in \mathfrak{P}_i^{\mathfrak{M}} \; \& \; (a, b) \in C^{\mathfrak{M}} \; \& \; l(\tau^*) = t_3 \; \& \; \varphi(t_3) = \beta * k + \overline{\operatorname{sgn}(3 - i)} * \nu_2],$$

$$\operatorname{sgn}(X) = \begin{cases} 0, \text{ если } X \neq 0 \\ 1, \text{ если } X = 0. \end{cases}$$

Предикат вывода данных $O_i(x, w)$:

$$(a, \tau) \in O_i^{\mathfrak{M}}, \text{ если } l(\tau) = t_1 \; \& \; r(\tau) = t_2, \; \varphi(t_1) + 1 = \varphi(t_2),$$

$$\exists b, \tau^* [(b, a, \tau^*) \in \mathfrak{P}_i^{\mathfrak{M}} \; \& \; r(\tau^*) = t_2].$$

Предикат запуска процессов $T_i(q)$:

$$(t) \in T_i^{\mathfrak{M}}, \text{ если } \exists k [\beta * k + \overline{\operatorname{sgn}(3 - i)} * \nu_i = \varphi(t)].$$

Предикаты соединения процессов: $As(i, j)$, $Ss(i, j)$, $Ps(i, j)$

$$As^{\mathfrak{M}} = \{(3,1), \; (3,2), \; (3,3)\};$$

$$Ss^{\mathfrak{M}} = \{(1, 2), \; 2, 1)\};$$

$$Ps^{\mathfrak{M}} = \{2,3)\}.$$

Проверка истинности аксиом CSD на структуре $\mathfrak{M}$

Имея интерпретацию всех символов языка LSD, приступим к проверке выполнимости аксиом исчисления CSD.

Выполняемость следующих трех аксиом следует прямо из проведенных теоретико-модельных конструкций.

Аксиома (корректность интервала)

$$\to \forall w [l(w) \leqslant r(w)].$$

Аксиома (рефлексивность для предиката содержания)

$$\to \forall x C(x, x).$$

Аксиома (существование данных)

$$\to \forall x \forall w [E_n(x, w) \supset E(x, w)].$$

Аксиома (существование частей данных)

$$\to \forall x, y, w [C(x, y) \,\&\, E(y, w) \supset E(x, w)].$$

Допустим, что для некоторых a, b, τ в $\mathfrak{M}$ выполняется посылка импликации: $(a, b) \in C^{\mathfrak{M}}$ и $(b, \tau) \in E^{\mathfrak{M}}$. Тогда $\varrho(\varphi(a)) \leqslant \varrho(\varphi(b))$ и $\varrho(\varphi(a)) \leqslant$ $\leqslant l(\tau)$. Это значит, что $(a, \tau) \in E^{\mathfrak{M}}$, следовательно, заключение импликации правильно.

Аксиома (определение возможных интервалов работы процесса)

$$\mapsto \forall t [\exists x, y, w (l(w) = t \,\&\, P_n(x, y, w)) \supset T_n(t)].$$

Если посылка импликации выполняется для некоторого t, то $\exists a$, b, τ, так что $l(\tau) = t$ и $(a, b, \tau) \in \mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}}$. Значит, из определения множества $\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}}$ следует, что $\exists k\ [t = l(\tau)\ \&\ l(\tau) = \beta * k + \overline{\mathrm{sgn}}\ (3 - n) * \tau_n]$. Но теперь $(t) \in T_n^{\mathfrak{M}}$ и, следовательно, заключение импликации выполняется.

Аксиома (ввод необходимых данных)

$$\to \forall x, y, w \{Nec_n(z, x, y, w) \supset$$
$$\supset \exists \mathrm{z}, \bar{\mathrm{v}} (D(z, \bar{\mathrm{z}})\ \&\ (\forall z' \in \bar{\mathrm{z}}) (\exists v' \in \bar{\mathrm{v}}) [I_n(z', v')\ \&\ l(v') \leqslant r(w)])\}.$$

По определению:

$$\mathrm{Nec}_n(a', a, b, d) \equiv$$
$$\equiv P_n(a', b, d)\ \&\ C(a', a)\ \&\ \forall x [C(x, a)\ \&\ \neg C(a', x) \supset \neg P_n(x, b, d)].$$

Множество $\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}}$ содержит точно один элемент (a, b, τ) для фиксированных b, τ (если $(a^*, b, \tau) \in \mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}}$, то $a^* = a$). Следовательно, если $(a, c, b,$ $\tau) \in \mathrm{Nec}_n^{\mathfrak{M}}$, то $a = c$.

По определению:

$$D(a, \bar{\mathrm{b}}) \equiv [(\forall x \in \bar{\mathrm{b}}) C(x, a)]\ \&\ \forall y [((\forall z \in \bar{\mathrm{b}}) C(z, y)) \supset C(a, y)].$$

Если посылка импликации выполняется, то $(a, a, c, \tau) \in \mathrm{Nec}_n^{\mathfrak{M}}$, значит $(a, c, \tau) \in \mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}}$, и учитывая, что $(a, \bar{\mathrm{b}}) \in D^{\mathfrak{M}}$, если $\bar{\mathrm{b}} = (a)$, и $\exists \tau^* [(a, \tau^*) \in$ $\in I_n^{\mathfrak{M}}\ \&\ l(\tau) \leqslant r(\tau)]$, то следовательно, заключение импликации правильно.

Аксиома (существование данных по компонентам)

$$\to \forall x, w \{I_n(x, w) \supset \exists \bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{w}} (D(x, \bar{\mathrm{x}})\ \&\ (\forall z \in \bar{\mathrm{x}}) (\exists v \in \bar{\mathrm{w}}) [E_n(z, v)\ \&$$
$$\&\ l(v) \leqslant r(w)])\}.$$

Если $(a,\tau)\in I_n^{\mathfrak{M}}$, то $\varrho(\varphi(a))\leqslant l(\tau)$ и по определению $(a,\tau)\in E_n^{\mathfrak{M}}$ и, учитывая, что $(a,(a))\in D^{\mathfrak{M}}$. Следовательно, аксиома выполняется.

Аксиома (ввод компонентов данных)

$$\to\forall x, w\{I_n(x,w)\ \&\ C(z,x)\supset\exists v[I_n(z,v)\ \&\ l(w)\leqslant l(v)\ \&\ r(v)\leqslant r(w)]\}.$$

Если $(a,\tau)\in I_n^{\mathfrak{M}}$ и $(b,a)\in C^{\mathfrak{M}}$, то, учитывая, что в конструируемой модели $(b,a)\in C^{\mathfrak{M}}\ \&\ (a,c)\in C^{\mathfrak{M}}\supset(b,c)\in C^{\mathfrak{M}}$, из определения множества $I_n^{\mathfrak{M}}$ следует, что $(b,\tau)\in I_n^{\mathfrak{M}}$. Следовательно, аксиома выполняется.

Аксиома (вывод данных по компонентам)

$$\to\forall x, w\{O_n(x,w)\ \&\ C(z,x)\supset\exists v[O_n(z,v)\ \&\ l(w)\leqslant l(v)\ \&\ r(v)\leqslant r(w)]\}.$$

Если $(a,\tau)\in O_n^{\mathfrak{M}}$ и $(b,a)\in C^{\mathfrak{M}}$, то $b=a$ (из определения множеств $O_n^{\mathfrak{M}}$ $\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}}$ и $C^{\mathfrak{M}}$).

Аксиома (обработка выводимых данных)

$$\to\forall x, w\{O_n(x,w)\supset\exists z, y, v[P_n(z,y,v)\ \&\ C(x,y)\ \&\ l(v)\leqslant r(w)]\}.$$

Если $(a,\tau)\in O_n^{\mathfrak{M}}$, то из определения множества $O_n^{\mathfrak{M}}$ следует, что $\exists c,\tau'[P(c,a,\tau')\ \&\ r(\tau')=r(\tau)]$. Следовательно, аксиома выполняется.

Аксиома (единственность работы процесса)

$$\to\forall x, y, w, x', y', w'[P_n(x,y,w)\ \&\ P_n(x',y',w')\ \&\ l(w)=l(w')\supset$$
$$\supset x=x'\ \&\ y=y'].$$

Для фиксированного момента запуска $(l(w)=l(w'))$ существует в множестве $\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}}$ единственный комплект данных $((a,b,\tau)\in\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}})$. Поэтому аксиома выполняется.

Аксиома (согласование интервалов существования данных)

$$\to\forall x, y, v\{P_n(x,y,v)\supset\exists\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{w}}[D(x,\bar{\mathbf{b}})\ \&\ E(\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{w}})\ \&\ \forall\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{a}}[E(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{v}})\ \&$$
$$\&\ D(y,\bar{\mathbf{a}})\supset(\exists v_j\in\bar{\mathbf{v}})\,(\forall w_k\in\bar{\mathbf{w}})\,[l(v_j)>l(w_k)]]]\}.$$

Если $(c,e,\tau)\in\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}}$, то учитывая, что $(c,(c))\in D^{\mathfrak{M}}$ и $(e,\bar{\mathbf{a}})\in D^{\mathfrak{M}}$, следовательно $\bar{\mathbf{a}}=(e)$. Известно, что $\varrho(\varphi(e))=l(\tau)$ и $\varrho(\varphi(c))<l(\tau)$, следовательно,

$\exists\tau^*(l(\tau^*)<l(\tau)\ \&\ (c,\tau^*)\in E^{\mathfrak{M}})$ и $\forall\tau'((e,\tau')\in E^{\mathfrak{M}}\supset l(\tau')>l(\tau))$. Таким образом, заключение импликации правильно.

Аксиома (существование компонентов данных)

$$\to\forall x, y\{C(x,y)\ \&\ \exists\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{w}}[E(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{w}})\ \&\ D(y,\bar{\mathbf{a}})]\supset\exists\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{v}}[D(x,\bar{\mathbf{b}})\ \&\ E(\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{v}})\ \&$$
$$\&\ \forall\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{u}}[E(\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{u}})\ \&\ D(y,\bar{\mathbf{c}})\supset(\exists u_j\in\bar{\mathbf{u}})\,(\forall v_k\in\bar{\mathbf{v}})\,[l(u_j)\geqslant l(v_k)]]]\}.$$

Если $(f,e)\in C^{\mathfrak{M}}$ и $\exists\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{w}}[E(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{w}})\ \&\ D(e,\bar{\mathbf{a}})]$, то $\varrho(\varphi(f))\leqslant\varrho(\varphi(e))$ и $\exists\tau[l(\tau)=\varrho(\varphi(f))\ \&\ (f,\tau)\in E^{\mathfrak{M}}]$, следовательно $\forall\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{u}}[E(\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{u}})\ \&\ D(e,\bar{\mathbf{c}})\supset(\exists u_j\in\bar{\mathbf{u}})\,[l(u_j)\geqslant l(\tau)]]$. Поэтому аксиома выполняется.

Аксиома (процессирование)

$$\to (\forall x \forall y \forall w [P_n(x, y, w) \supset$$
$$\supset \exists \bar{y} \exists \bar{w} [D(y, \bar{y}) \ \& \ (\forall y' \in \bar{y}) (\exists w' \in \bar{w}) [E(y', w') \ \&$$
$$\& \ \exists \bar{x} \exists \bar{v} [D(x, \bar{x}) \ \& \ (\forall x' \in \bar{x}) (\exists v' \in \bar{v}) [I_n(x', v') \ \&$$
$$\& \ \exists \bar{x}' \exists \bar{v}' [D(x', \bar{x}') \ \& \ (\forall x'' \in \bar{x}') (\exists v'' \in \bar{v}') [E_n(x'', v'') \ \&$$
$$\& \ l(w) \leqslant r(w') \ \&$$
$$\& \ l(v') \leqslant r(w') \ \& \ l(v') \leqslant r(w) \ \&$$
$$\& \ l(v'') \leqslant r(w') \ \& \ l(v'') \leqslant r(w) \ \& \ l(v'') \leqslant r(v')]]]]]]].$$

Из конструкции множеств $I_n^{\mathfrak{M}}$ и $E^{\mathfrak{M}}$ видно, что в модели имеет место $\forall w, x [I_n(x, w) \supset E(x, w)]$, кроме того, очевидно, что

$$\forall x, w, w' [E(x, w) \ \& \ l(w) = l(w') \ \& \ r(w) < r(w') \supset E(x, w')].$$

Учитывая, что аксиома о вводе необходимых данных доказана и для предиката P_n (если заменить там предикат P_n на предикат Nec_n), то можно найти такой комплект векторов, что все временные условия выполняются.

Аксиома (согласование выводимых данных)

$$\to \forall y \forall w [O_n(y, w) \supset$$
$$\supset \exists \bar{y} \exists \bar{y}' \exists \bar{w}' [D(y, \bar{y}) \ \& \ (\forall y' \in \bar{y}) \ (\exists y'' \in \bar{y}') (\exists w'' \in \bar{w}') [C(y', y'') \ \&$$
$$\& \ E(y'', w'') \ \& \ \exists \bar{x} \exists \bar{v} [(\exists x' \in \bar{x}) \ (\exists v' \in \bar{v}) [P_n(x', y', v') \ \&$$
$$\& \ \exists \bar{x}' \exists \bar{v}' [D(x', \bar{x}') \ \& \ (\forall x'' \in \bar{x}') (\exists v'' \in \bar{v}') [I_n(x'', v'') \ \&$$
$$\& \ \exists \bar{x}'' \exists \bar{v}'' [D(x'', \bar{x}'') \ \& \ (\forall x^3 \in \bar{x}'') (\exists v^3 \in \bar{v}'') [E_n(x^3, v^3) \ \&$$
$$\& \ l(w) \leqslant r(w'') \ \&$$
$$\& \ l(v') \leqslant r(w'') \ \& \ l(v') \leqslant r(w) \ \&$$
$$\& \ l(v'') \leqslant r(w'') \ \& \ l(v'') \leqslant r(w) \ \& \ l(v'') \leqslant r(v') \ \&$$
$$\& \ l(v_3) \leqslant r(w'') \ \& \ l(v^3) \leqslant r(w) \ \& \ l(v^3) \leqslant r(v') \ \& \ l(v^3) \leqslant r(v'')]]]]]]]].$$

По определению множества $O_n^{\mathfrak{M}}$ все выводимые данные неделимы. Если $(a, w) \in O_n^{\mathfrak{M}}$, то легко видно, что найдется подходящий интервал w' (с точки зрения ограничения на концы этого интервала), такой что $(a, w') \in E_n^{\mathfrak{M}}$. Существование подходящих параметров процессирования следует из определения множества $O_n^{\mathfrak{M}}$, а существование подходящих параметров для предикатов I_n и E_n следует из аксиом ввода необходимых данных и существования вводимых данных по компонентам.

Правильность аксиом равенства гарантируется естественной интерпретацией предиката равенства.

Аксиомы порядка для индексов и моментов времени выполняются потому, что интерпретация соотношений $<$, $\leqslant$ естественная и модель стандартная (множество натуральных чисел).

Остается еще проверить, выполняется ли спецификация (1) рассматриваемой системы на структуре $\mathfrak{M}$:

Истинность формулы 1) спецификации следует из того, что при $n > 3$: $I_n^{\mathfrak{M}} = \varnothing$, $\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{M}} = \varnothing$, $O_n^{\mathfrak{M}} = \varnothing$.

Формула 3) также выполняется, поскольку множества $T_n^{\mathfrak{M}}$, $n=1, 2, 3$ сконструированы, в принципе, на базе этих же условий.

Для доказательства выполнимости формулы 2) надо показать истинность всех конъюнктивных членов этой формулы.

Докажем сперва, что $(0,1) \in SC_{12}^{\mathfrak{M}}$.

Для этого выпишем сперва определения некоторых понятий языка LSD, которые будем использовать в данном доказательстве. Определение канала:

$$K_{ij}(n, m) \equiv (As(i, j) \vee Ss(i, j) \vee Ps(i, j)) \,\&\, \forall x, y, w\{P_j(x, y, w) \,\&$$
$$\& \, T_j(l(w)) \supset \exists \bar{x}, \bar{z}, \bar{v}[F_{ij}(l(w), n, m, l(\bar{v})) \,\&\, (\forall v' \in \bar{v})\,(\exists z' \in \bar{z})\,(\exists x' \in \bar{x})$$
$$[C(z', x) \,\&\, P_i(x', z', v') \,\&\, \forall x'', z'', v''[C(z'', x) \,\&\, P_i(x'', z'', v'') \supset$$
$$\supset v'' \in \bar{v}]]]\}.$$

Определение функции канала:

$$F_{ij}(q_j, n, m, \bar{q}) \equiv M_{ij}(n, q_1, q_j) \,\&\, \ldots \,\&\, M_{ij}(n+m-1, q_m, q_j) \,\&$$
$$\& \, [q_1 \in \bar{q} \,\&\, \ldots \,\&\, q_m \in \bar{q} \,\&\, \forall t(t \in \bar{q} \supset t=q_1 \vee \ldots \vee t=q_m)].$$

Определение синхронного канала:

$$SC_{ij}(n, m) \equiv Ss(i, j) \,\&\, K_{ij}(n, m).$$

Определение нулевого момента запуска:

$$M_{ij}(0, q_i, q_j) \equiv [\forall t(T_i(t) \Leftrightarrow T_j(t)) \,\&\, Ss(i, j) \supset T_i(q_i) \,\&\, q_i=q_j] \,\&$$
$$\& \, \neg Ss(i, j) \supset T_i(q_i) \,\&\, T_j(q_j) \,\&\, \exists x, y, v, z, x^*, y^*, w[P_i(x, y, v) \,\&$$
$$\& \, C(z, y) \,\&\, E_j(z, w) \,\&\, l(w) \leqslant q_j \,\&\, l(v_i)=q_i \,\&\, \forall w^*, t, x', y', v', x'', y'', z'$$
$$[l(v')=t \,\&\, P_i(x', y', v') \,\&\, l(w^*) \leqslant q_j \,\&\, C(z', y') \,\&\, E_j(z', w^*) \supset t \leqslant q_i]].$$

Определение $n+1$ момента закуска:

$$M_{ij}(n+1, q_i, q_j) \equiv [\forall t(T_i(t) \Leftrightarrow T_j(t)) \,\&\, Ss(i, j) \supset T_i(q_i) \,\&$$
$$\& \, \exists \tau[M_{ij}(n, \tau, q_j) \,\&\, q_i < \tau \,\&\, \forall \tau^*(T_i(\tau^*) \supset \tau^* \leqslant q_i \vee \tau^* \geqslant \tau)]] \,\&$$
$$\& \, [Ss(i, j) \supset T_i(q_i) \,\&\, T_j(q_j) \,\&\, \exists t^*[M_{ij}(n, t^*, q_j) \,\&\, q_i < t^* \,\&$$
$$\& \, \forall t^*(T_i(\tau^*) \supset \tau^* \leqslant q_i \vee \tau^* \geqslant t^*)]].$$

Покажем, что имеет место $(0, 1) \in K_{ij}^{\mathfrak{M}}$: Исходим из определения для предиката K_{ij}.

Если $(a, b, \tau) \in P_2^{\mathfrak{M}}$ и $l(\tau) \in T_2^{\mathfrak{M}}$, то придется показать, что найдутся векторы $\bar{x}, \bar{z}, \bar{v}$ такие, что $(l(\tau), 0, 1, \overline{l(v)}) \subset F_{12}^{\mathfrak{M}}$ для любого компонента v' вектора $\bar{v}$ найдутся компоненты $x' \in \bar{x}$ и $z' \in \bar{z}$ такие, что $(z', a) \in C^{\mathfrak{M}}$ и $(x', z', v') \in \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{M}}$ и для любых x'', z'', v'' имеет место: что если $(z'', a) \in C^{\mathfrak{M}}$ и $(x'', z'', y'') \in \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{M}}$, то $v'' \in \bar{v}$.

Если $(a, b, \tau) \in \mathfrak{P}_2^{\mathfrak{M}}$, то из определения множества $\mathfrak{P}_2^{\mathfrak{M}}$ следует, что $\exists c[(c, a) \in C^{\mathfrak{M}} \,\&\, \varphi(a) = 2^{\mathrm{prim}_k \cdot \mathrm{prim}_{k+1}} \,\&\, \varphi(l(\tau)) = \beta \cdot k]$. Учитывая, что $(1, 2) \in Ss^{\mathfrak{M}}$, получается $(0, l(\tau), l(\tau)) \in M_{12}^{\mathfrak{M}}$ и $(1, (l(\tau)-\beta), l(\tau)) \in$ $\in M_{12}^{\mathfrak{M}}$.

Учитывая, что $\exists c_1 (c_1, e_1, \tau') \in \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{M}}$, где $l(\tau') = l(\tau)$ и $\varphi(e_1) = 2^{\mathrm{prim}_{k+1}}$, и $\exists c_2 (c_2, e_2, \tau_2) \in \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{M}}$, где $l(\tau_2) = l(\tau) - \beta$ и $\varphi(e_2) = 2^{\mathrm{prim}_k}$, и $\forall x, y, w \{[(x, y, w) \in \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{M}} \& l(\tau) \neq l(w) \& (l(\tau) - \beta) \neq l(w)] \supset [\varphi(y) = 2^{\alpha} \& \& \neg \exists n (\mathrm{prim}_k \cdot \mathrm{prim}_{k+1} = n \cdot \alpha)]\}$.

Так как $\varphi(a) = 2^{\mathrm{prim}_k \cdot \mathrm{prim}_{k+1}}$ делится на $\varphi(e_1) = 2^{\mathrm{prim}_{k+1}}$ и на $\varphi(e_2) = 2^{\mathrm{prim}_k}$, то $(e_1, a) \in C^{\mathfrak{M}}$ и $(e_2, a) \in C^{\mathfrak{M}}$.

Выбирая векторы $\bar{x} = (c_1, c_2)$, $\bar{z} = (e_1, e_2)$, $\bar{v} = (\tau', \tau_2)$ и учитывая, что $(l(\tau), 0, 1, (l(\tau'), l(\tau_2))) \in F_{12}^{\mathfrak{M}}$, получается, что $(0, 1) \in K_{12}^{\mathfrak{M}}$, и следовательно, $(0,1) \in SC_{12}^{\mathfrak{M}}$.

Аналогичным путем удается выяснить истинность остальных конъюнктивных членов формулы 2). Поэтому формула 2) выполняется на структуре $\mathfrak{M}$.

Теорема о модели

Если предположить, что число компонентов каждого вектора, используемого в LSD, меньше некоторой константы, то вообще можно справиться без векторов, используя новые предикатные символы языка LSD*. Тем самым используются только средства языка исчисления предикатов первого порядка и генценовские правила вывода.

Выше показано, что на структуре $\mathfrak{M}$ выполняются все аксиомы CSD и формулы спецификации (1) рассматриваемой системы. Значит, структура $\mathfrak{M}$ является моделью для рассматриваемой системы и, следовательно, моделью для общих аксиом исчисления CSD.

Можно сформулировать теорему о модели как результат проведенных рассуждений.

Теорема: $\mathfrak{M}$ *теоретико-модельная модель для системы аксиом исчисления CSD.*

Теорема о модели имеет следствие о непротиворечивости.

Следствие: *Система аксиом исчисления CSD является непротиворечивой.*

Доказательство: Поскольку $\mathfrak{M}$ — модель системы аксиом исчисления CSD, то система аксиом непротиворечива.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorents, P., Motus, L., Tekko, J.* A Language and Calculus for Distributed Computer Control Systems Description and Analysis 4th. IFAC/IFIP Symposium on Software for Computer Control. Graz, Austria, May 20—23, 1986.
2. *Лорентс П., Мытус Л.* Логические средства описания и анализа систем взаимодействующих процессов с наложенными временными ограничениями. — 4-я Всес. конференция «Применение методов математической логики». Тез. док., Таллинн, 1986, 13—29.
3. *Генцен Г.* Исследование логических выводов. Матем. теория логического вывода. Москва, Наука, 1967, 9—76.

Поступила в редакцию
19/II 1991

Jaanus TEKKO

KEELE LSD JA ARVUTUSE CSD FORMAALNE MUDEL

Mitmesordiline predikaatarvutuse keel LSD ja arvutus CSD on välja töötatud protsessi süsteemide kirjeldamiseks ja analüüsiks. Seni on LSD-d ja CSD-d käsitletud peamiselt tõestusteoreetilisest aspektist. Siinses töös on püütud jätkata nende mudeliteoreetilise külje väljatöötamist. Meetodil, mille alus on idee kodeerida süntaktilist informatsiooni algarvude astmetega, on konstrueeritud CSD aksioomide süsteemi mudel. Kuigi mudel on loodud konkreetsele protsessisüsteemile, on selleks rakendatud meetod universaalne ja sobib suvalise protsessisüsteemi korral.

Jaanus TEKKO

A FORMAL MODEL FOR THE LANGUAGE LSD AND CALCULUS CSD

LSD — a many-sorted language of predicate calculus and a calculus CSD were designed for description and analysis of systems of communicating processes. LSD and CSD were worked out, using proof-theoretical part of mathematical logic. The purpose of the paper was the developing of the model-theoretical part of LSD and CSD. A model for axiomatics of CSD was constructed, using a method based on the coding of syntactic information by the degrees of prime numbers. Though, in this paper, only an example of systems of communicating processes was used, the method for model construction is applicable for any system of communicating processes.