Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 4, 335—343
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.4.03

УДК 518 : 517.91/94

*Пеэтер ОЯ*

# О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

*(Представил Г. Вайникко)*

Рассматриваются краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, где в краевых условиях присутствуют производные искомой функции. Для таких задач устанавливают оценки погрешности методов коллокации и подобластей квадратическими сплайнами. В оценках выделены главные члены. Вспомогательным средством служат интерполяционные квадратические сплайны при специальных краевых условиях, для которых приведены оценки первых и вторых производных в узлах сетки.

1. Сначала изучим точность интерполяционных квадратических сплайнов в узлах сетки, а полученные результаты используем при установлении оценок погрешности методов коллокации и подобластей для краевых задач.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана равномерная сетка с узлами $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$, $h = (b-a)/n$. Введем еще точки $y_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим квадратические сплайны $S$ с узлами $x_i$, $i = 0, \ldots, n$, из класса $C^1$, для них обозначим $S_i = S(y_i)$, $m_i = S'(y_i)$, $M_i = S''(y_i)$, $i = 1, \ldots, n$. На подотрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеем представление

$$S(x) = \frac{M_i}{2}(x - y_i)^2 + m_i(x - y_i) + S_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{1}$$

Записывая условия непрерывности $S$ и $S'$ в узлах $x_i$, получаем из них стандартными выкладками т. н. внутренние соотношения квадратического сплайна

$$m_{i-1} + 6m_i + m_{i+1} = \frac{4}{h}(S_{i+1} - S_{i-1}),$$

$$M_{i-1} + 6M_i + M_{i+1} = \frac{8}{h^2}(S_{i+1} - 2S_i + S_{i-1}),$$

$$i = 2, \ldots, n-1.$$

Предположим теперь, что квадратический сплайн $S$ интерполирует функцию $f \in C^4[a, b]$ в узлах $y_i$, т. е. $S(y_i) = f(y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, при краевых условиях

$$\alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) = \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) - \frac{\beta_1}{12}h^2 f'''(a) - \frac{\alpha_1}{128}h^4 f^{\mathrm{IV}}(a),$$

$$\alpha_2 S(b) + \beta_2 S'(b) = \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) - \frac{\beta_2}{12}h^2 f'''(b) - \frac{\alpha_2}{128}h^4 f^{\mathrm{IV}}(b),$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$, $\beta_1 \leqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$, $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$, $i = 1, 2$. Внутренние соотношения, содержащие $m_i$, и краевые условия образуют следующую систему

$$\left(5\beta_1-\frac{7}{4}h\alpha_1\right)m_1+\left(\beta_1-\frac{1}{4}h\alpha_1\right)m_2=2\alpha_1 f(a)+2\beta_1 f'(a)-$$

$$-\frac{\beta_1}{6}h^2 f'''(a)-\frac{\alpha_1}{64}h^4 f^{\mathrm{IV}}(a)-\alpha_1(f(y_1)+f(y_2))+\frac{4\beta_1}{h}(f(y_2)-f(y_1)),$$

$$m_{i-1}+6m_i+m_{i+1}=\frac{4}{h}(f(y_{i+1})-f(y_{i-1})),\quad i=2,\ldots,n-1,\tag{2}$$

$$\left(\beta_2+\frac{1}{4}h\alpha_2\right)m_{n-1}+\left(5\beta_2+\frac{7}{4}h\alpha_2\right)m_n=2\alpha_2 f(b)+2\beta_2 f'(b)-$$

$$-\frac{\beta_2}{6}h^2 f'''(b)-\frac{\alpha_2}{64}h^4 f^{\mathrm{IV}}(b)-\alpha_2(f(y_{n-1})+f(y_n))+\frac{4\beta_2}{h}(f(y_n)-f(y_{n-1})).$$

Отметим, что матрица системы (2) имеет диагональное преобладание. Отыскивая решение системы (2) в виде

$$m_i=f'(y_i)+\frac{1}{24}h^2 f'''(y_i)+\gamma_i,\quad i=1,\ldots,n,\tag{3}$$

и разлагая затем значения функции $f$ и ее производных по формуле Тейлора (в $i$-м уравнении в точке $y_i$), получаем для определения $\gamma_i$ систему с матрицей системы (2), но с правыми частями, имеющими порядок $o(h^3)$ (или $O(h^{3+\alpha})$, если $f^{\mathrm{IV}}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$). Отметим, что если, например, $\beta_1=0$, то в первом уравнении порядок правой части будет $o(h^4)$. Следовательно, $\gamma_i=o(h^3)$, а если $f^{\mathrm{IV}}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $\gamma_i=O(h^{3+\alpha})$.

Аналогично для определения $M_i$ получаем систему

$$(14\beta_1-5\alpha_1 h)M_1+(2\beta_1-\alpha_1 h)M_2=\frac{16}{h}\left(\frac{\alpha_1}{2}(3f(y_1)-f(y_2))+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_1}{h}(f(y_2)-f(y_1))-\alpha_1 f(a)-\beta_1 f'(a)+\frac{\beta_1}{12}h^2 f'''(a)+\frac{\alpha_1}{128}h^4 f^{\mathrm{IV}}(a)\right),$$

$$M_{i-1}+6M_i+M_{i+1}=\frac{8}{h^2}(f(y_{i+1})-2f(y_i)+f(y_{i-1})),\quad i=2,\ldots,n-1,$$

$$(2\beta_2+\alpha_2 h)M_{n-1}+(14\beta_2+5\alpha_2 h)M_n=\frac{16}{h}\left(-\frac{\alpha_2}{2}(3f(y_n)-f(y_{n-1}))-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta_2}{h}(f(y_n)-f(y_{n-1}))+\alpha_2 f(b)+\beta_2 f'(b)-\frac{\beta_2}{12}h^2 f'''(b)-\frac{\alpha_2}{128}h^4 f^{\mathrm{IV}}(b)\right).$$

Здесь решение имеет представление

$$M_i=f''(y_i)-\frac{1}{24}h^2 f^{\mathrm{IV}}(y_i)+\gamma_i,\tag{4}$$

где $\gamma_i=o(h^2)$, а если $f^{\mathrm{IV}}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $\gamma_i=O(h^{2+\alpha})$.

Подставим $m_i$ и $M_i$ из формул (3) и (4) в представление (1), тогда разложение Тейлора $f(x)$ в точке $y_i$ позволяет получить оценку

$$|S(x)-f(x)|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{216}h^3|f'''(y_i)|+O(h^4),\quad x\in[x_{i-1},x_i].$$

В дальнейшем нас удовлетворяет оценка

$$\|S-f\|_\infty=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|S(x)-f(x)|=O(h^3).$$

2. Рассмотрим краевую задачу

$$(Lu)(x)\equiv p(x)u''(x)+q(x)u'(x)+r(x)u(x)=f(x),\qquad x\in(a,b),$$

$$\begin{gathered}\alpha_1 u(a)+\beta_1 u'(a)=\gamma_1,\\ \alpha_2 u(b)+\beta_2 u'(b)=\gamma_2.\end{gathered}\tag{5}$$

Пусть функции $p$, $q$, $r$ и $f$ достаточно гладкие, $p(x)\geqslant p_0>0$, $r(x)\leqslant r_0<0$, $x\in(a,b)$, $\alpha_1,\alpha_2\geqslant 0$, $\beta_1\leqslant 0$, $\beta_2\geqslant 0$, $|\alpha_i|+|\beta_i|\neq 0$, $i=1,2$. Предположим, что задача (5) имеет решение $u\in C^4[a,b]$. Классической техникой можно показать, что соответствующая однородная краевая задача имеет лишь тривиальное решение, значит, решение задачи (5) единственное.

В методе коллокации приближенное решение $\tilde u(x)$ задачи (5) как квадратический сплайн определим условиями

$$\begin{gathered}(L\tilde u)(y_i)=f(y_i),\quad i=1,\ldots,n,\\ \alpha_1\tilde u(a)+\beta_1\tilde u'(a)=\gamma_1,\\ \alpha_2\tilde u(b)+\beta_2\tilde u'(b)=\gamma_2.\end{gathered}\tag{6}$$

Введем квадратические $B$-сплайны

$$B_i(x)=\frac{1}{h^2}\begin{cases}(x-x_{i-2})^2, & x\in[x_{i-2},x_{i-1}],\\ 2h^2-(x_i-x)^2-(x-x_{i-1})^2, & x\in[x_{i-1},x_i],\\ (x_{i+1}-x)^2, & x\in[x_i,x_{i+1}],\end{cases}$$

вне отрезка $[x_{i-2},x_{i+1}]$ положим $B_i(x)=0$. Дополняя сетку узлами $x_i=a+ih$ вне отрезка $[a,b]$ (нам достаточно взять еще $i=-2,-1,n+1,n+2$), можем определить $B_0(x),\ldots,B_{n+1}(x)$, они образуют базис в пространстве квадратических сплайнов класса $C^1$ на отрезке $[a,b]$ с узлами $x_i$, $i=0,\ldots,n$. При этом $\sum\limits_{i=0}^{n+1}B_i(x)=2$, $x\in[a,b]$.

Коэффициенты в представлении

$$\tilde u(x)=\sum_{i=0}^{n+1}c_iB_i(x)$$

определяются на основании условий (6) из системы

$$\begin{gathered}\left(\alpha_1-\frac{2}{h}\beta_1\right)c_0+\left(\alpha_1+\frac{2}{h}\beta_1\right)c_1=\gamma_1,\\
\left(\frac{2p(y_i)}{h^2}-\frac{q(y_i)}{h}+\frac{r(y_i)}{4}\right)c_{i-1}+\left(-\frac{4p(y_i)}{h^2}+\frac{3r(y_i)}{2}\right)c_i+\\
+\left(\frac{2p(y_i)}{h^2}+\frac{q(y_i)}{h}+\frac{r(y_i)}{4}\right)c_{i+1}=f(y_i),\quad i=1,\ldots,n,\\
\left(\alpha_2-\frac{2}{h}\beta_2\right)c_n+\left(\alpha_2+\frac{2}{h}\beta_2\right)c_{n+1}=\gamma_2.\end{gathered}\tag{7}$$

При малых $h$ система (7) однозначно разрешима.

Построим решению $u(x)$ задачи (5) интерполирующий квадратический сплайн $\bar u(x)$, удовлетворяющий условиям интерполяции $\bar u(y_i)=u(y_i)$, $i=1,\ldots,n$, и краевым условиям

$$\alpha_1\bar{u}(a)+\beta_1\bar{u}'(a)=\alpha_1 u(a)+\beta_1 u'(a)-\frac{\beta_1}{12}h^2u'''(a)-\frac{\alpha_1}{128}h^4u^{\mathrm{IV}}(a),$$

$$\alpha_2\bar{u}(b)+\beta_2\bar{u}'(b)=\alpha_2 u(b)+\beta_2 u'(b)-\frac{\beta_2}{12}h^2u'''(b)-\frac{\alpha_2}{128}h^4u^{\mathrm{IV}}(b),$$

он имеет представление

$$\bar{u}(x)=\sum_{i=0}^{n+1}\bar{c}_iB_i(x).$$

Нам уже известно, что $\|\tilde{u}-u\|_\infty=O(h^3)$. Поэтому достаточно оценивать $\|\tilde{u}-\bar{u}\|_\infty$. Кроме того, поскольку $\|\tilde{u}-\bar{u}\|_\infty\leqslant 2\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n+1}|c_i-\bar{c}_i|$, то мы будем оценивать $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n+1}|c_i-\bar{c}_i|$. Так как $L(\tilde{u}-\bar{u})(y_i)=$ $=p(y_i)(u''(y_i)-\bar{u}''(y_i))+q(y_i)(u'(y_i)-\bar{u}'(y_i))$, а также

$$\alpha_1(\tilde{u}(a)-\bar{u}(a))+\beta_1(\tilde{u}'(a)-\bar{u}'(a))=\frac{\beta_1}{12}h^2u'''(a)+\frac{\alpha_1}{128}h^4u^{\mathrm{IV}}(a),$$

$$\alpha_2(\tilde{u}(b)-\bar{u}(b))+\beta_2(\tilde{u}'(b)-\bar{u}'(b))=\frac{\beta_2}{12}h^2u'''(b)+\frac{\alpha_2}{128}h^4u^{\mathrm{IV}}(b),$$

то $c_i-\bar{c}_i$, $i=0,\ldots,n+1$, определяются из системы

$$\begin{gathered}\left(\alpha_1-\frac{2}{h}\beta_1\right)(c_0-\bar{c}_0)+\left(\alpha_1+\frac{2}{h}\beta_1\right)(c_1-\bar{c}_1)=\\ =\frac{\beta_1}{12}h^2u'''(a)+\frac{\alpha_1}{128}h^4u^{\mathrm{IV}}(a),\\ A_i(c_{i-1}-\bar{c}_{i-1})+B_i(c_i-\bar{c}_i)+C_i(c_{i+1}-\bar{c}_{i+1})=D_i,\qquad i=1,\ldots,n,\\ \left(\alpha_2-\frac{2}{h}\beta_2\right)(c_n-\bar{c}_n)+\left(\alpha_2+\frac{2}{h}\beta_2\right)(c_{n+1}-\bar{c}_{n+1})=\\ =\frac{\beta_2}{12}h^2u'''(b)+\frac{\alpha_2}{128}h^4u^{\mathrm{IV}}(b),\end{gathered}\tag{8}$$

где мы обозначали

$$A_i=\frac{2p(y_i)}{h^2}-\frac{q(y_i)}{h}+\frac{r(y_i)}{4},$$

$$B_i=-\frac{4p(y_i)}{h^2}+\frac{3r(y_i)}{2},$$

$$C_i=\frac{2p(y_i)}{h^2}+\frac{q(y_i)}{h}+\frac{r(y_i)}{4},$$

$$D_i=p(y_i)(u''(y_i)-\bar{u}''(y_i))+q(y_i)(u'(y_i)-\bar{u}'(y_i))=$$
$$=\frac{h^2}{24}(p(y_i)u^{\mathrm{IV}}(y_i)-q(y_i)u'''(y_i))+o(h^2).$$

Случай $\beta_1=\beta_2=0$ изучен в [1], мы показали, что

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty\leqslant\frac{h^2}{24}\max_{2\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{pu^{\mathrm{IV}}-qu'''}{r}(y_i)\right|+o(h^2).$$

Поэтому будем рассматривать другие варианты.

1) Пусть сначала $\alpha_1\neq 0$, $\beta_1\neq 0$, $\alpha_2\neq 0$, $\beta_2\neq 0$. Тогда в первом и последнем уравнениях системы (8) разность преобладания главной диагонали равняется $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ соответственно, а во внутренних уравнениях $2|r(y_i)|$. Поэтому имеем оценку

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n+1} |c_i-\bar{c}_i|\leqslant\max\left\{\frac{h^2}{24}\frac{|\beta_1|}{\alpha_1}|u'''(a)|,\right.$$

$$\left.\frac{h^2}{24}\frac{\beta_2}{\alpha_2}|u'''(b)|,\ \frac{h^2}{48}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{pu^{\mathrm{IV}}-qu'''}{r}(y_i)\right|\right\}+o(h^2),$$

следовательно,

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty\leqslant\max\left\{\frac{h^2}{12}\frac{|\beta_1|}{\alpha_1}|u'''(a)|,\ \frac{h^2}{12}\frac{\beta_2}{\alpha_2}|u'''(b)|,\right.$$

$$\left.\frac{h^2}{24}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{pu^{\mathrm{IV}}-qu'''}{r}(y_i)\right|\right\}+o(h^2), \tag{9}$$

а если $u^{\mathrm{IV}}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то в остаточном члене вместо $o(h^2)$ стоит $O(h^{2+\alpha})$.

2) Если $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\beta_1\neq 0$, $\beta_2\neq 0$, то (8) разложим на три системы. В системе

$$\begin{aligned}&\xi_0-\xi_1=0,\\ &A_i\xi_{i-1}+B_i\xi_i+C_i\xi_{i+1}=D_i,\quad i=1,\ldots,n,\\ &\xi_n-\xi_{n+1}=0\end{aligned}$$

исключаем $\xi_0$ и $\xi_{n+1}$, после этого разности преобладания главной диагонали будут все же $2|r(y_i)|$ и ее решение оценивается через

$$\frac{h^2}{48}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{pu^{\mathrm{IV}}-qu'''}{r}(y_i)\right|+o(h^2).$$

Затем решим еще системы

$$\begin{aligned}&\xi_0-\xi_1=-\frac{1}{24}h^3u'''(a),\\ &A_i\xi_{i-1}+B_i\xi_i+C_i\xi_{i+1}=0,\quad i=1,\ldots,n,\\ &\xi_n-\xi_{n+1}=0\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\xi_0-\xi_1=0,\\ &A_i\xi_{i-1}+B_i\xi_i+C_i\xi_{i+1}=0,\quad i=1,\ldots,n,\\ &\xi_n-\xi_{n+1}=-\frac{1}{24}h^3u'''(b).\end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим из них подробнее оценку решения системы (10). Ясно, что уже из соображений симметрии решение другой системы оценивается аналогично.

Исключая $\xi_0$, получаем уравнение

$$\xi_1-\left(1+\frac{2h^2r(y_1)}{2p(y_1)+hq(y_1)-\frac{7}{4}h^2r(y_1)}\right)\xi_2=0.$$

Обозначим

$$\delta_1(h)=\frac{2h^2r(y_1)}{2p(y_1)+hq(y_1)-\frac{7}{4}h^2r(y_1)},$$

тогда $\delta_1(h)=h^2\frac{r(y_1)}{p(y_1)}+O(h^3)<0$. Продолжая процесс исключения, получаем исходя из уравнения

$$\xi_{i-1}-(1+\delta_{i-1}(h))\xi_i=0$$

следующее уравнение

$$\xi_i-(1+\delta_i(h))\xi_{i+1}=0,$$

где

$$\delta_i(h)=$$

$$=\frac{h^2\frac{r(y_i)}{p(y_i)}+\delta_{i-1}(h)\left(1-\frac{h}{2}\frac{q(y_i)}{p(y_i)}+\frac{h^2}{8}\frac{r(y_i)}{p(y_i)}\right)}{1+\frac{h}{2}\frac{q(y_i)}{p(y_i)}-\frac{7}{8}h^2\frac{r(y_i)}{p(y_i)}-\delta_{i-1}(h)\left(1-\frac{h}{2}\frac{q(y_i)}{p(y_i)}+\frac{h^2}{8}\frac{r(y_i)}{p(y_i)}\right)}. \qquad (11)$$

Отсюда видно, что если $\delta_{i-1}(h)=O(h^2)$ и $\delta_{i-1}(h)<0$, то

$$\delta_i(h)=h^2\frac{r(y_i)}{p(y_i)}+\delta_{i-1}(h)+O(h^3),$$

а также $\delta_i(h)<0$. В конце процесса исключения получаем

$$-\delta_n(h)\xi_{n+1}=\frac{1}{24}h^3u'''(b).$$

Здесь

$$-\delta_n(h)=h^2\sum_{i=1}^{n}\frac{|r(y_i)|}{p(y_i)}+\sum_{i=1}^{n}O(h^3)\geqslant$$

$$\geqslant h(b-a)\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|r(y_i)|}{p(y_i)}+O(h^2).$$

Следовательно,

$$|\xi_{n+1}|\leqslant\frac{h^2|u'''(b)|}{24(b-a)}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{p(y_i)}{|r(y_i)|}+O(h^3). \qquad (12)$$

Поскольку $|\xi_i|\leqslant|\xi_{i+1}|$, то оценка $|\xi_{n+1}|$ распространяется и на все компоненты решения. Оценки решений всех трех систем суммируются и в итоге получаем оценку погрешности

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty\leqslant\frac{h^2(|u'''(a)|+|u'''(b)|)}{12(b-a)}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{p(y_i)}{|r(y_i)|}+$$

$$+\frac{h^2}{24}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{pu^{\mathrm{IV}}-qu'''}{r}(y_i)\right|+o(h^2), \qquad (13)$$

а если $u^{\mathrm{IV}}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то остаточный член есть $O(h^{2+\alpha})$.

3) Рассмотрим еще, например, случай $\alpha_1\neq 0$, $\beta_1\neq 0$, $\alpha_2=0$, $\beta_2\neq 0$. Тогда систему (8) разложим на две. В системе

$$\left(\alpha_1 - \frac{2}{h}\beta_1\right)\xi_0 + \left(\alpha_1 + \frac{2}{h}\beta_1\right)\xi_1 = \frac{\beta_1}{12} h^2 u'''(a) + \frac{\alpha_1}{128} h^4 u^{\mathrm{IV}}(a),$$
$$A_i\xi_{i-1} + B_i\xi_i + C_i\xi_{i+1} = D_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\xi_n - \xi_{n+1} = 0$$

исключаем $\xi_{n+1}$, а затем оценим ее решение на основании преобладания главной диагонали; по сравнению со случаем 1) здесь в оценке отсутствует член, содержащий $\alpha_2$ и $\beta_2$.

Кроме того, рассмотрим еще систему

$$\begin{gathered}\left(\alpha_1 - \frac{2}{h}\beta_1\right)\xi_0 + \left(\alpha_1 + \frac{2}{h}\beta_1\right)\xi_1 = 0,\\ A_i\xi_{i-1} + B_i\xi_i + C_i\xi_{i+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,\\ \xi_n - \xi_{n+1} = -\frac{1}{24} h^3 u'''(b).\end{gathered} \tag{14}$$

Первое уравнение записывается в виде $\xi_0 - (1 + \delta_0(h))\xi_1 = 0$, где $\delta_0(h) = 2h\alpha_1/(2\beta_1 - h\alpha_1)$. При малых $h$ имеем $h\alpha_1/\beta_1 < \delta_0(h) < h\alpha_1/2\beta_1 < 0$, следовательно, $\delta_0(h) = O(h)$. Формулы перехода (11) от $\delta_{i-1}$ к $\delta_i$ применимы и здесь. Имеем

$$\frac{d\delta_i}{d\delta_{i-1}} = \frac{\left(1 - \frac{h}{2}\frac{q(y_i)}{p(y_i)} + \frac{h^2}{8}\frac{r(y_i)}{p(y_i)}\right)\left(1 + \frac{h}{2}\frac{q(y_i)}{p(y_i)} + \frac{h^2}{8}\frac{r(y_i)}{p(y_i)}\right)}{N_i^2},$$

где через $N_i$ обозначен знаменатель правой части формулы (11). Из (11) вытекает еще последовательно, что

$$\delta_i(h) = h^2 \sum_{j=1}^{i} \frac{r(y_j)}{p(y_j)} + \delta_0(h) + \sum_{j=1}^{i} O(h^2) = O(h)$$

и $\delta_i(h) < 0$, значит, $N_i > 0$ и $\dfrac{d\delta_i}{d\delta_{i-1}} > 0$. Если теперь обозначить коэффициенты перехода $\delta_i(h)$ в системе (10) через $\delta_i^{(2)}(h)$, а в системе (14) через $\delta_i^{(3)}(h)$, то получаем, что $\delta_i^{(3)}(h) < \delta_i^{(2)}(h)$ при всех $i$. Следовательно, и в системе (14) имеем оценку (12). Окончательно получаем в данном случае, что

$$\begin{gathered}\|\tilde{u} - u\|_\infty \leqslant \frac{h^2|u'''(b)|}{12(b-a)} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{p(y_i)}{|r(y_i)|} + \\ + \max\left\{\frac{h^2}{12}\frac{|\beta_1|}{\alpha_1}|u'''(a)|,\ \frac{h^2}{24}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{pu^{\mathrm{IV}} - qu'''}{r}(y_i)\right|\right\} + o(h^2),\end{gathered} \tag{15}$$

а если $u^{\mathrm{IV}} \in \operatorname{Lip}\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то в остаточном члене вместо $o(h^2)$ можно написать $O(h^{2+\alpha})$.

3. Метод подобластей заключается в определении приближенного решения $\tilde{u}(x)$ условиями

$$\begin{gathered}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (L\tilde{u} - f)(x)\,dx = 0, \quad i = 1, \ldots, n,\\ \alpha_1\tilde{u}(a) + \beta_1\tilde{u}'(a) = \gamma_1,\\ \alpha_2\tilde{u}(b) + \beta_2\tilde{u}'(b) = \gamma_2.\end{gathered} \tag{16}$$

Мы не будем останавливаться на подробностях выкладок, укажем только на наиболее существенные отличия от метода коллокации (см. также [1]). Разлагая $p$, $q$ и $r$ по формуле Тейлора, получаем для определения коэффициентов $c_i$ систему

$$\left(\alpha_1-\frac{2}{h}\beta_1\right)c_0+\left(\alpha_1+\frac{2}{h}\beta_1\right)c_1=\gamma_1,$$

$$\left(\frac{2p(y_i)}{h^2}+\frac{p''(y_i)}{12}-\frac{q(y_i)}{h}+\frac{q'(y_i)}{6}+\frac{r(y_i)}{3}+O(h)\right)c_{i-1}+$$

$$+\left(-\frac{4p(y_i)}{h^2}-\frac{p''(y_i)}{6}-\frac{q'(y_i)}{3}+\frac{4}{3}r(y_i)+O(h)\right)c_i+ \tag{17}$$

$$+\left(\frac{2p(y_i)}{h^2}+\frac{p''(y_i)}{12}+\frac{q(y_i)}{h}+\frac{q'(y_i)}{6}+\frac{r(y_i)}{3}+O(h)\right)c_{i+1}=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,\quad i=1,\ldots,n,$$

$$\left(\alpha_2-\frac{2}{h}\beta_2\right)c_n+\left(\alpha_2+\frac{2}{h}\beta_2\right)c_{n+1}=\gamma_2.$$

Интерполянту $\bar{u}(x)$ построим как и при изучении метода коллокации. Для определения $c_i-\bar{c}_i$ получаем систему с матрицей системы (17), а в правых частях по сравнению с системой (8) различаются лишь

$D_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} L(u-\bar{u})(x)\,dx$. В [1] показано, что $D_i=\frac{1}{12}h^2(pu''')'(y_i)+$ $+O(h^3)$. Во внутренних уравнениях системы (17) при малых $h$ главная диагональ преобладает с разностями $2|r(y_i)|+O(h)$, следовательно, проходят все рассуждения, проведенные в случае системы (8). Ясно, что и в данном случае получаем оценки, аналогичные (9), (13) и (15) — изменяется только выражение, получаемое при оценке $D_i$. Таким образом, погрешность метода подобластей квадратическими сплайнами имеет следующую оценку

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty\leqslant\max\left\{\frac{h^2}{12}\frac{|\beta_1|}{\alpha_1}|u'''(a)|,\ \frac{h^2}{12}\frac{\beta_2}{\alpha_2}|u'''(b)|,\right.$$

$$\left.\frac{h^2}{12}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{(pu''')'}{r}(y_i)\right|\right\}+o(h^2),$$

если $\alpha_1\neq0$, $\beta_1\neq0$, $\alpha_2\neq0$, $\beta_2\neq0$;

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty\leqslant\frac{h^2(|u'''(a)|+|u'''(b)|)}{12(b-a)}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{p(y_i)}{|r(y_i)|}+$$

$$+\frac{h^2}{12}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{(pu''')'}{r}(y_i)\right|+o(h^2),$$

если $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\beta_1\neq0$, $\beta_2\neq0$;

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty\leqslant\frac{h^2|u'''(b)|}{12(b-a)}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{p(y_i)}{|r(y_i)|}+$$

$$+\max\left\{\frac{h^2}{12}\frac{|\beta_1|}{\alpha_1}|u'''(a)|,\ \frac{h^2}{12}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{(pu''')'}{r}(y_i)\right|\right\}+o(h^2),$$

если $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 \neq 0$. Во всех случаях остаточный член имеет порядок $O(h^{2+\alpha})$, если $u^{\mathrm{IV}} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

4. В заключение сделаем несколько библиографических замечаний, касающихся изученных методов. В [2] приведены оценки главного члена погрешности метода коллокации квадратическими сплайнами, фактически рассмотрены краевые условия $u(a) = \gamma_1$, $u(b) = \gamma_2$. При таких же краевых условиях в [1] оценка главного члена погрешности существенно уточнена, кроме того, проведено и исследование метода подобластей квадратическими сплайнами. В данной работе результаты [1] обобщены на случай более общих краевых условий. Отметим, что в [1] и [3] оценены также главные члены погрешности методов коллокации и подобластей кубическими сплайнами, их обобщение на более общие краевые условия будем рассматривать в другой работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Оя П., Рейтсекас А.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1987, **36**, № 2, 118—128.
2. *Khalifa, A. K. A., Eilbeck, J. C.* IMA J. Numer. Anal., 1982, **2**, 111—121.
3. *Оя П.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1988, вып. 833, 59—65.



*Тартуский университет* Поступила в редакцию 2/III 1990



*Peeter OJA*


## RAJAÜLESANDE LAHENDAMISEST RUUTSPLAINIDE ABIL


On vaadeldud ruutsplainidega kollokatsiooni- ja osapiirkondade meetodit sellise teist järku hariliku diferentsiaalvõrrandi rajaülesande lahendamisel, kus rajatingimustes võivad esineda ka lahendi tuletised. Veahinnangutes on välja eraldatud pealiige, mis kajastab sõltuvust diferentsiaalvõrrandi ja rajatingimuste kordajatest.



*Peeter OJA*


## ON THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH QUADRATIC SPLINES


We investigate the collocation and subregions methods (6), (16) with quadratic splines for the numerical solution of two-point boundary value problems (5). The bounds of error (9), (13), (15) for the collocation method and their analogues for the subregions methods give a dependence on the coefficients of the differential equation and the boundary conditions.