Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 4, 325—334
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.4.02

УДК 517.958

*Яан ЯННО*

# ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ, ПОСТОЯННОГО ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*(Представил Г. Вайникко)*

Пусть заданы функции $h(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \overline{\Omega}\times[\underline{z}, \overline{z}]$, где $\Omega$ — ограниченное, открытое, односвязное, непустое подмножество пространства $\mathbf{R}^2$. Поставим задачу:

найти $k \in C^1(\overline{\Omega})$:

$$\frac{\partial}{\partial x} k(x, y) \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} k(x, y) \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) + k(x, y)\Delta h(x, y, z) =$$

$$= Q(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \overline{\Omega}\times[\underline{z}, \overline{z}]. \tag{1}$$

В данной статье выводятся необходимые и достаточные условия для единственности решения задачи (1). В случае неединственности описывают совокупность решений задачи (1).

**1. О физическом существе задачи.** Как известно (см. напр. [1]), стационарную фильтрацию почвенно-грунтовых вод в области $\overline{G}\subseteq\mathbf{R}^3$ описывает уравнение

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( k(x) \frac{\partial}{\partial x_i} h(x)\right) = Q(x), \qquad x \in \overline{G}, \tag{2}$$

где $k$ — коэффициент фильтрации, $h$ — пьезометрический напор, $Q$ — функция источников. Обратная задача состоит в восстановлении функции $k$ на основе информации о $h$ и $Q$. В некоторых случаях рассматриваемая область имеет слоистую структуру, т. е. водоносные и водонепроницаемые слои располагаются горизонтально один над другим. В пределах одного водоносного слоя функция $k$ меняется мало в вертикальном направлении, т. е. можно предполагать функцию $k$ зависящей только от двух переменных. Уравнение (2) вырождается в уравнение (1).

В слоистых моделях фильтрации обычно делают следующее упрощение: уравнение (1) интегрируют по $z$ от $\underline{z}$ до $\overline{z}$, где $z=\underline{z}$, $z=\overline{z}$ — граничные плоскости слоя. Так приходят к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} k(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \overline{h}(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} k(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \overline{h}(x, y) +$$

$$+ k(x, y)\Delta \overline{h}(x, y) = \overline{Q}(x, y). \tag{3}$$

Здесь $\overline{h}$ — среднее значение функции $h$

$$\overline{h} = \frac{1}{\overline{z}-\underline{z}} \int_{\underline{z}}^{\overline{z}} h(x, y, z)\, dz$$

и $\overline{Q}$ состоит из двух слагаемых:

первое слагаемое — среднее значение функции $Q$ и второе слагаемое — член, связанный с потоком воды из соседних слоев. С точки зрения решения обратной задачи такое упрощение, конечно, влечет за собой потерю информации. Например, допустим что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h,\ \frac{\partial}{\partial y} h\right) \neq \vec{0}, \qquad (x, y, z) \in \overline{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}]$$

и этот вектор остается ненулевым и после усреднения, т. е. $\nabla \vec{\bar{h}} \neq \vec{0}$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$. Тогда характеристики уравнения (3) (интегральные кривые характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей уравнению (3)) выходят в своем продолжении в обе стороны из области $\overline{\Omega}$. В [2] показано, что в таком случае решение обратной задачи восстановления $k$ из (3) неединственно. Зато, при нарушении условия (4) или (16) данной статьи (в зависимости от поведения градиента $h$) решение задачи (1) станет единственным. Поэтому, при восстановлении коэффициента $k$ предпочтительнее воспользоваться (если мы, конечно, располагаем ей) полной информацией о поведении $h$ и $Q$ на $\overline{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}]$.

**2. Случай, когда градиент функции $h$ меняет направление на вертикальных линиях.** Определим следующие детерминанты — функции:

$$\Delta(x, y, z_1, z_2) = \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z_1) \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z_2) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z_2) \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z_1),$$

$$\Delta_x(x, y, z_1, z_2) = -\Delta h(x, y, z_1) \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z_2) + \Delta h(x, y, z_2) \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z_1),$$

$$\Delta_y(x, y, z_1, z_2) = \Delta h(x, y, z_1) \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z_2) - \Delta h(x, y, z_2) \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z_1)$$

и двухкомпонентный градиент

$$\vec{\nabla}_0 h(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z),\ \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z)\right).$$

В данном разделе мы проводим качественное исследование задачи (1) в случае, когда на вертикальных линиях вектор $\vec{\nabla}_0 h$ меняет направление, т. е. $\Delta(x, y, z_1, z_2)$ имеет ненулевые точки.

Теорема 1. *Пусть $h \in C^3(\overline{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}])$, $\vec{\nabla}_0 h(x, y, z) \neq \vec{0}$ в $\overline{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}]$. Пусть для каждого $(x, y) \in \overline{\Omega}$ существуют по меньшей мере два числа $z_1, z_2 \in [\underline{z}, \bar{z}]$, так что $\Delta(x, y, z_1, z_2) \neq 0$. Решение задачи* (1) *единственно тогда и только тогда, когда нарушено условие:*

*на множестве* $M = \{(x, y, z_1, z_2) \in \overline{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}]^2 : \Delta(x, y, z_1, z_2) \neq 0\}$
*функции* $\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ *зависят только от* $x, y$ *и* $\dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$. (4)

*Если выполнено* (4), *то существует всюду положительное решение* $k_0$ *однородной задачи, соответствующей* (1), *и целая совокупность решений задачи* (1) *равна множеству* $\{k^*(x, y) + c \cdot k_0(x, y),\ c \in \mathbf{R}\}$, *где* $k^*$ — *предполагаемое частное решение задачи* (1).

Доказательство. Обозначим соответствующую однородную задачу через $(1_0)$.

**А.** Покажем, что условие (4) гарантирует существование положительного на $\overline{\Omega}$ решения задачи $(1_0)$. Для каждой точки $(x, y) \in \overline{\Omega}$ существуют $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, такие, что $\Delta(x, y, z_1(x, y), z_2(x, y)) \neq 0$. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y) &= \frac{\Delta_x}{\Delta}(x, y, z_1(x, y), z_2(x, y)), \\ \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y) &= \frac{\Delta_y}{\Delta}(x, y, z_1(x, y), z_2(x, y)). \end{aligned} \tag{5}$$

В силу условия (4) функции $\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $\frac{\partial}{\partial z_2} \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $\frac{\partial}{\partial z_2} \frac{\Delta_y}{\Delta}$ равны нулю в точке $(x, y, z_1(x, y), z_2(x, y))$. Поскольку $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\Delta_y}{\Delta} \equiv \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Delta_x}{\Delta}$, то для системы (5) выполнено условие полной интегрируемости (см. [3]) и существует решение $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$. Функция $k_0(x, y) = \exp\{\psi(x, y)\}$ всюду положительна. Покажем, что она является решением задачи $(1_0)$. Фиксируем точку $(x, y, z) \in \overline{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}]$. Поскольку $\Delta(x, y, z_1(x, y), z_2(x, y)) \neq 0$, то вектор $\vec{\nabla}_0 h(x, y, z)$ линейно независим хотя бы от одного из векторов $\vec{\nabla}_0 h(x, y, z_1)$, $\vec{\nabla}_0 h(x, y, z_2)$. Пусть конкретно $\Delta(x, y, z, z_2) \neq 0$. В силу условия (4) из системы (5) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y) = \frac{\Delta_x}{\Delta}(x, y, z, z_2), \qquad \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y) = \frac{\Delta_y}{\Delta}(x, y, z, z_2). \tag{6}$$

Используя определение величин $\Delta$, $\Delta_x$, $\Delta_y$ и связи (6), непосредственной проверкой убедимся, что функция $\exp\{\psi\}$ удовлетворяет уравнению $(1_0)$ в точке $(x, y, z)$.

**Б.** Докажем следующую импликацию: если задача $(1_0)$ имеет всюду положительное решение $k_0$, то целая совокупность решений задачи $(1_0)$ равна множеству $\{c \cdot k_0(x, y),\ c \in \mathbf{R}\}$.

Если $k_0$ — решение, то решениями являются и все функции $c \cdot k_0(x, y)$, $c \in \mathbf{R}$. С другой стороны, пусть $k_0$ — положительное решение и $\bar{k}_0$ — любое другое решение задачи $(1_0)$. Функцию $\bar{k}_0$ можно представить в виде $\bar{k}_0(x, y) = c(x, y) \cdot k_0(x, y)$, $c \in C^1$. Из уравнения $(1_0)$ получим

$$\vec{\nabla} c(x, y) \cdot \vec{\nabla}_0 h(x, y, z) = 0, \qquad (x, y, z) \in \overline{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}]. \tag{7}$$

По предложениям теоремы $\vec{\nabla}_0 h(x, y, z) \neq \vec{0}$ и для каждой точки $(x, y) \in \overline{\Omega}$ найдутся $z_1, z_2$ такие, что $\vec{\nabla}_0 h(x, y, z_1)$, $\vec{\nabla}_0 h(x, y, z_2)$ неколлинеарны. Из (7) имеем $\vec{\nabla} c(x, y) \equiv \vec{0}$, откуда $c(x, y) \equiv c \in \mathbf{R}$.

**В.** Докажем необходимость условия (4) для существования нетривиального решения задачи $(1_0)$. Пусть нарушено (4) и существует решение $k_0$. Тогда множество $\Omega_0 = \{(x, y) \mid$ на пересечении $\{(x, y, z_1, z_2),\ z_1, z_2 \in [\underline{z}, \bar{z}]\} \cap M$ либо $\frac{\Delta_x}{\Delta} \not\equiv \mathrm{const}$, либо $\frac{\Delta_y}{\Delta} \not\equiv \mathrm{const}$, либо $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\Delta_y}{\Delta} \not\equiv \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Delta_x}{\Delta} \Big\}$ непусто. Покажем, что решение $k_0$ задачи $(1_0)$ равно нулю при $(x, y) \in \Omega_0$. Выпишем уравнение $(1_0)$ в точках $(x, y, z_1)$, $(x, y, z_2)$. Решая линейную систему относительно $\frac{\partial}{\partial x} k_0$, $\frac{\partial}{\partial y} k_0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} k_0(x, y) &= k_0(x, y) \frac{\Delta_x}{\Delta}(x, y, z_1, z_2), \\ \frac{\partial}{\partial y} k_0(x, y) &= k_0(x, y) \frac{\Delta_y}{\Delta}(x, y, z_1, z_2). \end{aligned} \tag{8}$$

При $(x, y, z_1, z^1_2)$, $(x, y, z_1, z^2_2) \in M$ из первого уравнения в (8) имеем

$$k_0(x, y)\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}(x, y, z_1, z^1_2) - \frac{\Delta_x}{\Delta}(x, y, z_1, z^2_2)\right) = 0.$$

В случае неконстантности $\frac{\Delta_x}{\Delta}$ получим $k_0(x, y) = 0$. Случай неконстантности $\frac{\Delta_y}{\Delta}$ рассматривается аналогично на основе второго уравнения в (8). Поскольку $M$ — открытое множество в $\mathbf{R}^4$, то система (8) для решения задачи $(1_0)$ выполнена с теми же $z_1$, $z_2$ и для окрестности точки $(x, y)$. Равенства (8) можно дифференцировать по $x, y$ ($h \in C^3$, предполагаемое решение $k_0 \in C^1$). Применим в (8) к первому уравнению оператор $\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\Delta_y}{\Delta}(x, y, z_1, z_2)$ и ко второму уравнению оператор $\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\Delta_x}{\Delta}(x, y, z_1, z_2)$. После вычитания получим

$$k_0(x, y)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta_y}{\Delta}(x, y, z_1, z_2) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta_x}{\Delta}(x, y, z_1, z_2)\right) = 0.$$

В случае $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta_y}{\Delta} \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta_x}{\Delta}$ получим $k_0(x, y) = 0$.

Пусть $\overline{\Omega}_0 \neq \overline{\Omega}$, т. е. $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_0 \neq \varnothing$. Множество $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_0$ состоит из односвязных кусков мерами больше нуля. Пусть $\Omega_1$ — произвольный кусок. Поставим задачу $(1_0)$ на суженной области $\overline{\Omega}_1 \times [\underline{z}, \bar{z}]$. Там выполнен аналог условия (4). На основе части **А** существует решение $\bar{k}_0(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega}_1, \bar{k}_0 > 0$, суженной задачи. На основе части **Б** имеем $k_0(x, y) = c \cdot \bar{k}_0(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega}_1$. Поскольку $\partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega}_0 \neq \varnothing$ и $k_0(x, y) = 0$, $(x, y) \in \overline{\Omega}_0$, то $\bar{k}_0(x, y) = 0$, $(x, y) \in \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega}_0$. В силу $\bar{k}_0 > 0$ на $\partial\Omega_1$ имеем $c = 0$ и $k_0(x, y) = 0$, $(x, y) \in \overline{\Omega}_1$. Необходимость доказана. Утверждения теоремы следуют из **А**, **Б**, **В**. □

На множестве $\Omega_0$, определенной в доказательстве теоремы 1, можно дать и формулы прямого вычисления значений решения задачи (1) через значения $h$, $Q$ и их производных. Определим еще

$$q_x(x, y, z_1, z_2) = -Q(x, y, z_1)\frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z_2) + Q(x, y, z_2)\frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z_1),$$

$$q_y(x, y, z_1, z_2) = Q(x, y, z_1)\frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z_2) - Q(x, y, z_2)\frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z_1).$$

Теорема 2. *Пусть существуют* $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$, $z_1, z_2^1, z_2^2 \in [\underline{z}, \bar{z}]$ *со следующими свойствами: в окрестности точек* $(x_0, y_0, z)$, $z = z_1, z_2^1\ z_2^2$ *функция* $h \in C^2$, $Q \in C$; $\Delta(x_0, y_0, z_1, z_2^1) \neq 0$, $\Delta(x_0, y_0, z_1, z_2^2) \neq 0$. *Пусть задача* (1) *имеет решение k.*
*Если*

$$\frac{\Delta_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^1) \neq \frac{\Delta_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^2), \tag{9}$$

*то*

$$k(x_0, y_0) = \frac{\frac{q_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^2) - \frac{q_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^1)}{\frac{\Delta_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^2) - \frac{\Delta_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^1)}. \tag{10}$$

*Если*

$$\frac{\Delta_y}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^1) \neq \frac{\Delta_y}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^2), \tag{11}$$

*то*

$$k(x_0, y_0) = \frac{\frac{q_y}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^2) - \frac{q_y}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^1)}{\frac{\Delta_y}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^2) - \frac{\Delta_y}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^1)}. \tag{12}$$

Доказательство. Выпишем уравнение (1) в точках $(x_0, y_0, z_1)$, $(x_0, y_0, z_2^1)$, $(x_0, y_0, z_2^2)$. Получим линейную систему третьего порядка относительно $\frac{\partial}{\partial x} k(x_0, y_0)$, $\frac{\partial}{\partial y} k(x_0, y_0)$, $k(x_0, y_0)$. В силу предположений теоремы величина $k(x_0, y_0)$ из этой системы определяется однозначно. Получим (10) или (12). □

Теорема 3. *Пусть существуют* $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$, $z_1, z_2 \in [\underline{z}, \bar{z}]$ *со следующими свойствами: в окрестности точек* $(x_0, y_0, z)$, $z = z_1, z_2$ *функция* $h \in C^3$, $Q \in C^1$; $\Delta(x_0, y_0, z_1, z_2) \neq 0$. *Пусть задача* (1) *имеет решение k. Если*

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2) \neq \frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta_y}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2), \tag{13}$$

*то*

$$k(x_0, y_0) = \left. \frac{\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)\frac{q_x}{\Delta} - \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\Delta_x}{\Delta}\right)\frac{q_y}{\Delta}}{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta_x}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta_y}{\Delta}} \right|_{(x_0, y_0, z_1, z_2)}. \tag{14}$$

Доказательство. Выпишем уравнение (1) в точках $(x_0, y_0, z_1)$, $(x_0, y_0, z_2)$. Из полученной системы выразим $\frac{\partial}{\partial x} k(x_0, y_0)$ и $\frac{\partial}{\partial y} k(x_0, y_0)$ через $k(x_0, y_0)$, $\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $\frac{\Delta_y}{\Delta}$, $\frac{q_x}{\Delta}$, $\frac{q_y}{\Delta}$. По отношению к выражению функции $\frac{\partial}{\partial x} k(x_0, y_0)$ применим оператор $\frac{\partial}{\partial y} -$

$-\dfrac{\Delta_y}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2)$ и к выражению функции $\dfrac{\partial}{\partial y} k(x_0, y_0)$ — оператор $\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\Delta_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2)$. После вычитания получим (14). □

Условие (4) абстрактно и численно трудно проверяемо. Приведем пример, когда на основе априорной информации можно сделать вывод о нарушении условия (4).

Пример. Пусть в области $\bar{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}]$ существуют три расположенные на одной вертикальной линии точки $P_1 = (x_0, y_0, z_1)$, $P_2 = (x_0, y_0, z_2^1)$, $P_3 = (x_0, y_0, z_2^2)$ со следующими свойствами: в окрестности точек $P_1$, $P_2$, $P_3$ функция $h \in C^2$, $Q \in C$; вектор $\vec{\nabla}_0 h(P_1)$ неколлинеарен с векторами $\vec{\nabla}_0 h(P_2)$, $\vec{\nabla}_0 h(P_3)$; $Q(P_1) = Q(P_2) = 0$, $Q(P_3) \neq 0$. Если задача (1) имеет решение $k$, $k(x_0, y_0) \neq 0$, то в случае $\dfrac{\partial}{\partial y} h(P_1) \neq 0$ выполнено (9), в случае $\dfrac{\partial}{\partial x} h(P_1) \neq 0$ выполнено (11), и следовательно, теорема 2 применима.

Действительно, пусть конкретно $\dfrac{\partial}{\partial y} h(P_1) \neq 0$. Выпишем уравнение (1) в точках $P_1$, $P_2$, $P_3$. Получим систему третьего порядка относительно $\dfrac{\partial}{\partial x} k(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial}{\partial y} k(x_0, y_0)$, $k(x_0, y_0)$. Линейными преобразованиями между первым и вторым, а также между первым и третьим уравнениями исключим из системы величину $\dfrac{\partial}{\partial y} k(x_0, y_0)$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial x} k(x_0, y_0) - \frac{\Delta_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^1) k(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} k(x_0, y_0) - \frac{\Delta_x}{\Delta}(x_0, y_0, z_1, z_2^2) k(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{Q(x_0, y_0, z_2^2) \dfrac{\partial}{\partial y} h(x_0, y_0, z_1)}{\Delta(x_0, y_0, z_1, z_2^2)} \neq 0.$$

Вычитая и деля на $k(x_0, y_0)$, получим (9). Случай $\dfrac{\partial}{\partial x} k(x_0, y_0) \neq 0$ рассматривается аналогично.

**3. Случай, когда градиент функции $h$ сохраняет направление на вертикальных линиях.** В данном разделе рассмотрим случай, когда в области $\bar{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}]^2$ выполняется $\Delta(x, y, z_1, z_2) = 0$.

Интегральные кривые системы

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1^z(t) &= \frac{\dfrac{\partial}{\partial x} h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(\varphi_1^z(t), \varphi_2^z(t), z), \\ \dot{\varphi}_2^z(t) &= \frac{\dfrac{\partial}{\partial y} h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(\varphi_1^z(t), \varphi_2^z(t), z) \end{aligned} \tag{15}$$

называются характеристиками уравнения (1). Если $h \in C^2(\overline{\overline{\Omega}} \times [\underline{z}, \bar{z}])$, $\Delta(x, y, z_1, z_2) \equiv 0$, $\vec{\nabla}_0 h(x, y, z) \neq \vec{0}$, $(x, y, z) \in \overline{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}]$, то функции $\frac{\partial}{\partial x} h \cdot |\vec{\nabla}_0 h|^{-1}$, $\frac{\partial}{\partial y} h \cdot |\vec{\nabla}_0 h|^{-1}$ не зависит от $z$ и через каждую точку $(x, y) \in \overline{\Omega}$ проходит одна и только одна характеристика. Обозначим ее через $I(x, y) \subset \overline{\Omega}$.

Определим множество $\overline{\Omega}_p \subseteq \overline{\Omega} : \overline{\Omega}_p$ состоит из таких и только таких точек $(x, y) \in \overline{\Omega}$, что на поверхности $I(x, y) \times [\underline{z}, \bar{z}]$ выполняется

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\Delta h(x, y, z)}{|\vec{\nabla}_0 h(x, y, z)|} = 0. \tag{16}$$

Теорема 4. *Пусть* $h \in C^3(\overline{\Omega} \times [\underline{z}, \bar{z}])$, $\Delta(x, y, z_1, z_2) = 0$, $\vec{\nabla}_0 h(x, y, z) \neq \vec{0}$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$, $z, z_1, z_2 \in [\underline{z}, \bar{z}]$.

*Предположим еще, что в области* $\overline{\Omega}$ *существует гладкая кривая* $\gamma$ *со следующими свойствами:*

1° *все характеристики имеют одну и только одну общую точку с* $\gamma$,
2° *в отмеченной точке касательные линии характеристики и кривой* $\gamma$ *не совпадают.*

*Пусть существует решение* $k^*$ *задачи* (1). *Тогда вся совокупность решений задачи* (1) *равна множеству*

$$\mathcal{K} = \left\{ k^*(x, y) + f(x_0, y_0) \cdot \exp\left\{ -\mu \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\Delta h(P)}{|\vec{\nabla}_0 h(P)|} d\varphi \right\},\ f \in C^1(\gamma), \right.$$

$$\left. f|_{(\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_p) \cap \gamma} = 0 \right\}.$$

*Здесь* $(x_0, y_0)$ — *точка пересечения кривой* $I(x, y)$ *с кривой* $\gamma$, $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F(p)\, d\varphi$ — *криволинейный интеграл, взятый вдоль характеристики,* $\mu = +1$, *если характеристика направлена из точки* $(x_0, y_0)$ *в точку* $(x, y)$ *и* $\mu = -1$ *в противном случае.*

Доказательство. Достаточно доказать, что вся совокупность решений однородной задачи $(1_0)$ равна множеству

$$\mathcal{K}_0 = \left\{ f(x_0, y_0) \exp\left\{ -\mu \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|} (p)\, d\varphi \right\},\ f \in C^1(\gamma), \right.$$

$$\left. f|_{(\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_p) \cap \gamma} = 0 \right\}.$$

Дадим гладкую функцию $f$ на кривой $\gamma$. Рассмотрим следующую задачу: найти $k_z \in C^1(\overline{\Omega})$, $z \in [\underline{z}, \bar{z}]$,

$$\frac{\partial}{\partial x} k_z(x, y) \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} k_z(x, y) \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) +$$

$$+ k_z(x, y) \Delta h(x, y, z) = 0, \quad (x, y) \in \overline{\Omega}, \quad z \in [\underline{z}, \bar{z}], \quad k_z|_\gamma = f. \tag{17}$$

Предположения о $h$ и $\gamma$ гарантируют (см. [3]) существование единственного решения суженной задачи (17), поставленной в окрестности кривой $\gamma$. Если решение

$$\bar{k}_{x_0,\, y_0,\, z}(t)=f(x_0, y_0)\exp\left\{-\int_0^t \frac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), z)\,d\tau\right\} \tag{18}$$

задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\bar{k}_{x_0,\, y_0,\, z}(t)+\frac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), z)\,\bar{k}_{x_0,\, y_0,\, z}(t)=0,$$

$$\bar{k}_{x_0,\, y_0,\, z}(0)=f(x_0, y_0),\quad \vec{\varphi}(t)\ \text{удовл. (15)},\quad \vec{\varphi}(0)=(x_0, y_0)$$

можно ограниченно продолжить вдоль всей дуги характеристики, то решение задачи (17) существует и единственно во всей области, причем $k_z(\varphi_1(t), \varphi_2(t), z)=\bar{k}_{x_0,\, y_0,\, z}(t)$ (см. [3]). Функция (18) ограничена, если характеристика, проходящая через $(x_0, y_0)$ определена только на ограниченном отрезке $[\underline{t}, \bar{t}]$ параметра $t$. Покажем это. Вычислим

$$\int_{t_1}^{t_2}|\vec{\nabla}_0 h(\varphi_1, \varphi_2, z)|\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{|\vec{\nabla}_0 h(\varphi_1, \varphi_2, z)|^2}{|\vec{\nabla}_0 h(\varphi_1, \varphi_2, z)|}\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h(\varphi_1, \varphi_2, z)\dot{\varphi}_1(t)+\frac{\partial}{\partial y}h(\varphi_1, \varphi_2, z)\dot{\varphi}_2(t)\right)dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}h(\varphi_1, \varphi_2, z)\,dt=h(\varphi_1, \varphi_2, z)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}.$$

Поскольку $|\vec{\nabla}_0 h(x, y, z)|\neq 0$ на $\bar{\Omega}$, то $|\vec{\nabla}_0 h(x, y, z)|\geqslant\alpha>0$. Следовательно, $\int_{t_1}^{t_2}|\vec{\nabla}_0 h(\varphi_1, \varphi_2, z)|\,dt\geqslant\alpha(t_2-t_1)$ и $h(\varphi_1, \varphi_2, z)\,\Big|_{t=1}^{t=2}\geqslant\alpha(t_2-t_1)$. Поскольку функция $h$ ограничена, то процесс $t_2-t_1\to\infty$ невозможен. Итак, задача (17) имеет единственное решение $k_z$. Из формулы (18) получим

$$k_z(x, y)=f(x_0, y_0)\exp\left\{-\mu\int_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)}\frac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(P)\,d\varphi\right\}. \tag{19}$$

Выберем $f|_{\overline{(\Omega\setminus\bar{\Omega}_p)}\cap\gamma}=0$. Поскольку $\dfrac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}$ не зависит от $z$ на $\bar{\Omega}_p\times[\underline{z}, \bar{z}]$, то и $k_z(x, y)$ не зависит от $z$ и является решением задачи $(\overline{1}_0)$. Следовательно, совокупность решений задачи $(1_0)$ содержит множество $\mathcal{K}_0$. Допустим, что существует решение $k_0$ задачи $(1_0)$, не входящее в множество $\mathcal{K}_0$. Тогда имеем точку $(x_0, y_0)\in(\bar{\Omega}\setminus\bar{\Omega}_p)\cap\gamma$, в которой $k_0\neq 0$. Функция $k_0$ является решением уравнения (17) и выражается через ее значения на $\gamma$ с помощью формулы (19). Поскольку

$\dfrac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}$ меняется по $z$ на поверхности $I(x_0, y_0)\times[\underline{z}, \bar{z}]$, то формула (19) дает зависящее от $z$ решение уравнения (17). Мы пришли к противоречию. Теорема доказана. □

Следствие. *Пусть выполнены предположения теоремы* 4. *Решение задачи* (1) *единственно тогда и только тогда, когда мера множества* $\overline{\Omega}_p$ *равна нулю.*

В следующей теореме производим формулу прямого вычисления решения задачи (1), когда на вертикальной линии имеются точки, в которых направления $\vec{\nabla}_0 h$ совпадают и условие (16) нарушено. Приводим формулу и для случая, когда на вертикальной линии имеются точки противоположного направления $\vec{\nabla}_0 h$. Поскольку в последнем случае $\vec{\nabla}_0 h$ меняет направление по $z$, то теоретически этот случай стыкуется с предыдущим разделом. Зато, в точках противоположности $\vec{\nabla}_0 h$ имеем также $\Delta(x, y, z_1, z_2)=0$. Поэтому приводимые формулы и методика анализа близки идеям настоящего раздела.

Теорема 5. *Пусть существуют* $(x_0, y_0)\in\overline{\Omega}$, $z_1, z_2\in[\underline{z}, \bar{z}]$ *со следующими свойствами: в окрестности точек* $(x_0, y_0, z_1)$, $(x_0, y_0, z_2)$ *функция* $h\in C^2$, $Q\in C$; $\vec{\nabla}_0 h(x_0, y_0, z_1)\neq\vec{0}$, $\vec{\nabla}_0 h(x_0, y_0, z_2)\neq\vec{0}$. *Пусть задача* (1) *имеет решение* $k$. *Если*

$$\frac{\vec{\nabla}_0 h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_1)=\frac{\vec{\nabla}_0 h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_2),$$

$$\frac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_1)\neq\frac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_2), \tag{20}$$

*то*

$$k(x_0, y_0)=\frac{\dfrac{Q}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_2)-\dfrac{Q}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_1)}{\dfrac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_2)-\dfrac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_1)}. \tag{21}$$

*Если*

$$\frac{\vec{\nabla}_0 h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_1)=-\frac{\vec{\nabla}_0 h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_2),$$

$$\frac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_1)\neq-\frac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_2), \tag{22}$$

*то*

$$k(x_0, y_0)=\frac{\dfrac{Q}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_1)+\dfrac{Q}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_2)}{\dfrac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_1)+\dfrac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x_0, y_0, z_2)}. \tag{23}$$

Доказательство. Уравнение (1) дает

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x, y, z)} k(x, y) + \frac{\Delta h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x, y, z) k(x, y) = \frac{Q}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x, y, z), \quad (24)$$

где $\nu(x, y, z) = \dfrac{\vec{\nabla}_0 h}{|\vec{\nabla}_0 h|}(x, y, z)$.

Выпишем уравнение (24) в точках $(x_0, y_0, z_1)$, $(x_0, y_0, z_2)$. Если выполнено (20), то вычитая из второго уравнения первое, приходим к (21). В случае (22) приходим к формуле (23) с помощью сложения. □

Приведем пример, когда условия данной теоремы выполнены.

Пример. Пусть в области $\overline{\Omega} \times [\underline{z}, \overline{z}]$ существуют две расположенные на одной вертикальной линии точки $P_1 = (x_0, y_0, z_1)$, $P_2 = (x_0, y_0, z_2)$ со следующими свойствами: в окрестности точек $P_1$, $P_2$ функция $h \in C^2$, $Q \in C$; $\vec{\nabla}_0 h(P_1) \neq \vec{0}$, $\vec{\nabla}_0 h(P_2) \neq \vec{0}$; векторы $\vec{\nabla}_0 h(P_1)$, $\vec{\nabla}_0 h(P_2)$ коллинеарны; $Q(P_1) = 0$, $Q(P_2) \neq 0$. Если задача (1) имеет решение $k$, $k(x_0, y_0) \neq 0$, то выполнено (20) или (22), и следовательно, теорема 5 применима.

Действительно, выпишем (24) в точках $P_1$ и $P_2$. Правая часть первого уравнения равна нулю и правая часть второго уравнения отличается от нуля. В случае $\nu(P_1) = \nu(P_2)$ приходим к (20) с помощью вычитания и в случае $\nu(P_1) = -\nu(P_2)$ — к (22) с помощью сложения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., Наука, 1977.
2. *Chicome, C., Gerlach, J.* Inverse and Ill-posed Problems. London, Academic Press, 1987, 513—521.
3. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1970.



*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонии*



Поступила в редакцию
12/II 1990



*Jaan JANNO*


### ÜHE MUUTUJA SUHTES KONSTANTSE FILTRATSIOONIKORDAJA MÄÄRAMISE PÖÖRDÜLESANDE LAHENDI ÜHESUSEST


On vaadeldud pöördülesannet (1) filtratsioonikordaja määramiseks. Etteantud funktsioonide argumentidel on üks dimensioon rohkem kui otsitava funktsiooni argumendil. On välja toodud tarvilikud ja piisavad tingimused ülesande (1) lahendi ühesuseks, mitteühese lahendi korral on kirjeldatud lahendikogumit (teoreemid 1, 4; järeldus teoreemist 4). Ühese lahendi korral on esitatud arvutusvalemid lahendi leidmiseks teatavates punktides (teoreemid 2, 3, 5).



*Jaan JANNO*


### ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM FOR DETERMINING THE FILTRATION COEFFICIENT CONSTANT WITH RESPECT TO ONE VARIABLE


The inverse problem (1) for the determination of the filtration coefficient is considered. The arguments of the given functions have one more dimension than the argument of the function to be determined. The necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the solution of problem (1) are given; in the case of non-uniqueness the set of solutions is described (Theorems 1, 4; Corollary from Theorem 4). In the case of uniqueness formulae are given for evaluating the solution in certain points (Theorems 2, 3, 5).