Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 4, 313—324
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.4.01

Eesti Teaduste Akadeemia Raamatukogu TALLINN Библиотека Академии Наук

УДК 510

Григорий МИНЦ

УСИЛЕННАЯ ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

(Представил Э. Тыугу)

Введение

Обычная теорема о нормальной форме для логики предикатов [1] — это утверждение об устранимости правила сечения в генценовской формулировке или эквивалентное утверждение для системы натурального вывода. Сформулируем и докажем усиление этого утверждения, из которого будет следовать теорема о нормальной форме для арифметики [2] и близких теорий. Будут даны два доказательства — короткое теоретико-модельное и более длинное, использующее технику финитного оперирования с бесконечными выводами [3, 4], но зато позволяющее получить теорему о нормализации ([5], см. ниже). Ввиду отмеченной связи с арифметикой наша теорема, в отличие от обычной теоремы о нормальной форме, не может быть доказана средствами арифметики. Проведем изложение для классического исчисления предикатов первого порядка, а затем укажем изменения, нужные для обобщений на интуиционистские системы и системы более высоких порядков.

Нашу нормальную форму (после модификации, обеспечивающей разрешимость, см. конец раздела 3) можно считать уточнением идеи Генцена (высказанной в конце работы [6]): введенное им понятие редукции для арифметики обобщается с арифметики на другие области математики.

Для упрощения изложения рассмотрим сначала нормальную форму выводов в исчислении предикатов, которая дает для арифметики несколько более слабый результат, чем в [2], но все же позволяет получить большинство обычных следствий. Более сложная формулировка, дающая обычную нормальную форму, рассматривается в последнем разделе.

Автор благодарен В. Бухгольцу, Х. Ярвелу и Г. Крайзелю за полезные замечания.

1. Теорема о нормальной форме

Рассматривается формулировка классического исчисления предикатов первого порядка со связками $\forall$, &, $\sim$, выводимыми объектами которой являются секвенции

$$X \Rightarrow Y, \tag{1}$$

где X, Y — неупорядоченные (возможно, пустые) списки формул. Предполагается, что рассматриваемый язык содержит хотя бы одну индивидную константу. Для введения логических связок в антецедент и сукцедент (т. е. слева и справа от $\Rightarrow$) постулированы обычные обратимые правила (см. напр., [7]). Правило сечения отсутствует. Предполагается также, что главные формулы E всех логических аксиом $X, E \Rightarrow E, Y$ — атомарные. Напомним, что главная формула правила — это форму-

© Eesti TA Toimetised. Füüsika * Matemaatika, 1990

ла из заключения (т. е. нижней секвенции), содержащая вводимый логический знак.

Скажем, что все свободные переменные данного вывода — **собственные** или что это **вывод с собственными переменными**, если индивидная переменная b входит в посылку, но не ниже этой посылки, только в том случае, когда это правило $\Rightarrow\forall$ и b — его собственная переменная. Заметим, что свободные переменные секвенции, входящей в такой вывод — это собственные переменные расположенных ниже правил ($\Rightarrow\forall$), и свободные переменные самой нижней секвенции вывода.

Чтобы получить многие из стандартных следствий теоремы нормализации для арифметики, достаточно уже следующей теоремы о нормальной форме, в которой **ограничение на главные формулы** означает, что никакая главная формула антецедентного правила не выводима.

Теорема 1. *Любая выводимая в исчислении предикатов секвенция имеет вывод, в котором все свободные переменные — собственные и выполнено ограничение на главные формулы.*

Перед доказательством этой теоремы приведем несколько примеров и дадим пояснения.

Пример 1. Обозначим через **A** конъюнкцию арифметических аксиом, отличных от индукции. Обозначим через $I(F,x)$ аксиому индукции для формулы F

$$I(F,x) == (F[0] \,\&\, \forall x(F[x] \to F[sx])) \to F(x), \tag{2}$$

где $==$ обозначает равенство по определению, а через $J(F,x)$ — следующую формулу, которая эквивалентна $\mathbf{A}\to I(F,x)$

$$J(F,x) == (\mathbf{A} \,\&\, F[0] \,\&\, \forall x(F[x] \to F[sx])) \to F(x). \tag{3}$$

Заметим, что выводимость секвенции $X\Rightarrow Y$ в арифметике первого порядка эквивалентна выводимости в исчислении предикатов секвенции вида

$$\mathbf{A}, \forall\forall x I(F,x), X \Rightarrow Y, \tag{4}$$

где первый знак $\forall$ означает замыкание кванторами всеобщности. Убедимся, что ограничение на главные формулы может зачастую нарушаться в выводах секвенций вида (4)

Замечание 1. Пусть N — цифра, т. е. терм вида 0, $s0$, $ss0$, ... Тогда формула $I(F,N)$ выводима.

Действительно, $I(F,0)$ имеет вид $(p\&q)\to p$, где $p==F(0)$, а $I(F,s^k0)$ выводится из секвенции

$$F[0],\ (F[0]\to F[s0]),\ \ldots,\ (F[s^{k-1}0]\to F[s^k0]) \Rightarrow F[s^k0]$$

по правилам $\forall\Rightarrow$, $\&\Rightarrow$, $\to\Rightarrow$.

Нормальная форма для арифметических выводов, которая получается из теоремы 1, будет описана с помощью правила индукции, неявно включавшего в себя сечение.

Лемма 1. (а) *Выводимость секвенции $X\Rightarrow Y$ в арифметике первого порядка эквивалентна выводимости некоторой секвенции вида*

$$\mathbf{A}, \forall\forall x J(F,x), X \Rightarrow Y \tag{5}$$

в исчислении предикатов.

(б) *формула $J(F,t)$ выводима в исчислении предикатов для любого постоянного терма t.*

Доказательство. (а) Ввиду выводимости секвенции $\mathbf{A}\Rightarrow$ $\Rightarrow(J(F,x)\leftrightarrow I(F,x))$, секвенция (5) эквивалентна (4).

(б) Если N — числовое значение терма t, то выводима секвенция

$$\mathbf{A} \Rightarrow t=N, \tag{6}$$

так как **A** содержит аксиомы равенства и определяющие равенства для всех функций из t. Секвенция (6) дает возможность вывести (с помощью аксиом равенства, которые содержатся в **A**, а тем самым и в J) секвенцию

$$J(F, N) \Rightarrow J(F, t),$$

а так как формула $J(F, N)$ следует из $I(F, N)$ в исчислении высказываний, получаем $J(F, t)$ в силу замечания 1. Лемма 1 доказана.

Замечание 2. Чтобы проиллюстрировать ограничения на главные формулы, заметим, что единственный вывод секвенции $\sim(p\&\sim p) \Rightarrow \sim(p\&\sim p)$, удовлетворяющий этому ограничению, анализирует сукцедент:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, \sim(p \,\&\, \sim p) \Rightarrow p}{p, \sim p, \sim(p \,\&\, \sim p) \Rightarrow}\ \text{аксиома}}{p \,\&\, \sim p, \sim(p \,\&\, \sim p) \Rightarrow}}{\sim(p \,\&\, \sim p) \Rightarrow \sim(p \,\&\, \sim p)}$$

Другие выводы, анализирующие антецедентную формулу $\sim(p\&\sim p)$, запрещены, так как эта формула выводима.

Замечание 3. Связи между элиминацией лишних переменных из предикатных выводов и нормализацией арифметических выводов, а также вводимое ниже правило VJ обсуждались В. Оревковым еще в 70-е годы. Идея об элиминации выводимых главных формул принадлежит автору.

Замечание 4. Заменяя все «лишние» вхождения переменных на 0, легко добиться того, чтобы все переменные стали собственными. Однако это преобразование может привести к нарушению ограничения на главные формулы, даже если оно было выполнено для исходного вывода. В то же время, может показаться, что это ограничение легко выполнить путем дописывания сечения ко всем правилам, где это ограничение нарушено, а затем устранения этих сечений обычным генценовским методом. Точнее, заключение $C, X \Rightarrow Y$ логического правила L с выводимой главной формулой C заменяется на фигуру

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow C;\ \overline{C, X \Rightarrow Y}\,L}{X \Rightarrow Y}\ \text{(сечения)}}{C, X \Rightarrow Y}\ \text{(утончение)} \qquad (7)$$

В процессе устранения сечения из вывода исчезнут все правила, вводящие формулы сечения, в том числе само правило L. Проблема заключается в том, что при этом ограничение на главные формулы будет нарушаться для других правил, и неясно, завершится ли итерация описанного преобразования. Мы вернемся к этой проблеме в разделе 3.

Х. Ярвел заметил, что ограничение на главные формулы можно переформулировать для натуральных выводов следующим образом: допущения не могут быть выводимы в исчислении предикатов.

2. Теорема о нормальной форме вывода для арифметики

Перед тем, как доказать теорему 1, выведем из нее теорему о нормальной форме для классической арифметики первого порядка, используя аксиоматизацию, которая получается добавлением к аксиоматике исчисления предикатов

(а) всех бескванторных частных случаев обычных арифметических аксиом (к числу которых мы будем относить и аксиомы равенства) с замыканием по правилу сечения;

(б) правила индукции в виде

$$\frac{X \Rightarrow F[0], Y;\ \ X, F[b] \Rightarrow F[sb], Y\ \ F[t], X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y}\ (VJ),$$

где b — новая переменная (собственная переменная правила индукции, не входящая в $X, Y, F[t]$), s — символ функции следования (прибавления 1), а t — терм правила индукции (индукционный терм). Понятие вывода с собственными переменными по нашим правилам, включающим VJ, определяется так же, как и раньше с учетом собственных переменных VJ. Скажем, что вывод **константно-нормален,** если в нем все переменные — собственные и любой индукционный терм содержит свободные переменные, т. е. не является константным. Мы увидим, что это понятие тесно связано с более стандартным понятием нормального вывода в арифметике и позволяет получить наиболее известные следствия теоремы о нормальной форме.

Следствие 1. *Всякая выводимая в арифметике секвенция вида* (5) *имеет константно-нормальный вывод. Более того, имеется примитивно рекурсивное (даже полиномиальное) преобразование любого предикатного вывода секвенции* (5) *с собственными переменными, удовлетворяющего ограничению на главные формулы, в константно-нормальный вывод секвенции* $X \Rightarrow Y$.

Доказательство. Пусть d — вывод секвенции (5) в исчислении предикатов. Вычеркнем из всех секвенций, входящих в d, все антецедентные члены, имеющие один из видов $\forall\forall x J(F, x)$, $\forall x J(F, x)$, $J(Y, t)$. При этом сохраняются все применения правил, кроме тех, у которых главная формула имеет вид $J(F, t)$. Последние перейдут в фигуры вида

$$\frac{Z \Rightarrow (F[0] \,\&\, \forall x (F[x] \rightarrow F[sx]), U;\ \ Z, F[t] \Rightarrow U}{Z \Rightarrow U}. \qquad (8)$$

Используя обратимость сукцедентных правил для $\&, \forall, \sim$, легко преобразовать (8) в правило YJ, а всю рассматриваемую фигуру в вывод d' секвенции $\mathbf{A}, X \Rightarrow Y$. Любое правило из d' происходит от некоторого правила из d, причем взаимное расположение правил остается неизменным. В частности, собственные переменные в выводах d и d' — одни и те же (только некоторые собственные переменные правил $\Rightarrow \mathbf{A}$, прослеживаемые до $J(F, t)$ становятся собственными переменными правила VJ), так что d' остается выводом с собственными переменными. Если d удовлетворяет ограничению на главные формулы, то индукционный терм в правиле VJ не является константным в силу леммы 1(б). Чтобы избавиться от антецедентной формулы $\mathbf{A}$, сдвинем максимально вверх все применения правил с главной формулой, прослеживаемой до $\mathbf{A}$, и применим к ним преобразование, которое раньше применялось к аксиоме индукции. Вычеркнем неатомарные формулы, прослеживаемые до $\mathbf{A}$, и заменим правила, вводящие кванторы или пропозициональные связки, на сечения с бескванторными арифметическими аксиомами. Эти сечения не считаются частью окончательного вывода, а включаются в анализ наших арифметических аксиом. Следствие 1 доказано.

Замечание 5. Введенные Д. Правицем [11] преобразования предикатных генценовских выводов в натуральные можно естественным образом распространить на наши арифметические выводы. При этом константно-нормальные выводы перейдут в натуральные, не содержащие

ни максимальных формул, ни константных индукционных термов. Так можно было бы получить обычные следствия теоремы о нормальной форме, но мы получим их непосредственно.

Следствие 2. (а) *Константно-нормальный вывод замкнутой формулы* $(Ex)R(x)$ *с бескванторной формулой* R *не содержит свободных переменных. Следовательно, он не содержит правила индукции.*

(б) *Такой вывод можно примитивно рекурсивно перестроить в вывод секвенции вида* $\Rightarrow R(t)$.

Доказательство. (а) доказывается индукцией «снизу вверх» по данному выводу, начиная с его последней секвенции $\Rightarrow (Ex)R(x)$.

(б) — это стандартное следствие утверждения (а). Действительно, рассмотрим все применения правила $(\Rightarrow E)$, входящие в вывод. Они имеют вид $R(t_i)/(Ex)R(x)$ $(i=1, \ldots, m)$. Заменяя в этом выводе формулу $(Ex)R(x)$ на список $R(t_1), \ldots, R(t_m)$, построим вывод секвенции $\Rightarrow R(t_1), \ldots, R(t_m)$. Так как формулы $R(t_i)$ замкнуты и не содержат кванторов, мы можем вычислить их истинностные значения. Если хотя бы одна из этих формул истинна, то она искомая. В противном случае строим искомый вывод так:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow R(t_1), \ldots, R(t_m);\ R(t_1) \Rightarrow; \ldots; R(t_m) \Rightarrow}{\Rightarrow}\ \text{(сечения)}}{\Rightarrow (0)}\ \text{(утончение)}$$

Разумеется, в действительности второй случай невозможен, он рассмотрен для того, чтобы избежать ссылки на непротиворечивость арифметики.

3. Доказательство теоремы о нормальной форме для исчисления предикатов

Докажем, что любая выводимая секвенция $X \Rightarrow Y$ (обозначаемая ниже через S) имеет вывод с собственными переменными, удовлетворяющий ограничению на главные формулы.

Доказательство. Предположим, что нужного вывода нет. Вспомним построение канонического дерева поиска вывода секвенции путем полного перебора (снизу вверх) всевозможных правил, по которым рассматриваемая секвенция могла бы получиться (см. [7], § 49 или [8]). Это построение состоит из шагов, на каждом из которых анализируется (путем «контрприменения» правила) одна из формул, входящих в секвенцию, полученную на предыдущей стадии. Модифицируем этот процесс, запретив контрприменения правил к выводимым антецедентным формулам, и будем следить за тем, чтобы все свободные переменные были бы собственными, т. е. будем подставлять в правиле $(\forall\Rightarrow)$ только термы, содержащие свободно разве лишь свободные переменные из S и собственные переменные правил $(\Rightarrow\forall)$, находящихся ниже анализируемой секвенции.

Результирующее дерево обозначим через T_S. Как и в обычном теоретико-модельном доказательстве обычной теоремы о нормальной форме, возможны два случая: полученное дерево — закрытое (т. е. оно конечно и все его ветви обрываются на аксиомах — секвенциях вида $Z, E \Rightarrow E, U$ с атомарными E) или незакрытое. В первом случае мы получили искомый вывод, что противоречит предположению. Остается рассмотреть второй случай и построить модель, опровергающую S. Построение этой модели также совершенно стандартно — следует взять незакрытую ветвь W канонического дерева (которая имеется по лемме Кенига). Осторожность нужна только при проверке того, что эта ветвь

определяет контрмодель исходной секвенции на универсуме U всех термов, встречающихся в ветви W.

Обозначим через W_a и W_c соответственно антецедент и сукцедент бесконечной ветви W, т. е. множества формул, входящих в качестве членов соответственно в антецеденты и сукцеденты секвенций из W. Они обладают свойствами, очень похожими на те, которые используются в доказательстве обычной теоремы о нормальной форме.

(а) W_a, W_c не пересекаются по атомарным формулам (иначе W была бы закрыта).

(~) Если $\sim B$ принадлежит W_c (соответственно невыводима и принадлежит W_a), то B принадлежит W_a (соответственно W_c).

(&) Если $(B\&C)$ принадлежит W_c, (соответственно невыводима и принадлежит W_a), то хотя бы одна из формул B, C (соответственно обе эти формулы) принадлежит W_c (соответственно W_a).

($\rightarrow\forall$) Если $\forall xB$ принадлежит W_c, то формула $B_x[b]$ для некоторого b принадлежит W_c.

($\forall\rightarrow$) Пусть $\forall xB$ невыводима и принадлежит W_a, а терм t принадлежит универсуму U ветви W. Тогда $B_x[t]$ принадлежит W_a.

Обозначим через Φ (единственную) модель (полную оценку) с индивидной областью U, которая на атомарных формулах E, содержащих только термы из U, определяется условием:

$\Phi(E)=1$ тогда и только тогда, когда E принадлежит W_a.

Докажем, что Φ продолжает W, т. е.

$$(C \in W_a \rightarrow \Phi(C)=1)\ \&\ (C \in W_c \rightarrow \Phi(C)=0). \tag{9}$$

Соотношение (9) доказывается почти стандартно индукцией по длине формулы C. Базис индукции обеспечивается свойством (а) ветви W, а индукционный переход — свойствами (~), (&), ($\Rightarrow\forall\Rightarrow$). В специальном рассмотрении нуждается только случай, когда антецедентная формула C выводима. Но в силу корректности исчисления предикатов в этом случае $\Phi(C)=1$ для любой модели Φ, и (9) доказано.

Ввиду следствий 1, 2 из теоремы 1 финитно следует непротиворечивость (и даже Σ_1-рефлексия) для арифметики. Поэтому в доказательстве теоремы 1 должны использоваться средства, выходящие за пределы арифметики. И действительно, именно таково утверждение о продолжимости любого множества атомарных формул по модели без расширения индивидной области.

Заметим, что наше понятие нормальной формы для вычисления предикатов неразрешимо, так как в нем существенно используется проверка формул на выводимость. Действительно, вывод

$$\dfrac{\dfrac{\overline{A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow (Ex)A}}{(Ex)A \Rightarrow (Ex)A}$$

с нормальным выводом секвенции $A \Rightarrow A$ является нормальным тогда и только тогда, когда $(Ex)A$ невыводима. Чтобы обеспечить нормальную выводимость секвенций $A \Rightarrow A$ для неразрешимого класса формул вида $(Ex)A$ можно взять A в виде $\forall y(Ez)M$ с бескванторной M так, что выводимость A и ее подформул будет разрешима.

Однако для получения следствия 1 достаточно разрешимого ограничения на главные формулы: главная формула антецедентного правила не должна принадлежать некоторому разрешимому классу выводимых формул, например, она не должна иметь вида $J(A, t)$ с константным термом t.

4. Теорема нормализации

Наше доказательство теоремы о нормальной форме в разделе 3 дает некоторый метод построения нормальной формы вывода d секвенции S: следует забыть о существовании вывода d и построить дерево T_S. Доказательство теоремы 1 дает гарантию, что T_S — требуемый вывод. Этот метод неудовлетворителен, например, в случае, когда исходный вывод d содержит некоторую информацию и мы хотим выявить ее путем приведения самого вывода d к нормальной форме (ср. общие соображения из [5] и их приложения к конкретным теоретико-числовым оценкам в [9]). В этом случае нужны утверждения о том, что вывод можно привести к нормальной форме путем нормализации — конечной цепочки преобразований некоторого фиксированного типа (см. [5]). Мы докажем усиление теоремы 1, из которого будет следовать соответствующее усиление следствия 1.

Определим подходящие редукции. Это удобно сделать для генценовской формулировки, где постулированы правила сечения и утончения.

$$\frac{X \Rightarrow Y}{C, X \Rightarrow Y},$$

которые и без того допустимы в обычных формулировках.

D-редукция будет применяться к заключению правила, вводящего формулу C в антецедент секвенции $C, X \Rightarrow Y$, если C доказуема в исчислении предикатов. Эта редукция, по существу, описана в замечании 4 и состоит в вычеркивании антецедентной формулы C с ее последующим введением с помощью утончения и добавлении сечения по формуле C

$$\frac{\dfrac{\Rightarrow C;\quad \dfrac{}{C, X \Rightarrow Y}\,L}{X \Rightarrow Y}}{C, X \Rightarrow Y} \tag{10}$$

D-редукция **применима** только, если соответствующая формула C не прослеживаема (вниз по выводу) до формулы сечения или утончения. Такую формулу, пригодную для D-редукции, назовем **редуцируемой.**

Будем считать **редукциями** обычные шаги устранения сечения в исчислении предикатов (включая замену свободных переменных на константы, если не все свободные переменные являются собственными), и D-редукции. Легко видеть, что вывод нормален в смысле определения из пункта 1 тогда и только тогда, когда к нему не применима никакая редукция. Мы докажем теорему о нормализации.

Теорема 2. *Любой вывод можно путем конечного числа редукций перестроить в вывод той же секвенции, к которому не применима никакая редукция.*

Доказательство. Применим конструкцию из [4] (см. также [10]): преобразуем данный вывод в исчислении предикатов в инфинитарный вывод («почти» в исчислении предикатов), произведем в инфинитарном выводе все D-редукции, которые вообще могут встретиться в процессе нормализации, устраним из получившегося вывода сечение, а затем уберем все лишнее, получив снова вывод в исчислении предикатов. Все шаги, кроме последнего, формализуемы в арифметике (см. [3]), а на последнем шаге применяется рекурсия до ε_0.

Рассмотрим инфинитарный вариант логики предикатов $PC_{\inf}$, в котором правило ($\Rightarrow\forall$) имеет вид

$$\frac{Z \Rightarrow U, B[b];\ Z \Rightarrow U, B[t_1];\ \ldots;\ Z \Rightarrow U, B[t_n];\ \ldots}{Z \Rightarrow U, \forall xB} \quad (\Rightarrow \forall_{\inf}),$$

где b — новая переменная, а $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ — полный перечень термов рассматриваемого языка. (В присутствии квантора существования пришлось бы модифицировать аналогичным образом правило его введения в антецедент.)

Вывод в инфинитарной системе обычно определяется как локально корректная фундированная фигура (ср. [3]). Нам понадобится дополнительная структура: потребуем, чтобы была указана максимальная сложность сечений, включим в число правил повторение S/S и потребуем, чтобы в каждом узле a рассматриваемого вывода, кроме секвенции S_a находился еще ординал w_a меньший ε_0, а также финитный вывод d_a секвенции S_a, т. е. ее вывод в обычной формулировке исчисления предикатов. При этом ординалы w_a должны возрастать от аксиом к нижней секвенции, а выводы d_a должны быть согласованы друг с другом:

если S_a получается из предшествующих секвенций по правилу, отличному от повторения и $(\Rightarrow\forall_{\inf})$, то d_a получается из выводов этих секвенций по тому же правилу;

в случае правила повторения выводы посылки и заключения могут получаться друг из друга любыми редукциями;

в случае $(\Rightarrow\forall_{\inf})$ вывод заключения получается из вывода самой левой посылки по правилу $(\Rightarrow\forall)$, а выводы остальных посылок получаются из вывода самой левой путем подстановки термов t_i вместо переменной b. Следующее утверждение легко доказывается тем же методом, который обычно применяется для арифметики, т. е. путем «разворачивания» правила $(\Rightarrow\forall)$ в инфинитарную форму.

Теорема 3. *По всякому выводу d в исчислении предикатов можно построить вывод d' той же конечной высоты в системе $PC_{\inf}$ с той же последней секвенцией, причем d' не содержит сечения и финитный вывод $d_{\varnothing}$, сопоставленный самому последнему узлу $\varnothing$ бесконечного вывода, совпадает с исходным финитным выводом d.*

Вывод в системе $PC_{\inf}$ назовем **нормальным**, если к нему неприменима никакая редукция. Теорема 2 будет получена из теоремы нормализации для $PC_{\inf}$ (теорема 5) и того обстоятельства, что из нормального вывода в $PC_{\inf}$ извлекается нормализующая последовательность редукций для $d_{\varnothing}$ (теорема 6). Только последнее утверждение выходит за рамки арифметики. В нашем случае перед нормализацией инфинитарного вывода d' нужно еще одно преобразование, которое соответствует «разворачиванию» индукции в последовательность сечений, и в случае арифметики включается в переход $d \to d'$.

Назовем вывод в $PC_{\inf}$ **развернутым**, если в нем все свободные переменные — собственные и неприменимы D-редукции. Заметим, что развернутый вывод может содержать сечения.

Теорема 4. *По всякому выводу d в системе $PC_{\inf}$ можно построить развернутый вывод $d1$ высоты меньше ω^3 с той же последней секвенцией, и такой что сечения в $d1$ применяются только к подформулам формул из d и $d_{\varnothing} = d1_{\varnothing}$, т. е. финитные выводы, сопоставленные последним секвенциям этих выводов, совпадают.*

Доказательство. Применим индукцию по максимальной сложности «неразвернутых» главных формул в d. Как часто бывает, для этого нужно обобщить доказываемое утверждение.

Лемма 2. *Пусть дан вывод d в $PC_{\inf}$ высоты w, в котором редуцируемые формулы имеют сложность не более $g+1$. Тогда, применяя*

редукции и преобразование из теоремы 2, можно построить вывод $d1$, в котором редуцируемые формулы имеют сложность не более g. При этом последние секвенции и оснащающие выводы для $\varnothing$ в d, $d1$ совпадают, сечения в $d1$ — это (с точностью до подстановок термов вместо переменных) сечения из d, а также, быть может, сечения по редуцируемым формулам сложности $g+1$, и высота $w1$ вывода $d1$ удовлетворяет условию:

$$w1 \leqslant \omega^2 + w, \text{ если } w < \omega, \text{ то } w1 < \omega^2.$$

Доказательство леммы 2. В данном выводе d произведем D-редукцию всех редуцируемых формул. При этом добавятся сечения по этим формулам и выводы (в обычном исчислении предикатов без сечения) этих формул. Новые редуцируемые формулы могут появиться только в добавленных выводах. При этом в силу свойства подформульности для выводов в обычном исчислении предикатов сложность редуцируемых формул не превосходит g. Теперь «развернем» правила $(\Rightarrow\forall)$ в добавленных конечных выводах и заменим константами лишние свободные переменные. Это вызовет разве лишь такие же замены в редуцируемых формулах и формулах сечений.

Дописывание «оснащающих» выводов в исчислении предикатов производится очевидным образом. Остается расставить высоты так, чтобы было выполнено (10). В силу теоремы 2 мы дописываем выводы конечной высоты. Поэтому в случае $w<\omega$ применимо то же рассуждение, что и в случае арифметики: $w1 \leqslant \omega(n+1)$, где n — максимальное число применений правила $(\Rightarrow\forall)$ в одной ветви вывода. В остальных случаях достаточно просто прибавить слева ω^2 ко всем высотам Лемма 2 доказана.

Теорема 4 получается из нее индукцией по g.

Теорема 5. (а) *Стандартные шаги устранения сечения из инфинитарных выводов переводят вывод снова в вывод с той же последней секвенцией и тем же d, а развернутый вывод — в развернутый.*

(б) *Всякий вывод в $PC_{\inf}$ примитивно рекурсивно приводится к нормальной форме с обычной оценкой высоты.*

Доказательство. Сначала выведем (б) из (а). Стандартные шаги устранения сечения понижают максимальную сложность сечения, поэтому через конечное число шагов сечения исчезнут. Если исходный вывод был развернутым, то и результирующий вывод будет таким. Но в вывод, не содержащий сечений, не могут входить фигуры (10), поэтому развернутый вывод без сечения нормален.

Пункт (а) доказывается просмотром обычных шагов устранения сечения — его подъема по обеим ветвям вверх и замены сечениями по подформулам в случае, когда обе формулы сечения непосредственно участвуют в применении правила. Для нас существенно, что при этом не появляется новых редуцируемых формул. Действительно, при редукции сечения

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow B[b];\ \Rightarrow B[t_1];\ \ldots;\ \Rightarrow B[t_i];\ \ldots}{\Rightarrow \forall x B} \qquad \dfrac{B[t_i] \Rightarrow U}{\forall x B \Rightarrow U}}{\Rightarrow U}$$

мы просто берем i-ю посылку правила $(\Rightarrow\forall)$ и «сечем» ее с секвенцией $D[t_i] \Rightarrow U$. Если бы сохранилась формулировка $(\Rightarrow\forall_{\inf})$ в виде обычного правила $(\Rightarrow\forall)$, то пришлось бы делать подстановку терма t_i вместо собственной переменной, что могло бы привести к возникновению новых редуцируемых формул. Этим завершается доказательство теоремы 5.

Теорема 6. *Всякий нормальный вывод d в системе $PC_{\inf}$ содержит нормализующую последовательность для (финитного) вывода $d_{\varnothing}$. Ее можно извлечь с помощью рекурсии по высоте вывода d.*

Доказательство. Вычеркнем из вывода d все лишние посылки правил ($\Rightarrow\forall$). Полученная фигура, которую мы обозначим через $|d|$, является фундированным деревом с конечным ветвлением. Поэтому в силу леммы Кенига она сама конечна, а тем самым является (с точностью до вычеркивания повторений) нормальным выводом своей последней секвенции. Однако мы, воспользовавшись индукцией по высоте вывода d, докажем более сильное утверждение: $d_{\varnothing}$ редуцируется к $|d|$.

Базис (вывод состоит только из аксиомы) очевиден, а индукционный переход получается с помощью условий согласованности на финитные выводы d_a, перечисленных в определении вывода в системе $PC_{\inf}$. Редукция $d_{\varnothing}$ к $|d|$ «накапливается» как раз в правилах повторения. Этим завершается доказательство теоремы 6.

Доказательство теоремы 5. Применяем теоремы 3—6.

5. Нормальные формы, учитывающие вид термов. Обобщение на другие системы

Наметим здесь обобщение предшествующих результатов, позволяющее получить более традиционную формулировку теоремы о нормальной форме для арифметики.

Пусть зафиксирована некоторая замкнутая формула A (например, конъюнкция арифметических аксиом, отличных от индукции), некоторый класс T-термов и операция $t\mapsto t1$, определенная на термах из T и выводящая из этого класса: $t1$ не принадлежит T, но содержит только те переменные, которые входят в t. Пусть далее зафиксирован класс K формул, начинающихся квантором всеобщности и таких, что для любой формулы $\forall xB$ из K и любого терма t из T в исчислении предикатов выводима формула

$$(A \,\&\, B_x[t1]) \Rightarrow B_x[t] \tag{11}$$

или, что то же, секвенция $A \,\&\, B[t1] \Rightarrow B[t]$.

Скажем, что правило $\forall\Rightarrow$ является (A, T, K)-**редуцируемым**, если его главная формула принадлежит K, но не является предком формулы A, а подставляемый терм t принадлежит классу T. О боковой формуле $B[t]$ этого правила мы скажем, что она (A, T, K)-**редуцируема.** Не содержащий сечения вывод секвенции $A, X\Rightarrow I$ назовем (A, T, K)-**нормальным**, если в нем все свободные переменные — собственные, выполнено ограничение на главные формулы и нет (A, T, K)-редуцируемых правил. Наш основной результат — следующее утверждение.

Теорема 7. *Любая выводимая в исчислении предикатов секвенция вида $A, X\Rightarrow Y$ имеет (A, T, K)-нормальный вывод.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Мы просто запретим контрприменения правил к выводимым или (A, T, K)-редуцируемым формулам и будем следить за тем, чтобы все свободные переменные были собственными в процессе построения канонического дерева. В обозначениях раздела 3 надо проверить только, что антецедентные (A, T, K)-редуцируемые формулы истинны в модели, определяемой бесконечной ветвью канонического дерева. Такая формула имеет вид $B[t]$, и по определению класса K имеется терм $t1$, такой что выводима формула (11), но $B[t1]$ не является (A, T, K)-редуцируемой. Ввиду свойства ветви w, аналогичного свойству ($\forall\Rightarrow$) из раз-

дела 3, формула $B[t1]$ встречается в w_a и потому истинна в рассматриваемой модели по индукционному предположению. Ввиду выводимости формулы (11) и присутствия формулы A в антецеденте, формула $B[t]$ истинна в рассматриваемой модели, что и требовалось доказать.

Назовем теперь арифметический вывод по нашим правилам, включающим (VJ), **нормальным**, если это вывод с собственными переменными и никакой индукционный терм не имеет нормальной формы вида 0 или su.

Следствие 3. Любая секвенция, выводимая в арифметике первого порядка, имеет нормальный вывод. Более того, имеется примитивно рекурсивное (и даже полиномиальное) преобразование любого (A, T, K)-нормального предикатного вывода секвенции в нормальный вывод секвенции $X \Rightarrow Y$.

Доказательство — то же, что для следствия 1, с заменой теоремы 1 на теорему 7.

Чтобы получить теорему нормализации, введем (A, T, K)-редукцию, которая применяется к правилу $(\forall\Rightarrow)$ с (A, T, K)-редуцируемой боковой формулой (оно приведено ниже слева) и состоит в его замене на фигуру, указанную справа:

$$\frac{B[t],\ \forall xB,\ A,\ X \Rightarrow Y}{\forall xB,\ X \Rightarrow Y} \qquad \frac{\dfrac{A,\ B[t1] \Rightarrow B[t];\quad B[t],\ \forall xB,\ A,\ X \Rightarrow Y}{B[t1],\ \forall xB,\ A,\ X \Rightarrow Y}}{\forall xB,\ A,\ X \Rightarrow Y}$$

Здесь $t1$ — терм из определения (A, T, K)-редуцируемости. Добавление (A, T, K)-редукций не нарушает доказательства теоремы 2 с помощью предложений 3—6, и мы получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Любой вывод секвенции $A, X \Rightarrow Y$ можно путем конечного числа редукций перестроить в (A, T, K)-нормальный вывод той же секвенции.*

Заключительные замечания. В доказательствах практически ничего не меняется, если рассматривается более широкий комплект логических связок или натуральное исчисление [11]. Можно также потребовать, чтобы сукцедентные главные формулы не были опровержимы в исчислении предикатов. Аналоги установленных нами утверждений справедливы и для интуиционистских систем: в теоретико-модельных доказательствах следует говорить о моделях Крипке, в теоретико-доказательственный части не нужно менять почти ничего. Теоретико-модельные результаты и доказательства сохраняются и для логики предикатов конечных порядков. По-видимому, это верно и для теоретико-доказательственной части, но не было тщательно проверено.

Теоретико-доказательственные результаты этой работы анонсированы в [12], теоретико-модельные — в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Генцен Г.* В кн.: Математическая теория логического вывода. М., Наука, 1967, 9—74.
2. *Troelstra, A.* Lect. Notes Math., 1973, **344**.
3. *Минц Г. Е.* Финитное исследование трансфинитных выводов. Записки научных семинаров ЛОМИ, **49**, 1975, 67—122.
4. *Mints. G. E.* V Intern. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. 1975.
5. *Крайзель Г.* В кн.: Исследования по теории доказательств. М., Мир, 1981, 114—182.

6. *Gentzen, G.* Math. Ann., 1936, **112**, 493—565.
7. *Клини С. К.* Математическая логика. М., Мир, 1973.
8. *Такеути Г.* Теория доказательств. М., Мир, 1978.
9. *Luckhardt, G.* JSL, 1989, **54**, № 1, 234—263.
10. *Mints, G.* Proof-theoretic Transformations. Napoli, Bibliopolis Edizioni, 1989.
11. *Prawitz, D.* Natural Deduction. A Proof-theoretical Study (Diss.). Stockholm e. a., Almquist and Wicksell, 1965.
12. *Минц Г.* 6 Сов. конф. по матем. логике. Тбилиси, 1982, 115.
13. *Минц Г.* 7 Сов. конф. по матем. логике. Тбилиси, 1988, 104.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонии

Поступила в редакцию
12/II 1990

Grigori MINTS

TÕESTUSTE TUGEVDATUD NORMAALKUJU TEOREEM ESIMEST JÄRKU LOOGIKA TARVIS

Esimest järku loogika tarvis on leitud tõestuste tugevdatud normaalkuju, mis lubab aritmeetikatõestuste jaoks leida sellise normaalkuju juba finiitsete vahenditega.

Grigori MINTS

NORMAL FORM FOR LOGICAL DERIVATIONS IMPLYING ONE FOR ARITHMETIC DERIVATIONS

The paper describes a short model-theoretic proof of an extended normal-form theorem for derivations in the predicate logic which implies in PRA normal theorem for the arithmetic derivations (cf. [12]). Consider Gentzen-type formulation of the predicate logic with invertible rules. Derivation **with proper variables** is one where a variable b can occur in the premiss of an inference L but not below this premiss only in the case when L is $(\Rightarrow \forall)$ or $(E \Rightarrow)$ and b is its eigenvariable. Free variables of such derivation are eigenvariables and free variables of its last sequent.

Theorem. *Any sequent derivable in the predicate logic has a cutfree derivation with proper variables where the main formula of any antecedent rule is underivable.*

Proof. Modify construction of **canonical proof-search tree** by forbidding bottom-up application of the antecedent rules to derivable formulas. Prove that any open branch of the tree determines countermodel of the finitial sequent, modifying familiar argument in the case of provable antecedent formulas: instead of referring to the presence of necessary components (which can be false because of modification of the tree construction) simply refer to validity of derivable formulas in any valuation.

The proof extends to intuitionistic and higher order systems. The proof of the corresponding normalization theorem outlined in [12] is more complicated and uses passage to the infinitary derivations enriched by finitary derivations.