Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1989, 38, № 4, 442—445

УДК 539.3

У. ВАЛЬДЕК

ЭВОЛЮЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛОСКОПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

U. VALDEK. MITTELINEAARSETE TASAPOLARISEERITUD POIKILAINETE EVOLUTSIOON ELASTSES POOLRUUMIS

U. VALDEK. THE EVOLUTION OF NONLINEAR PLANEPOLARISED TRANSVERSE WAVES IN AN ELASTIC HALFSPACE

(Представил Н. Алумяэ)

Анализ распространения продольных и поперечных волн деформации в нелинейной постановке (с учетом физической и геометрической нелинейностей) на основе уравнений движения связан с определенными трудностями математического характера из-за громоздкости разрешающих уравнений. Поэтому целесообразно применить асимптотический метод расщепления волнового процесса на отдельные волны и для каждой волны составить свое эволюционное уравнение [1–3], имеющее четкий физический смысл. Далее, построено и проанализировано двумерное эволюционное уравнение плоскополяризованной поперечной волны в нелинейно-упругом полупространстве $x_1 \geqslant 0$, $-\infty \leqslant x_2 \leqslant \infty$.

Математическая модель задачи построена на основе девятиконстантной теории упругости [4, 5] с учетом конечности деформации. При этом свободная энергия Гельмгольца F выражается через инварианты I_1, I_2, I_3 тензора деформации Грина ε_{ij} с помощью соотношения [5]:

$$\varrho_0 F = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \nu_1 I_1^3 + \nu_2 I_1 I_2 + \nu_3 I_3 + \varkappa_1 I_1^4 + \varkappa_2 I_1^2 I_2 + \varkappa_3 I_1 I_3 + \varkappa_4 I_2^2,$$

где ϱ_0 — плотность в недеформированном состоянии; λ, μ — параметры Лямэ; ν_1, ν_2, ν_3 — модули упругости третьего и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ — модули упругости четвертого порядков. Отметим, что в нелинейной постановке для анализа продольных волн достаточна точность пятиконстантной модели, а девятиконстантную модель используем только для анализа поперечных волн [6, 7]. Введем в рассмотрение вектор $V = \|v_j\|$, $j = 1, \ldots, 6$, $v_j = \{u_{k,m}, \dot{u}_k\}$, $k, m = 1, 2$, где u_k — компоненты смещения; запятая обозначает дифференцирование по лагранжевой координате x_m и точка — дифференцирование по времени. Тогда двумерная задача описывается матричным уравнением

$$I\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_i A_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad A_i = A_i(v_j, v_j^2, \ldots), \quad i = 1, 2.$$

Здесь I — единичная матрица. Рассмотрим задачу, когда на свободной поверхности $x_1 = 0$ полупространства задается локализованное по x_2 воздействие $u_{2,1} \neq 0$ и исследуется распространение поперечной волны при $x_1 > 0$. Нужно найти решения типа бегущих волн $f(c_2 t - x_1, x_1, x_2)$, позволяющие судить в асимптотическом приближении [3] об искажении волновых профилей (задача акустодиагностики [1, 2]). Здесь c_2 —

скорость поперечных волн. Двумерное эволюционное уравнение для плоскополяризованной поперечной волны, построенное согласно известной процедуре [2, 3], принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2}\left\{\frac{\partial \beta_2}{\partial \sigma_2}-\left[\operatorname{sign}(m_1-m_2)\,\beta_2^2-\Pi\int\limits_{\zeta_2}\frac{\partial \beta_2}{\partial \eta_2}\,d\zeta_2\right]\frac{\partial \beta_2}{\partial \zeta_2}\right\}=\Delta_2\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial \eta_2^2}, \tag{1}$$

где $\beta_2=w_2/w_{20}$, $w_2=\dot{u}_2\sim u_{2,1}$ и независимые переменные (лучевые координаты) определяются соотношениями

$$\zeta_2=(c_2t-x_1)\tau_c^{-1},\quad \sigma_2=\varepsilon^2 a_2 w_{20}^2\tau_c^{-1}x_1,\quad \eta_2=\varepsilon b^{-1}x_2,$$

$$a_2=\frac{3}{4}\,|m_1-m_2|\,(\varepsilon c_2)^{-2},\quad c_2^2=\mu\varrho_0^{-1},\quad \varepsilon=\frac{1}{2}\sqrt{3\,|m_1-m_2|}\;w_{20}c_2^{-1},$$

$$m_1=(\lambda+2\mu+2\nu_2+3\nu_3+2\varkappa_4)\,\mu^{-1},\qquad m_2=\left(\lambda+2\mu+\nu_2+\frac{3}{2}\nu_3\right)^2\mu^{-1}(\lambda+\mu)^{-1}.$$

Здесь τ_c — характерная длина импульса, w_{20} — максимальная амплитуда начального воздействия, b — полуширина пучка. Кроме того,

$$\Delta_2=-\lambda[2(\lambda+\mu)]^{-1}\tau_c^2 b^{-2},$$

$$\Pi=\left(\lambda+2\mu+\nu_2+\frac{3}{2}\nu_3\right)(\lambda+\mu)^{-1}(3\,|m_1-m_2|)^{-\frac{1}{2}}\tau_c b^{-1}.$$

Одномерные аналоги уравнения (1) были выведены раньше [6, 8].

Выпишем здесь также для сравнения известное [3] двумерное эволюционное уравнение продольной волны в упругом полупространстве:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\left[\frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma_1}+\operatorname{sign}(1+m_0)\,\beta_1\frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1}\right]=\Delta_1\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial \eta_1^2}, \tag{2}$$

которое модулирует искажение продольной волны при $x_1>0$, если задавать воздействие типа $u_{1,1}\neq 0$ на свободную поверхность $x_1=0$. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\beta_1=w_1/w_{10},\quad w_1=\dot{u}_1\sim u_{1,1},\quad m_0=2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(\lambda+2\mu)^{-1},$$

$$\zeta_1=(c_1t-x_1)\tau_c^{-1},\quad \sigma_1=\varepsilon a_1 w_{10}\tau_c^{-1}x_1,\quad \eta_1=\varepsilon^{1/2}b^{-1}x_2,$$

$$c_1^2=(\lambda+2\mu)\varrho_0^{-1},\quad a_1=\frac{3}{2}\,|1+m_0|\,(\varepsilon c_1)^{-1},\quad \varepsilon=\frac{3}{2}\,|1+m_0|\,w_{10}c_1^{-1},$$

а параметр дифракционной расходимости Δ_1 определяется соотношением

$$\Delta_1=\lambda\mu[2(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)]^{-1}\tau_c^2 b^{-2}.$$

Эволюционные уравнения (1), (2) были интегрированы численно псевдоспектральным методом [9] при начальных воздействиях

$$\beta_i(\zeta_i,\eta_i)\,|_{\sigma_i=0}=\exp(-\eta_i^2)\sin\zeta_i,\qquad i=1,\,2. \tag{3}$$

Физические параметры задачи соответствовали алюминию [10]. Расчеты были доведены до значения координаты $\sigma_i=1{,}0$, которое соответствует образованию ударной волны согласно одномерной постановке.

В процессе дифракционной расходимости важную роль играют деформации, поперечные по отношению к основной, и тот факт, что $c_1>c_2$. В случае распространения продольной волны параметр $\Delta_1>0$, значит в линейной постановке фазовая скорость уменьшается с увеличением волнового числа. В случае поперечной волны имеем $\Delta_2<0$, следовательно, фазовая скорость возрастает с волновым числом. Аналогичная ситуация встречается в теории мелкой воды, согласно которой соответствующее уравнению (1) уравнение Кадомцева—Петвиашвили имеет такую же особенность [11].

Как уже известно из анализа одномерных [5, 6, 7] и ударных [7] волн, в нелинейной среде из-за связанности продольной и поперечной деформаций всегда распространяется модифицированная поперечная волна (квазипоперечная волна). Это сказывается и на нелинейном механизме искажения поперечной волны. Если нелинейность продольной волны квадратична, то для поперечной волны механизм искажения сложнее. Во-первых, основная нелинейность имеет кубический характер (член $\operatorname{sign}(m_1-m_2)\beta_2^2\partial\beta_2/\partial\xi_2$). Здесь слагаемое m_1 моделирует качественно основной вклад нелинейности согласно девятиконстантной теории, а слагаемое m_2 вытекает из связанности продольной и поперечной деформаций. Во-вторых, связанность продольной и поперечной деформаций обусловливает также более сложный механизм искажения, моделируемого членом $\Pi\partial\beta_2/\partial\xi_2\int(\partial\beta_2/\partial\eta_2)d\xi_2$. Учитываемые им факторы приводят в конечном итоге к несимметричности пучка относительно оси $\sigma_2(x_1)$.

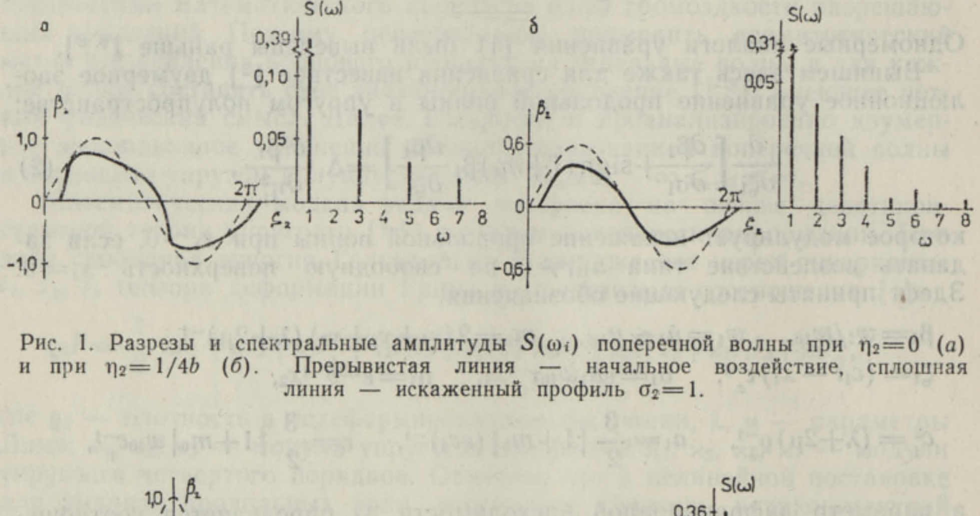

Рис. 1. Разрезы и спектральные амплитуды $S(\omega_i)$ поперечной волны при $\eta_2=0$ (*a*) и при $\eta_2=1/4b$ (*б*). Прерывистая линия — начальное воздействие, сплошная линия — искаженный профиль $\sigma_2=1$.

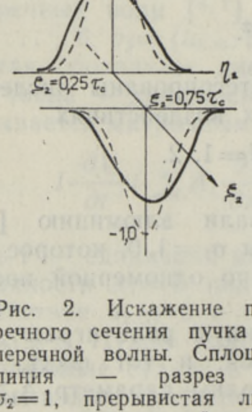

Рис. 2. Искажение поперечного сечения пучка поперечной волны. Сплошная линия — разрез при $\sigma_2=1$, прерывистая линия начальное воздействие.

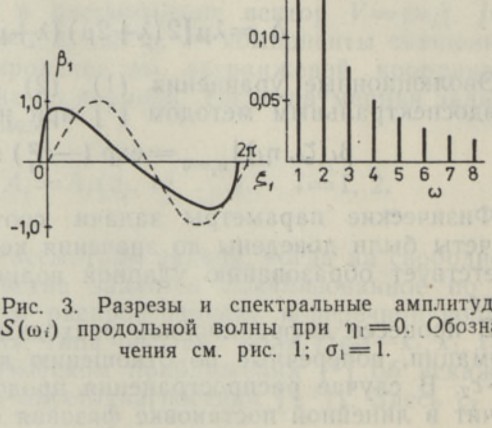

Рис. 3. Разрезы и спектральные амплитуды $S(\omega_i)$ продольной волны при $\eta_1=0$. Обозначения см. рис. 1; $\sigma_1=1$.

Распространение пучка, как правило, сопровождается изменением спектрального состава монохроматической волны, генерированной начальным условием (3). Разрезы пучка поперечной волны при $\eta_2=0$ и $\eta_2=1/4\ b$ и соответствующие дискретные спектры представлены на рис. 1. На оси $\eta_2=0$ генерируются только нечетные гармоники, что согласуется с общими понятиями о роли кубической нелинейности. Вдали от оси, однако, $\partial\beta_2/\partial\eta_2\neq 0$, и появляются также четные гармоники. Искажение поперечного сечения пучка имеет несимметричный характер относительно оси σ_2 (см. рис. 2), что приводит к существенной генерации четных гармоник при $\eta_2\neq 0$ с ростом σ_2. Для сравнения на рис. 3 представлены также разрез и соответствующий дискретный спектр продольной волны при $\eta_1=0$. Здесь во всех разрезах наблюдается монотонное распределение спектральных амплитуд [1], и поперечное сечение пучка искажается симметрично относительно оси σ_1 [9].

При распространении поперечной волны в нелинейной диссипативной среде со сдвиговой вязкостью η [4], двумерное эволюционное уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\left\{\frac{\partial\beta_2}{\partial\sigma_2}-\left[\operatorname{sign}(m_1-m_2)\beta_2^2-\Pi\int_{\zeta_2}\frac{\partial\beta_2}{\partial\eta_2}d\zeta_2\right]\frac{\partial\beta_2}{\partial\zeta_2}-\Gamma^{-1}\frac{\partial^2\beta_2}{\partial\zeta_2^2}\right\}=$$

$$=\Delta_2\frac{\partial^2\beta_2}{\partial\eta_2^2},$$

где акустическое число Рейнольдса Γ [1, 3] определяется соотношением

$$\Gamma=\frac{3}{2}\,|m_1-m_2|\,\tau_c w_{20}^2\varrho_0(\eta c_2)^{-1}.$$

Как и в случае анализа продольных волн [1, 3], диссипация обуславливает уменьшение амплитуд и при $\sigma_i>1$ (после образования ударного профиля) она может привести к качественным изменениям в спектральном составе [1].

Необходимо подчеркнуть, что кубическая нелинейность свойственна также электромагнитным волнам, где в одномерной постановке нелинейные эффекты приводят к таким же искажениям профиля как и в случае поперечной волны деформации [12, 13].

Автор глубоко благодарен Ю. Энгельбрехту за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
2. *Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.* Нелинейные волны деформации. М., Наука, 1981.
3. *Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллинн, Валгус, 1979.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М., Наука, 1970, т. I, 492 с., т. II, 568 с.
5. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М., Мир, 1972.
6. *Энгельбрехт Ю. К.* // Теоретична и приложна механика, 1974, 5, № 3, 77—86.
7. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* // ПММ, 1982, **46**, вып. 5, 831—840.
8. *Полякова А. Л.* // Мат. X Всес. акуст. конф. М., 1983, 73—76.
9. *Пейпман Т. А.* // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Мат. VIII Всес. конф. Новосибирск, СО АН СССР, 1984, 235—240.
10. *Шалашов Г. М.* // Акуст. ж., 1984, **30**, вып. 3, 386—390.
11. *Кадомцев Б. В., Петвиашвили В. И.* // ДАН, 1970, **192**, № 4, 752—756.
12. *Cohen, R. H., Kulsrud, R. M.* // Phys. Fluids, 1974, **17**, № 12, 2215—2225.
13. *Седова Г. Л.* // Прикл. матем. и мех., 1980, **44**, вып. 3, 465—469.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9 /XI 1988