

УДК 535.55

В. ШАРАФУТДИНОВ

О МЕТОДЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ
СЛАБОЙ ОПТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

(Представил Х. Абен)

Из всех известных поляризационно-оптических методов исследования напряжений метод интегральной фотоупругости [1] выгодно выделяется простотой и точностью измерений, но приводит к сложным математическим постановкам, большинство из которых еще ждут своего решения. В настоящей работе рассматривается одна из таких задач.

Если в пространстве имеется напряженная среда, характеризуемая тензором напряжений σ , то в случае слабой оптической анизотропии метод интегральной фотоупругости, как показано в [2], [3], позволяет вдоль любой прямой π измерить два числа

$$L(\sigma, \pi) = \int \sigma_{YZ}(X, 0, 0) dX; \quad S(\sigma, \pi) = \int (\sigma_{XY} - \sigma_{ZZ})(X, 0, 0) dX, \quad (1)$$

где XYZ — прямоугольная система координат, относительно которой π задается уравнениями $Y=Z=0$.

Технические условия проведения измерений накладывают определенные ограничения на семейство прямых π , вдоль которых можно измерить интегралы (1). Наиболее удобной с точки зрения технической реализации является ситуация, когда измерение интегралов (1) производится вдоль горизонтальных прямых, т. е. тех прямых, которые в некоторой (лабораторной) системе координат xyz параллельны плоскости $z=0$. В связи с этим в настоящей работе рассматривается математическая постановка вопроса о том, насколько однозначно тензор напряжений определяется интегралами (1), измеренными вдоль всех горизонтальных прямых, лежащих в слое $a < z < b$. При этом предполагаем, что тензор напряжений удовлетворяет лишь уравнениям равновесия, и не прибегаем к рассмотрению деформаций. Поэтому выводы настоящей работы справедливы для любой модели (упругой, термоупругой, вязкоупругой и пр.) сплошной напряженной среды. Важно лишь предположение о том, что тензор диэлектрической проницаемости линейно зависит от тензора напряжений и при этом справедливо приближение слабой оптической анизотропии.

Будем считать, что напряженная среда заполняет цилиндрическую область $G = D \times (a, b) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, a < z < b\}$, где D — двумерная область на плоскости переменных (x, y) , ограниченная строго выпуклой, замкнутой C^1 -гладкой кривой γ . Пусть $H = \gamma \times (a, b) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \gamma, a < z < b\}$ — боковая поверхность цилиндра G . Будем считать, что компоненты тензора напряжений σ имеют непрерывные вторые производные в G , а их первые производные непрерывны вплоть до боковой поверхности, т. е.

$$\sigma \in C^2(G) \cap C^1(G \cup H). \quad (2)$$

Предполагаем, что в области G справедливы уравнения равновесия (считаем, что объемные силы отсутствуют):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (3_1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (3_2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (3_3)$$

а на боковой поверхности цилиндра G отсутствуют внешние нагрузки, т. е. при $(x, y, z) \in H$

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0, \quad (4_1)$$

$$\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y = 0, \quad (4_2)$$

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y = 0, \quad (4_3)$$

где $n = (n_x, n_y)$ — единичный вектор внешней нормали к γ . Для справедливости некоторых из наших выводов краевые условия (4) не существенны; это будем оговаривать в дальнейшем. Для удобства будем считать тензор σ определенным во всей полосе $\{(x, y, z) | a < z < b\}$, положив $\sigma = 0$ вне $G \cup H$.

Семейство горизонтальных прямых в пространстве является трехпараметрическим, но нам будет удобнее использовать 4 параметра. Обозначим через $\pi(x_0, y_0, \alpha, z_0)$ прямую, задаваемую параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + t \cos \alpha, \quad y = y_0 + t \sin \alpha, \quad z = z_0.$$

Отметим, что $\pi(x, y, \alpha, z)$ фактически зависит от трех параметров $(x \sin \alpha - y \cos \alpha, \alpha, z)$. В результате измерения интегралов (1) вдоль всех горизонтальных прямых получаем две функции, определенные при $a < z < b$

$$L_\sigma(x, y, \alpha, z) = L(\sigma, \pi(x, y, \alpha, z)); \quad S_\sigma(x, y, \alpha, z) = S(\sigma, \pi(x, y, \alpha, z)).$$

В настоящей работе получены следующие три основных результата.

1) Функции L_σ и S_σ зависимы, а именно $S_\sigma(x, y, \alpha, z)$ выражается через $L_\sigma(x, y, \alpha, z)$ и $S_\sigma(x, y, \alpha, z_0)$.

2) Компонента $\sigma_{zz}(x, y, z)$ однозначно определяется функциями $L_\sigma(x, y, \alpha, z)$ и $S_\sigma(x, y, \alpha, z)$. Указаны явные процедуры определения σ_{zz} по L_σ и S_σ .

3) Никакой другой, кроме σ_{zz} , информации о поле напряжений σ по функциям L_σ и S_σ определить нельзя. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение. Если два тензорных поля σ^1 и σ^2 удовлетворяют (2), (3), (4) и если $\sigma_{zz}^1 \equiv \sigma_{zz}^2$, то $L_{\sigma^1} \equiv L_{\sigma^2}$, $S_{\sigma^1} \equiv S_{\sigma^2}$.

В системе координат XYZ , связанной с xyz формулами перехода

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha + x_0, \quad y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha + y_0, \quad z = Z + z_0,$$

прямая $\pi(x_0, y_0, \alpha, z_0)$ задается уравнениями $Y = Z = 0$, а компоненты тензора σ относительно этих систем связаны соотношениями

$$\sigma_{YY}(t, 0, 0) = \sigma_{xx}(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t) \sin^2 \alpha - 2\sigma_{xy}(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{yy}(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t) \cos^2 \alpha,$$

$$\sigma_{YZ}(t, 0, 0) = -\sigma_{xz}(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t) \sin \alpha + \sigma_{yz}(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t) \cos \alpha,$$

$$\sigma_{ZZ}(t, 0, 0) = \sigma_{zz}(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t),$$

в которых мы положили для краткости $\bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\bar{\xi} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$. Подставив эти выражения в (1), получим

$$L_{\sigma}(x, y, \alpha, z) = \int_{-\infty}^{\infty} [-\sigma_{xz}(\bar{x} + \bar{\xi}t) \sin \alpha + \sigma_{yz}(\bar{x} + \bar{\xi}t) \cos \alpha] dt, \quad (5)$$

$$S_{\sigma}(x, y, \alpha, z) = \int_{-\infty}^{\infty} [(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})(\bar{x} + \bar{\xi}t) \sin^2 \alpha - 2\sigma_{xy}(\bar{x} + \bar{\xi}t) \cos \alpha \sin \alpha + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})(\bar{x} + \bar{\xi}t) \cos^2 \alpha] dt. \quad (6)$$

Зафиксируем z_0 ($a < z_0 < b$) и определим на плоскости $z = z_0$ векторное поле $u = (u_x, u_y)$, положив

$$u_x(x, y, z_0) = \sigma_{yz}(x, y, z_0); \quad u_y(x, y, z_0) = -\sigma_{xz}(x, y, z_0). \quad (7)$$

Тогда соотношение (5) можно переписать в виде

$$L_{\sigma}(x, y, \alpha, z_0) = Iu(x, y, \alpha, z_0), \quad (8)$$

где

$$Iu(x, y, \alpha, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [u_x(x+t \cos \alpha, y+t \sin \alpha, z_0) \cos \alpha + u_y(x+t \cos \alpha, y+t \sin \alpha, z_0) \sin \alpha] dt. \quad (9)$$

Аналогично, если на плоскости $z = z_0$ определить симметричное тензорное поле $v = (v_{xx}, v_{xy}, v_{yy})$, положив

$$\begin{aligned} v_{xx}(x, y, z_0) &= (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})(x, y, z_0), \\ v_{xy}(x, y, z_0) &= -\sigma_{xy}(x, y, z_0), \\ v_{yy}(x, y, z_0) &= (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})(x, y, z_0), \end{aligned} \quad (10)$$

то соотношение (6) можно переписать в виде

$$S_{\sigma}(x, y, \alpha, z_0) = Iv(x, y, \alpha, z_0), \quad (11)$$

где

$$Iv(x, y, \alpha, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [v_{xx}(\bar{x}) \cos^2 \alpha + 2v_{xy}(\bar{x}) \cos \alpha \sin \alpha + v_{yy}(\bar{x}) \sin^2 \alpha]_{\bar{x}=(x+t \cos \alpha, y+t \sin \alpha, z_0)} dt. \quad (12)$$

Оператор I , определенный на тензорных полях степени 1 и 2 формулами (9) и (12) соответственно, называется лучевым преобразованием. Оно подробно изучалось в [4], [5], [6]. В частности в [4], [5] доказано, что для тензорного поля u интегральная информация Iu и локальная информация Wu однозначно определяют друг друга, где W — некоторый дифференциальный оператор, получивший в [4] название оператора Сен-Венана. В [6], [7] получена явная формула, выражающая Wu через Iu . В помещенном ниже приложении эта формула приведена в виде, приспособленном для целей настоящей работы.

Для тензорного поля $u = (u_x, u_y)$ степени 1 $W_D u = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$ (по поводу обозначения W_D см. приложение). Подставляя сюда выражение (7) для u_x, u_y , приходим к выводу, что функция

$$l_{\sigma}(x, y, z) = -\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \quad (13)$$

однозначно определяется по функции $L_{\sigma}(x, y, \alpha, z)$. Явное выражение l_{σ} через L_{σ} вытекает из приводимых ниже формул (40) — (42) с учетом равенств (8) и $l_{\sigma} = W_D u$. Аналогично, для тензорного поля $v = (v_{xx}, v_{xy}, v_{yy})$ степени 2

$$W_{Dv} = 2 \frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_{yy}}{\partial x^2}.$$

Подставляя сюда выражения (10) для v_{ij} , получаем, что функция

$$s_\sigma(x, y, z) = \frac{\partial^2(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (14)$$

однозначно определяется функцией $S_\sigma(x, y, a, z)$. Явное выражение s_σ через S_σ вытекает из приводимых ниже формул (47)–(49) с учетом равенств (11) и $s_\sigma = W_{Dv}$.

Вспомним, что σ удовлетворяет уравнениям равновесия (3). В силу (3₃) уравнение (13) эквивалентно следующему

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = l_\sigma. \quad (15)$$

Если уравнение (3₁) продифференцировать по x , (3₂) — по y и полученные соотношения прибавить к (14), то придем к уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \right) = s_\sigma,$$

которое в силу (13) эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_{zz} = \frac{\partial l_\sigma}{\partial z} + s_\sigma. \quad (16)$$

Сравнивая (15) и (16), мы видим, что l_σ и s_σ связаны между собой соотношением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) l_\sigma = \frac{\partial s_\sigma}{\partial z}. \quad (17)$$

Отметим, что уравнения (15)–(17) получены нами без использования краевых условий (4). Теперь, используя эти условия, установим, что значение σ_{zz} на боковой поверхности H цилиндра G определяется по функции S_σ . Для этого возьмем две близкие точки $\bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\bar{x}'_0 = (x'_0, y'_0, z_0)$, принадлежащие H , и обозначим через $\pi(\bar{x}_0, \bar{x}'_0)$ горизонтальную прямую, проходящую через \bar{x}_0 и \bar{x}'_0 . Согласно (6)

$$S(\sigma, \pi(\bar{x}_0, \bar{x}'_0)) = \int_0^{|\bar{x}_0 - \bar{x}'_0|} [(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t) \xi_y^2 - 2\sigma_{xy}(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t) \xi_x \xi_y + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t) \xi_x^2] dt, \quad (18)$$

где $\bar{\xi} = (\xi_x, \xi_y, 0) = \frac{\bar{x}'_0 - \bar{x}_0}{|\bar{x}'_0 - \bar{x}_0|}$. Устремим точку \bar{x}'_0 к \bar{x}_0 , тогда вектор $\bar{\xi}$ стремится к $(\tau_x, \tau_y, 0)$, где $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ — единичный касательный вектор к кривой γ в точке (x_0, y_0) . Применяя к интегралу (18) теорему о среднем значении, получим

$$\lim_{\bar{x}'_0 \rightarrow \bar{x}_0} \frac{S(\sigma, \pi(\bar{x}_0, \bar{x}'_0))}{|\bar{x}'_0 - \bar{x}_0|} = \sigma_{xx}(\bar{x}_0) \tau_y^2 - 2\sigma_{xy}(\bar{x}_0) \tau_x \tau_y + \sigma_{yy}(\bar{x}_0) \tau_x^2 - \sigma_{zz}(\bar{x}_0). \quad (19)$$

Касательный вектор $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ к γ выражается через нормальный вектор $n = (n_x, n_y)$ по формулам $\tau_x = -n_y$, $\tau_y = n_x$. Подставив эти выражения в (19) и воспользовавшись (4₁), (4₂), убедимся в справедливости равенства

$$\sigma_{zz}(\bar{x}) = -\lim_{\bar{x}' \rightarrow \bar{x}} \frac{S(\sigma, \pi(\bar{x}, \bar{x}'))}{|\bar{x}' - \bar{x}|} \quad (\bar{x}, \bar{x}' \in H; z = z'). \quad (20)$$

Отметим, что это соотношение обобщает один из результатов работы [8], в которой оно получено в осесимметричном случае.

Соотношения (15), (16), (20) позволяют утверждать, что функции L_σ , S_σ однозначно определяют компоненту σ_{zz} . Что касается численных методов определения σ_{zz} , то в силу переопределенности системы (15), (16) здесь возможны различные варианты. Опишем вкратце два из них.

1) Фиксируем z_0 ($a < z_0 < b$). Пользуясь измеренными значениями $S_\sigma(x, y, \alpha, z_0)$, находим на основании (20) значения $\sigma_{zz}(\bar{x})$ при $\bar{x} = (x, y, z_0) \in H$. Применяя к функциям $L_\sigma(x, y, \alpha, z)$ и $S_\sigma(x, y, \alpha, z_0)$ процедуры обращения лучевого преобразования, описанные в приводимом ниже приложении, находим функции $l_\sigma(x, y, z)$ и $s_\sigma(x, y, z_0)$. Рассматривая (16) при фиксированном z_0 как уравнение Пуассона в области D относительно функции $\sigma_{zz}(x, y, z_0)$ и используя найденные граничные значения $\sigma_{zz}(x, y, z_0)|_{(x, y) \in \gamma}$, решаем задачу Дирихле и находим $\sigma_{zz}(x, y, z_0)$. Интегрируя (15), определяем, исходя из $l_\sigma(x, y, z)$ и $\sigma_{zz}(x, y, z_0)$, функцию $\sigma_{zz}(x, y, z)$.

2) Пользуясь измеренными значениями $S_\sigma(x, y, \alpha, z)$, находим на основании (20) $\sigma_{zz}|_H$. Применяя к $L_\sigma(x, y, \alpha, z)$ и $S_\sigma(x, y, \alpha, z)$ процедуры обращения лучевого преобразования, находим функции $l_\sigma(x, y, z)$ и $s_\sigma(x, y, z)$. Решая при каждом фиксированном z задачу Дирихле для уравнения Пуассона (16), находим $\sigma_{zz}(x, y, z)$.

Первый описанный метод требует, по сравнению со вторым, гораздо меньшего объема вычислений, поскольку в нем задачу Дирихле и задачу обращения лучевого преобразования для тензорного поля степени 2 нужно решать лишь один раз (при $z = z_0$). Таким образом, в первом методе основной объем вычислений приходится на процедуру обращения лучевого преобразования векторного поля (вычисления l_σ через L_σ), которую надо повторять многократно (для каждого значения z). Единственным, по мнению автора, недостатком первого метода является то, что ошибка определения $\sigma_{zz}(x, y, z)$ может накапливаться по мере удаления от сечения $z = z_0$, в то время как во втором методе все горизонтальные сечения равноправны. При вычислении по второму методу можно использовать соотношение (17) для контроля правильности определения l_σ и s_σ . Возможны различные комбинации этих двух методов.

Докажем, что никакой другой, кроме σ_{zz} , информации о поле σ по функциям L_σ и S_σ определить нельзя. Пусть тензорные поля σ^1 , σ^2 удовлетворяют (2), (3), (4) и $\sigma^1_{zz} = \sigma^2_{zz}$. Тогда их разность $\sigma = \sigma^1 - \sigma^2$ удовлетворяет (2), (3), (4) и

$$\sigma_{zz} = 0. \quad (21)$$

Нужно показать, что

$$L_\sigma = 0, \quad (22)$$

$$S_\sigma = 0. \quad (23)$$

Зафиксируем z_0 и определим на плоскости $z = z_0$ тензорные поля u , v степени 1 и 2 соответственно формулами (7) и (10). Тогда будут справедливы равенства (8) и (11). Поэтому для доказательства (22), (23) достаточно установить, что $Iu = 0$, $Iv = 0$. В силу результатов, полученных в [4], [5], для этого, в свою очередь, достаточно установить, что

$$Wu = 0, \quad (24)$$

$$Wv = 0, \quad (25)$$

где W — оператор Сен-Венана.

Согласно приведенной ниже формуле (39)

$$Wu = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} + (u_x n_y - u_y n_x) \delta_\gamma, \quad (26)$$

где δ_γ — δ -функция, сосредоточенная на кривой γ , $n = (n_x, n_y)$ — единичный вектор внешней нормали к γ . Подставляя в (26) выражения (7) для u_x, u_y , получим

$$Wu = - \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \right) + (\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y) \delta_\gamma.$$

Используя (33), это можно переписать в виде

$$Wu = - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + (\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y) \delta_\gamma.$$

Сравнивая это равенство с (43) и (21), приходим к (24). Согласно приведенным ниже формулам (44) — (46)

$$Wv = W_D v + W_\gamma v, \quad (27)$$

где

$$W_D v = 2 \frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_{yy}}{\partial x^2}, \quad (28)$$

а $W_\gamma v$ — обобщенная функция с носителем на кривой γ , которая определяется равенством $(\varphi(x, y))$ — произвольная гладкая функция на плоскости)

$$\begin{aligned} \langle W_\gamma v, \varphi \rangle &= \oint_\gamma \left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial y} n_y + \frac{\partial v_{yy}}{\partial x} n_x - \frac{\partial v_{xy}}{\partial x} n_y - \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} n_x \right) \varphi ds - \\ &- \oint_\gamma \left(v_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + v_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x - v_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_y - v_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_x \right) ds. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя выражения (10) для v_{ij} в равенства (28), (29) и учитывая (21), получим

$$W_D v = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \right), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \langle W_\gamma v, \varphi \rangle &= \oint_\gamma \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) n_y \right] \varphi ds - \\ &- \oint_\gamma \left[(\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] ds. \end{aligned} \quad (31)$$

Если уравнение (31) продифференцировать по x , (32) по y и сложить полученные равенства, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \right),$$

что в силу (33) можно переписать так

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2}.$$

Сравнивая последнее равенство с (21) и (30), мы видим, что

$$W_D v = 0. \quad (32)$$

Согласно (4₂), (4₃), подынтегральное выражение во втором из интегралов, стоящих в правой части равенства (31), тождественно равно нулю, а подынтегральное выражение из первого интеграла согласно (3₁), (3₂) можно преобразовать к виду

$$\langle W_\gamma v, \varphi \rangle = - \oint_\gamma \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y) \varphi ds.$$

Сравнивая это с (4₃), убеждаемся, что $W_\gamma v = 0$. Вместе с (27), (32) это дает $Wv = 0$, что и завершает доказательство.

В заключение еще раз отметим, что краевые условия (4) и наши предположения об области G (цилиндр со строго выпуклой кривой γ в основании) существенны лишь для определения граничных значений $\sigma_{zz}|_H$, а соотношения (15)—(17) справедливы для произвольной G относительно к краевым условиям.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обращение лучевого преобразования тензорных полей степени 1 и 2 на плоскости

Все, что нам нужно, содержится в следствии теоремы 2 работы [6] или в теореме 3 работы [7]. Тем не менее автор счел нужным поместить настоящее приложение по следующим причинам:

1) для тензорных полей степени 1 и 2 на плоскости (в обозначениях работ [6], [7] случай $n=2$; $m=1$ или $m=2$) общие формулы, приведенные в этих работах, значительно упрощаются и 2) применение этих результатов несколько затруднено тем обстоятельством, что они получены для тензорных полей, определенных на всей плоскости, а в настоящей работе нас интересует случай поля, заданного в ограниченной области.

Рассмотрим сначала случай векторного поля на плоскости ($n=2$, $m=1$). Пусть D — плоская область, ограниченная замкнутой C^1 -гладкой кривой γ , $u = (u_x, u_y)$ — векторное поле, определенное и непрерывное в замкнутой области $D \cup \gamma$ и имеющее непрерывные частные производные первого порядка в D . Будем считать поле u определенным на всей плоскости, положив $u=0$ вне $D \cup \gamma$. Определенное таким образом поле u имеет разрыв на кривой γ , поэтому входящие в оператор Сен-Венана производные надо понимать в обобщенном смысле. Соответственно этому условимся через ∂_x , ∂_y обозначать производные в обобщенном смысле, а через $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ классические производные. Лучевое преобразование векторного поля на плоскости определяется формулой

$$\begin{aligned} Iu(x, y, a) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} [u_x(x+t \cos a, y+t \sin a) \cos a + u_y(x+t \cos a, y+t \sin a) \sin a] dt. \end{aligned}$$

Оператор Сен-Венана в рассматриваемом случае ($n=2$, $m=1$) имеет одну ненулевую компоненту, поэтому мы можем считать, что Wu является функцией

$$Wu = \partial_x u_y - \partial_y u_x. \quad (33)$$

Ясно, что

$$Wu = W_D u + W_\gamma u, \quad (34)$$

где

$$(35) \quad W_D u = \begin{cases} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, & \text{если } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin D \cup \gamma, \end{cases} \quad (35)$$

а $W_\gamma u$ — обобщенная функция с носителем на γ , которую мы сейчас вычислим.

Если f — обобщенная функция, а φ — пробная (т. е. гладкая финитная) функция, то через $\langle f, \varphi \rangle$ обозначаем значение функционала f на φ . Согласно определению производных обобщенной функции

$$\begin{aligned} \langle W u, \varphi \rangle &= \langle \partial_x u_y - \partial_y u_x, \varphi \rangle = \left\langle u_x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle - \left\langle u_y, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle = \\ &= \iint_D \left(u_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - u_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Преобразуя последний интеграл по формуле Грина, получим

$$\langle W u, \varphi \rangle = \iint_D \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \varphi dx dy + \oint_\gamma (u_x n_y - u_y n_x) ds,$$

где $n = (n_x, n_y)$ — единичный вектор внешней нормали к γ . Учитывая (35), это можно переписать в виде

$$\langle W u, \varphi \rangle = \langle W_D u, \varphi \rangle + \oint_\gamma (u_x n_y - u_y n_x) \varphi ds. \quad (36)$$

Напомним, что δ -функцией, сосредоточенной на кривой γ , называется обобщенная функция δ_γ , определяемая равенством

$$\langle \delta_\gamma, \varphi \rangle = \oint_\gamma \varphi ds.$$

Равенство (36) означает, что

$$W u = W_D u + (u_x n_y - u_y n_x) \delta_\gamma. \quad (37)$$

Следовательно,

$$W_\gamma u = (u_x n_y - u_y n_x) \delta_\gamma, \quad (38)$$

а равенство (34) можно записать в виде

$$W u = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} + (u_x n_y - u_y n_x) \delta_\gamma. \quad (39)$$

Укажем алгоритм определения $W_D u$ по функции $Iu(x, y, \alpha)$. Этот алгоритм вытекает из формулы, приведенной в следствии теоремы 2 работы [6] или в теореме 3 работы [7], и состоит в следующем. Сначала определяем векторное поле $\mu = (\mu_x, \mu_y)$ на плоскости по формулам

$$\begin{aligned} \mu_x(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} Iu(x, y, \alpha) \cos \alpha d\alpha; \\ \mu_y(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} Iu(x, y, \alpha) \sin \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (40)$$

Затем находим поле $v = (v_x, v_y)$, полагая

$$v_x = (-\Delta)^{1/2} \mu_x; \quad v_y = (-\Delta)^{1/2} \mu_y, \quad (41)$$

где $(-\Delta)^{1/2}$ — оператор, определяемый с помощью преобразования Фурье F равенствами

$$F[(-\Delta)^{1/2}f(x, y)] = \rho \tilde{f}(\xi, \eta); \quad \tilde{f}(\xi, \eta) = F[f(x, y)]; \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Наконец, находим

$$W_D u = W_{D^*} v = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (42)$$

Второе слагаемое из правой части (34) можно определить по функции Iu , исходя из той же формулы, но проще это сделать следующим образом. Предположим, что область D строго выпуклая, и пусть $\gamma(s) = (\gamma_x(s), \gamma_y(s))$ — параметризация кривой γ длиной дуги s , причем при возрастании s кривая обходится против часовой стрелки. Обозначим через $\alpha(s, \Delta s)$ угол, образуемый с осью Ox вектором $\xi(s, \Delta s) = (\gamma(s + \Delta s) - \gamma(s)) / |\gamma(s + \Delta s) - \gamma(s)|$. Тогда

$$Iu(\gamma_x(s), \gamma_y(s), \alpha(s, \Delta s)) = \int_0^{|\xi(s, \Delta s)|} [u_x(\gamma(s) + t\xi(s, \Delta s)) \cos \alpha(s, \Delta s) + u_y(\gamma(s) + t\xi(s, \Delta s)) \sin \alpha(s, \Delta s)] dt.$$

Отсюда следует, что

$$(u_x \dot{\gamma}_x + u_y \dot{\gamma}_y)(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} Iu(\gamma_x(s), \gamma_y(s), \alpha(s, \Delta s)),$$

где точкой обозначено дифференцирование по s . Поскольку $\dot{\gamma}_x = -n_y$, $\dot{\gamma}_y = n_x$, то предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$(u_x n_y - u_y n_x)(s) = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} Iu(\gamma_x(s), \gamma_y(s), \alpha(s, \Delta s)). \quad (43)$$

Равенства (38), (43) дают выражение $W_\gamma u$ через Iu .

Рассмотрим теперь случай тензорного поля степени 2 на плоскости ($n=m=2$). Пусть область D такая же, как выше, $v = (v_{xx}, v_{xy}, v_{yy})$ — симметричное тензорное поле, определенное и непрерывное вместе с первыми производными в замкнутой области $D \cup \gamma$ и имеющее непрерывные производные второго порядка в D . Полагаем $v=0$ вне $D \cup \gamma$. Лучевое преобразование в данном случае определяется формулой

$$Iv(x, y, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} [v_{xx}(\bar{x}) \cos^2 \alpha + 2v_{xy}(\bar{x}) \cos \alpha \sin \alpha + v_{yy}(\bar{x}) \sin^2 \alpha]_{\bar{x}=(x+t \cos \alpha, y+t \sin \alpha)} dt.$$

Оператор Сен-Венана в случае $n=m=2$ имеет одну ненулевую компоненту

$$Wv = 2\partial_{xy}v_{xy} - \partial_{yy}v_{xx} - \partial_{xx}v_{yy}.$$

С помощью рассуждений, аналогичных использованным при выводе (39), легко показать, что

$$Wv = W_D v + W_\gamma v, \quad (44)$$

где

$$W_D v(x, y) = \begin{cases} 2 \frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_{yy}}{\partial x^2}, & \text{если } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin D \cup \gamma, \end{cases} \quad (45)$$

а $W_{\gamma v}$ — обобщенная функция с носителем на γ , определяемая равенством

$$\langle W_{\gamma v}, \varphi \rangle = \oint_{\gamma} \left[\left(\frac{\partial v_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial v_{xy}}{\partial x} \right) n_y \right] \varphi ds - \\ - \int_{\gamma} \left[(v_{yy} n_x - v_{xy} n_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (v_{xx} n_y - v_{xy} n_x) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] ds. \quad (46)$$

Алгоритм определения W_{Dv} по Iv состоит в следующем. Сначала находим тензорное поле $\mu = (\mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{yy})$ на плоскости по формулам

$$\mu_{xx}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} Iv(x, y, \alpha) \cos^2 \alpha d\alpha, \\ \mu_{xy}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} Iv(x, y, \alpha) \cos \alpha \sin \alpha d\alpha, \quad (47) \\ \mu_{yy}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} Iv(x, y, \alpha) \sin^2 \alpha d\alpha.$$

Затем определяем поле $v = (v_{xx}, v_{xy}, v_{yy})$ равенствами

$$v_{xx} = (-\Delta)^{1/2} \left(\mu_{xx} - \frac{1}{2} \mu_{yy} \right), \quad v_{xy} = \frac{3}{2} (-\Delta)^{1/2} \mu_{xy}, \\ v_{yy} = (-\Delta)^{1/2} \left(\mu_{yy} - \frac{1}{2} \mu_{xx} \right). \quad (48)$$

Наконец, полагаем

$$W_{Dv} = W_{Dv} = 2 \frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_{yy}}{\partial x^2}. \quad (49)$$

Можно выразить через Iv и второе слагаемое из правой части (44), однако мы здесь этого делать не будем.

В настоящее время автор не имеет опыта вычислений по формулам (40)—(42) и (47)—(49) и потому не может сказать, насколько они приемлемы с точки зрения практического применения. Возможно, что для этой цели их надо предварительно каким-либо образом преобразовать. В связи с этим отметим, что эти формулы по своей структуре во многом аналогичны формуле обращения преобразования Радона (ср. с теоремой 3.1 из [9] в случае $n=2$), поэтому здесь можно воспользоваться опытом, накопленным в томографии [10].

Автор благодарит Х. Абена за обсуждение предмета работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость. Таллинн, Валгус, 1975.
2. Leray, T., Scheibling, G. // J. Chim. Phys. (France), 1961, 68, № 9, 797—802.
3. Абен Х. К., Индурм С. И., Иозепсон Ю. И., Келл К.-Ю. Э. // Оптическая томография. Всесоюз. сем., Таллинн, 1988. Тез. докл. Таллинн, 1988, 7.
4. Шарафутдинов В. А. // Сиб. мат. журн., 1983, 24, № 6, 176—187.

5. Шарафутдинов В. А. // Докл. АН СССР, 1986, 286, № 2, 305—307.
6. Шарафутдинов В. А. // Докл. АН СССР, (в печати).
7. Шарафутдинов В. А. // Всесоюзн. сем. по оптической томографии, Таллинн, апрель 1988. Тез. докл., Таллинн, 1988, 160.
8. Cheng, Y. F. // Exp. Mech., 1970, 10, № 2, 534—536.
9. Хелгасон С. Преобразование Радона. М., Мир, 1983.
10. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М., Мир, 1983.

Институт математики Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20/II 1989

V. ŠARAFUTDINOV

INTEGRAALNE FOTOELASTSUS NÖRGA OPTILISE ANISOTROOPIA KORRAL

On vaadeldud pingete määramist silindrilises z -teljega kehas nende mõõtmistulemuste põhjal, mis on saadud pinnaga $z=0$ paralleelsetel sirgetel. On eeldatud, et keha optiline anisotroopia on nõrk, ja näidatud, et niisugusel juhul saab määrata vaid pingetensori komponendi σ_{zz} .

V. SHARAFUTDINOV

ON INTEGRATED PHOTOELASTICITY IN CASE OF WEAK BIREFRINGENCE

Determination of stress in a cylindrical body with axis z on the basis of experimental data measured along all the lines parallel to the plane $z=0$, is considered on the assumption that birefringence is weak. It is shown that in this case it is possible to determine only the component σ_{zz} of the stress tensor.