Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1989, 38, № 4, 379—389

УДК 535.55

В. ШАРАФУТДИНОВ

О МЕТОДЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ СЛАБОЙ ОПТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

(Представил Х. Абен)

Из всех известных поляризационно-оптических методов исследования напряжений метод интегральной фотоупругости [1] выгодно выделяется простотой и точностью измерений, но приводит к сложным математическим постановкам, большинство из которых еще ждут своего решения. В настоящей работе рассматривается одна из таких задач.

Если в пространстве имеется напряженная среда, характеризуемая тензором напряжений σ, то в случае слабой оптической анизотропии метод интегральной фотоупругости, как показано в [2], [3], позволяет вдоль любой прямой π измерить два числа

$$L(\sigma,\pi)=\int \sigma_{YZ}(X,0,0)\,dX; \qquad S(\sigma,\pi)=\int (\sigma_{YY}-\sigma_{ZZ})(X,0,0)\,dX, \tag{1}$$

где XYZ — прямоугольная система координат, относительно которой π задается уравнениями $Y=Z=0$.

Технические условия проведения измерений накладывают определенные ограничения на семейство прямых π, вдоль которых можно измерить интегралы (1). Наиболее удобной с точки зрения технической реализации является ситуация, когда измерение интегралов (1) производится вдоль горизонтальных прямых, т. е. тех прямых, которые в некоторой (лабораторной) системе координат xyz параллельны плоскости $z=0$. В связи с этим в настоящей работе рассматривается математическая постановка вопроса о том, насколько однозначно тензор напряжений определяется интегралами (1), измеренными вдоль всех горизонтальных прямых, лежащих в слое $a<z<b$. При этом предполагаем, что тензор напряжений удовлетворяет лишь уравнениям равновесия, и не прибегаем к рассмотрению деформаций. Поэтому выводы настоящей работы справедливы для любой модели (упругой, термоупругой, вязкоупругой и пр.) сплошной напряженной среды. Важно лишь предположение о том, что тензор диэлектрической проницаемости линейно зависит от тензора напряжений и при этом справедливо приближение слабой оптической анизотропии.

Будем считать, что напряженная среда заполняет цилиндрическую область $G=D\times(a,b)=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,\ a<z<b\}$, где D — двумерная область на плоскости переменных (x,y), ограниченная строго выпуклой, замкнутой C^1-гладкой кривой γ. Пусть $H=\gamma\times(a,b)=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in\gamma,\ a<z<b\}$ — боковая поверхность цилиндра G. Будем считать, что компоненты тензора напряжений σ имеют непрерывные вторые производные в G, а их первые производные непрерывны вплоть до боковой поверхности, т. е.

$$\sigma\in C^2(G)\cap C^1(G\cup H). \tag{2}$$

Предполагаем, что в области G справедливы уравнения равновесия (считаем, что объемные силы отсутствуют):

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0, \qquad (3_1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=0, \qquad (3_2)$$

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0, \qquad (3_3)$$

а на боковой поверхности цилиндра G отсутствуют внешние нагрузки, т. е. при $(x, y, z)\in H$

$$\sigma_{xx}n_x+\sigma_{xy}n_y=0, \qquad (4_1)$$

$$\sigma_{yx}n_x+\sigma_{yy}n_y=0, \qquad (4_2)$$

$$\sigma_{zx}n_x+\sigma_{zy}n_y=0, \qquad (4_3)$$

где $n=(n_x, n_y)$ — единичный вектор внешней нормали к γ. Для справедливости некоторых из наших выводов краевые условия (4) не существенны; это будем оговаривать в дальнейшем. Для удобства будем считать тензор σ определенным во всей полосе $\{(x, y, z)\,|\,a<z<b\}$, положив $\sigma=0$ вне $G\cup H$.

Семейство горизонтальных прямых в пространстве является трехпараметрическим, но нам будет удобнее использовать 4 параметра. Обозначим через $\pi(x_0, y_0, \alpha, z_0)$ прямую, задаваемую параметрическими уравнениями

$$x=x_0+t\cos\alpha, \qquad y=y_0+t\sin\alpha, \qquad z=z_0.$$

Отметим, что $\pi(x, y, \alpha, z)$ фактически зависит от трех параметров $(x\sin\alpha-y\cos\alpha, \alpha, z)$. В результате измерения интегралов (1) вдоль всех горизонтальных прямых получаем две функции, определенные при $a<z<b$

$$L_\sigma(x, y, \alpha, z)=L(\sigma, \pi(x, y, \alpha, z)); \qquad S_\sigma(x, y, \alpha, z)=S(\sigma, \pi(x, y, \alpha, z)).$$

В настоящей работе получены следующие три основных результата.

1) Функции L_σ и S_σ зависимы, а именно $S_\sigma(x, y, \alpha, z)$ выражается через $L_\sigma(x, y, \alpha, z)$ и $S_\sigma(x, y, \alpha, z_0)$.

2) Компонента $\sigma_{zz}(x, y, z)$ однозначно определяется функциями $L_\sigma(x, y, \alpha, z)$ и $S_\sigma(x, y, \alpha, z)$. Указаны явные процедуры определения σ_{zz} по L_σ и S_σ.

3) Никакой другой, кроме σ_{zz}, информации о поле напряжений σ по функциям L_σ и S_σ определить нельзя. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение. Если два тензорных поля σ^1 и σ^2 удовлетворяют (2), (3), (4) и если $\sigma^1_{zz}\equiv\sigma^2_{zz}$, то $L_{\sigma^1}\equiv L_{\sigma^2}$, $S_{\sigma^1}\equiv S_{\sigma^2}$.

В системе координат XYZ, связанной с xyz формулами перехода

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha+x_0, \qquad y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha+y_0, \qquad z=Z+z_0,$$

прямая $\pi(x_0, y_0, \alpha, z_0)$ задается уравнениями $Y=Z=0$, а компоненты тензора σ относительно этих систем связаны соотношениями

$$\sigma_{YY}(t, 0, 0)=\sigma_{xx}(\bar{x}_0+\bar{\xi}t)\sin^2\alpha-2\sigma_{xy}(\bar{x}_0+\bar{\xi}t)\cos\alpha\sin\alpha+\sigma_{yy}(\bar{x}_0+\bar{\xi}t)\cos^2\alpha,$$

$$\sigma_{YZ}(t, 0, 0)=-\sigma_{xz}(\bar{x}_0+\bar{\xi}t)\sin\alpha+\sigma_{yz}(\bar{x}_0+\bar{\xi}t)\cos\alpha,$$

$$\sigma_{ZZ}(t, 0, 0)=\sigma_{zz}(\bar{x}_0+\bar{\xi}t),$$

в которых мы положили для краткости $\bar{x}_0=(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{\xi}=(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$. Подставив эти выражения в (1), получим

$$L_\sigma(x, y, \alpha, z) = \int_{-\infty}^{\infty} [-\sigma_{xz}(\bar{x}+\bar{\xi}t)\sin\alpha + \sigma_{yz}(\bar{x}+\bar{\xi}t)\cos\alpha]\,dt, \tag{5}$$

$$S_\sigma(x, y, \alpha, z) = \int_{-\infty}^{\infty} [(\sigma_{xx}-\sigma_{zz})(\bar{x}+\xi t)\sin^2\alpha -$$
$$-2\sigma_{xy}(\bar{x}+\bar{\xi}t)\cos\alpha\sin\alpha + (\sigma_{yy}-\sigma_{zz})(\bar{x}+\bar{\xi}t)\cos^2\alpha]\,dt. \tag{6}$$

Зафиксируем $z_0 (a < z_0 < b)$ и определим на плоскости $z = z_0$ векторное поле $u = (u_x, u_y)$, положив

$$u_x(x, y, z_0) = \sigma_{yz}(x, y, z_0); \quad u_y(x, y, z_0) = -\sigma_{xz}(x, y, z_0). \tag{7}$$

Тогда соотношение (5) можно переписать в виде

$$L_\sigma(x, y, \alpha, z_0) = Iu(x, y, \alpha, z_0), \tag{8}$$

где

$$Iu(x, y, \alpha, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [u_x(x+t\cos\alpha, y+t\sin\alpha, z_0)\cos\alpha +$$
$$+u_y(x+t\cos\alpha, y+t\sin\alpha, z_0)\sin\alpha]\,dt. \tag{9}$$

Аналогично, если на плоскости $z = z_0$ определить симметричное тензорное поле $v = (v_{xx}, v_{xy}, v_{yy})$, положив

$$v_{xx}(x, y, z_0) = (\sigma_{yy}-\sigma_{zz})(x, y, z_0),$$
$$v_{xy}(x, y, z_0) = -\sigma_{xy}(x, y, z_0), \tag{10}$$
$$v_{yy}(x, y, z_0) = (\sigma_{xx}-\sigma_{zz})(x, y, z_0),$$

то соотношение (6) можно переписать в виде

$$S_\sigma(x, y, \alpha, z_0) = Iv(x, y, \alpha, z_0), \tag{11}$$

где

$$Iv(x, y, \alpha, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [v_{xx}(\bar{x})\cos^2\alpha + 2v_{xy}(\bar{x})\cos\alpha\sin\alpha +$$
$$+v_{yy}(\bar{x})\sin^2\alpha]_{\bar{x}=(x+t\cos\alpha,\ y+t\sin\alpha,\ z_0)}\,dt. \tag{12}$$

Оператор I, определенный на тензорных полях степени 1 и 2 формулами (9) и (12) соответственно, называется лучевым преобразованием. Оно подробно изучалось в [4], [5], [6]. В частности в [4], [5] доказано, что для тензорного поля u интегральная информация Iu и локальная информация Wu однозначно определяют друг друга, где W — некоторый дифференциальный оператор, получивший в [4] название оператора Сен-Венана. В [6], [7] получена явная формула, выражающая Wu через Iu. В помещенном ниже приложении эта формула приведена в виде, приспособленном для целей настоящей работы.

Для тензорного поля $u = (u_x, u_y)$ степени 1 $W_D u = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y}$ (по поводу обозначения W_D см. приложение). Подставляя сюда выражение (7) для u_x, u_y, приходим к выводу, что функция

$$l_\sigma(x, y, z) = -\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} \tag{13}$$

однозначно определяется по функции $L_\sigma(x, y, \alpha, z)$. Явное выражение l_σ через L_σ вытекает из приводимых ниже формул (40)—(42) с учетом равенств (8) и $l_\sigma = W_D u$. Аналогично, для тензорного поля $v = (v_{xx}, v_{xy}, v_{yy})$ степени 2

$$W_D v = 2\frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 v_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_{yy}}{\partial x^2}.$$

Подставляя сюда выражения (10) для v_{ij}, получаем, что функция

$$s_\sigma(x, y, z) = \frac{\partial^2(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x\,\partial y} \tag{14}$$

однозначно определяется функцией $S_\sigma(x, y, \alpha, z)$. Явное выражение s_σ через S_σ вытекает из приводимых ниже формул (47)—(49) с учетом равенств (11) и $s_\sigma = W_D v$.

Вспомним, что σ удовлетворяет уравнениям равновесия (3). В силу (3_3) уравнение (13) эквивалентно следующему

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = l_\sigma. \tag{15}$$

Если уравнение (3_1) продифференцировать по x, (3_2) — по y и полученные соотношения прибавить к (14), то придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}\right) = s_\sigma,$$

которое в силу (13) эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\sigma_{zz} = \frac{\partial l_\sigma}{\partial z} + s_\sigma. \tag{16}$$

Сравнивая (15) и (16), мы видим, что l_σ и s_σ связаны между собой соотношением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) l_\sigma = \frac{\partial s_\sigma}{\partial z}. \tag{17}$$

Отметим, что уравнения (15)—(17) получены нами без использования краевых условий (4). Теперь, используя эти условия, установим, что значение σ_{zz} на боковой поверхности H цилиндра G определяется по функции S_σ. Для этого возьмем две близкие точки $\bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\bar{x}_0' = (x_0', y_0', z_0)$, принадлежащие H, и обозначим через $\pi(\bar{x}_0, \bar{x}_0')$ горизонтальную прямую, проходящую через $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_0'$. Согласно (6)

$$S(\sigma, \pi(\bar{x}_0, \bar{x}'_0)) = \int\limits_0^{|\bar{x}_0 - \bar{x}'_0|} [(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t)\xi_y^2 -$$
$$- 2\sigma_{xy}(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t)\xi_x\xi_y + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})(\bar{x}_0 + \bar{\xi}t)\xi_x^2]\,dt, \tag{18}$$

где $\bar{\xi} = (\xi_x, \xi_y, 0) = \dfrac{\bar{x}'_0 - \bar{x}_0}{|\bar{x}'_0 - \bar{x}_0|}$. Устремим точку $\bar{x}_0'$ к $\bar{x}_0$, тогда вектор $\bar{\xi}$ стремится к $(\tau_x, \tau_y, 0)$, где $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ — единичный касательный вектор к кривой γ в точке (x_0, y_0). Применяя к интегралу (18) теорему о среднем значении, получим

$$\lim_{\bar{x}'_0 \to \bar{x}_0} \frac{S(\sigma, \pi(\bar{x}_0, \bar{x}'_0))}{|\bar{x}'_0 - \bar{x}_0|} = \sigma_{xx}(\bar{x}_0)\tau_y^2 - 2\sigma_{xy}(\bar{x}_0)\tau_x\tau_y +$$
$$+ \sigma_{yy}(\bar{x}_0)\tau_x^2 - \sigma_{zz}(\bar{x}_0). \tag{19}$$

Касательный вектор $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ к γ выражается через нормальный вектор $n = (n_x, n_y)$ по формулам $\tau_x = -n_y$, $\tau_y = n_x$. Подставив эти выражения в (19) и воспользовавшись (4_1), (4_2), убедимся в справедливости равенства

$$\sigma_{zz}(\bar{x}) = -\lim_{\overline{x'}\to\bar{x}} \frac{S(\sigma, \pi(\bar{x}, \bar{x}'))}{|\bar{x}' - \bar{x}|} \qquad (\bar{x}, \bar{x}' \in H;\ z = z'). \tag{20}$$

Отметим, что это соотношение обобщает один из результатов работы [8], в которой оно получено в осесимметричном случае.

Соотношения (15), (16), (20) позволяют утверждать, что функции L_σ, S_σ однозначно определяют компоненту σ_{zz}. Что касается численных методов определения σ_{zz}, то в силу переопределенности системы (15), (16) здесь возможны рзличные варианты. Опишем вкратце два из них.

1) Фиксируем $z_0 (a < z_0 < b)$. Пользуясь измеренными значениями $S_\sigma(x, y, \alpha, z_0)$, находим на основании (20) значения $\sigma_{zz}(\bar{x})$ при $\bar{x} = (x, y, z_0) \in H$. Применяя к функциям $L_\sigma(x, y, \alpha, z)$ и $S_\sigma(x, y, \alpha, z_0)$ процедуры обращения лучевого преобразования, описанные в приводимом ниже приложении, находим функции $l_\sigma(x, y, z)$ и $s_\sigma(x, y, z_0)$. Рассматривая (16) при фиксированном z_0 как уравнение Пуассона в области D относительно функции $\sigma_{zz}(x, y, z_0)$ и используя найденные граничные значения $\sigma_{zz}(x, y, z_0)\big|_{(x,y)\in\gamma}$, решаем задачу Дирихле и находим $\sigma_{zz}(x, y, z_0)$. Интегрируя (15), определяем, исходя из $l_\sigma(x, y, z)$ и $\sigma_{zz}(x, y, z_0)$, функцию $\sigma_{zz}(x, y, z)$.

2) Пользуясь измеренными значениями $S_\sigma(x, y, \alpha, z)$, находим на основании (20) $\sigma_{zz}|_H$. Применяя к $L_\sigma(x, y, \alpha, z)$ и $S_\sigma(x, y, \alpha, z)$ процедуры обращения лучевого преобразования, находим функции $l_\sigma(x, y, z)$ и $s_\sigma(x, y, z)$. Решая при каждом фиксированном z задачу Дирихле для уравнения Пуассона (16), находим $\sigma_{zz}(x, y, z)$.

Первый описанный метод требует, по сравнению со вторым, гораздо меньшего объема вычислений, поскольку в нем задачу Дирихле и задачу обращения лучевого преобразования для тензорного поля степени 2 нужно решать лишь один раз (при $z = z_0$). Таким образом, в первом методе основной объем вычислений приходится на процедуру обращения лучевого преобразования векторного поля (вычисления l_σ через L_σ), которую надо повторять многократно (для каждого значения z). Единственным, по мнению автора, недостатком первого метода является то, что ошибка определения $\sigma_{zz}(x, y, z)$ может накапливаться по мере удаления от сечения $z = z_0$, в то время как во втором методе все горизонтальные сечения равноправны. При вычислении по второму методу можно использовать соотношение (17) для контроля правильности определения l_σ и s_σ. Возможны различные комбинации этих двух методов.

Докажем, что никакой другой, кроме σ_{zz}, информации о поле σ по функциям L_σ и S_σ определить нельзя. Пусть тензорные поля σ^1, σ^2 удовлетворяют (2), (3), (4) и $\sigma^1_{zz} \equiv \sigma^2_{zz}$. Тогда их разность $\sigma = \sigma^1 - \sigma^2$ удовлетворяет (2), (3), (4) и

$$\sigma_{zz} \equiv 0. \tag{21}$$

Нужно показать, что

$$L_\sigma \equiv 0, \tag{22}$$

$$S_\sigma \equiv 0. \tag{23}$$

Зафиксируем z_0 и определим на плоскости $z = z_0$ тензорные поля u, v степени 1 и 2 соответственно формулами (7) и (10). Тогда будут справедливы равенства (8) и (11). Поэтому для доказательства (22), (23) достаточно установить, что $Iu \equiv 0$, $Iv \equiv 0$. В силу результатов, полученных в [4], [5], для этого, в свою очередь, достаточно установить, что

$$Wu = 0, \tag{24}$$

$$Wv = 0, \tag{25}$$

где W — оператор Сен-Венана.

Согласно приведенной ниже формуле (39)

$$Wu=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}+(u_x n_y-u_y n_x)\,\delta_\gamma, \tag{26}$$

где δ_γ — δ-функция, сосредоточенная на кривой γ, $n=(n_x, n_y)$ — единичный вектор внешней нормали к γ. Подставляя в (26) выражения (7) для u_x, u_y, получим

$$Wu=-\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}\right)+(\sigma_{xz}n_x+\sigma_{yz}n_y)\,\delta_\gamma.$$

Используя (3_3), это можно переписать в виде

$$Wu=\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+(\sigma_{xz}n_x+\sigma_{yz}n_y)\,\delta_\gamma.$$

Сравнивая это равенство с (4_3) и (21), приходим к (24). Согласно приведенным ниже формулам (44)—(46)

$$Wv=W_D v+W_\gamma v, \tag{27}$$

где

$$W_D v=2\frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 v_{xx}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v_{yy}}{\partial x^2}, \tag{28}$$

а $W_\gamma v$ — обобщенная функция с носителем на кривой γ, которая определяется равенством ($\varphi(x, y)$ — произвольная гладкая функция на плоскости)

$$\langle W_\gamma v, \varphi\rangle=\oint_\gamma\left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial y}n_y+\frac{\partial v_{yy}}{\partial x}n_x-\frac{\partial v_{xy}}{\partial x}n_y-\frac{\partial v_{xy}}{\partial y}n_x\right)\varphi ds-$$

$$-\oint_\gamma\left(v_{xx}\frac{\partial \varphi}{\partial y}n_y+v_{yy}\frac{\partial \varphi}{\partial x}n_x-v_{xy}\frac{\partial \varphi}{\partial x}n_y-v_{xy}\frac{\partial \varphi}{\partial y}n_x\right)ds. \tag{29}$$

Подставляя выражения (10) для v_{ij} в равенства (28), (29) и учитывая (21), получим

$$W_D v=-\left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x\,\partial y}\right), \tag{30}$$

$$\langle W_\gamma v, \varphi\rangle=\oint_\gamma\left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)n_x+\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)n_y\right]\varphi ds-$$

$$-\oint_\gamma\left[(\sigma_{xx}n_x+\sigma_{xy}n_y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+(\sigma_{xy}n_x+\sigma_{yy}n_y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]ds. \tag{31}$$

Если уравнение (3_1) продифференцировать по x, (3_2) по y и сложить полученные равенства, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}\right),$$

что в силу (3_3) можно переписать так

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2}.$$

Сравнивая последнее равенство с (21) и (30), мы видим, что

$$W_D v = 0. \tag{32}$$

Согласно (4_2), (4_3), подынтегральное выражение во втором из интегралов, стоящих в правой части равенства (31), тождественно равно нулю, а подынтегральное выражение из первого интеграла согласно (3_1), (3_2) можно преобразовать к виду

$$\langle W_\gamma v, \varphi\rangle = -\oint_\gamma \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y)\varphi\, ds.$$

Сравнивая это с (4_3), убеждаемся, что $W_\gamma v = 0$. Вместе с (27), (32) это дает $Wv = 0$, что и завершает доказательство.

В заключение еще раз отметим, что краевые условия (4) и наши предположения об области G (цилиндр со строго выпуклой кривой γ в основании) существенны лишь для определения граничных значений $\sigma_{zz}|_H$, а соотношения (15)—(17) справедливы для произвольной G безотносительно к краевым условиям.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обращение лучевого преобразования тензорных полей степени 1 и 2 на плоскости

Все, что нам нужно, содержится в следствии теоремы 2 работы [6] или в теореме 3 работы [7]. Тем не менее автор счел нужным поместить настоящее приложение по следующим причинам:

1) для тензорных полей степени 1 и 2 на плоскости (в обозначениях работ [6], [7] случай $n=2$; $m=1$ или $m=2$) общие формулы, приведенные в этих работах, значительно упрощаются и 2) применение этих результатов несколько затруднено тем обстоятельством, что они получены для тензорных полей, определенных на всей плоскости, а в настоящей работе нас интересует случай поля, заданного в ограниченной области.

Рассмотрим сначала случай векторного поля на плоскости ($n=2$, $m=1$). Пусть D — плоская область, ограниченная замкнутой C^1-гладкой кривой γ, $u=(u_x, u_y)$ — векторное поле, определенное и непрерывное в замкнутой области $D\cup\gamma$ и имеющее непрерывные частные производные первого порядка в D. Будем считать поле u определенным на всей плоскости, положив $u=0$ вне $D\cup\gamma$. Определенное таким образом поле u имеет разрыв на кривой γ, поэтому входящие в оператор Сен-Венана производные надо понимать в обобщенном смысле. Соответственно этому условимся через ∂_x, ∂_y обозначать производные в обобщенном смысле, а через $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ классические производные. Лучевое преобразование векторного поля на плоскости определяется формулой

$$Iu(x, y, \alpha) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [u_x(x+t\cos\alpha, y+t\sin\alpha)\cos\alpha + u_y(x+t\cos\alpha, y+t\sin\alpha)\sin\alpha]\, dt.$$

Оператор Сен-Венана в рассматриваемом случае ($n=2$, $m=1$) имеет одну ненулевую компоненту, поэтому мы можем считать, что Wu является функцией

$$Wu = \partial_x u_y - \partial_y u_x. \tag{33}$$

Ясно, что

$$Wu = W_D u + W_\gamma u, \tag{34}$$

где

$$W_D u = \begin{cases} \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y}, & \text{если} \quad (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \notin D \cup \gamma, \end{cases} \tag{35}$$

а $W_\gamma u$ — обобщенная функция с носителем на γ, которую мы сейчас вычислим.

Если f — обобщенная функция, а φ — пробная (т. е. гладкая финитная) функция, то через $\langle f, \varphi \rangle$ обозначаем значение функционала f на φ. Согласно определению производных обобщенной функции

$$\langle Wu, \varphi \rangle = \langle \partial_x u_y - \partial_y u_x, \varphi \rangle = \left\langle u_x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle - \left\langle u_y, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle =$$

$$= \iint_D \left(u_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - u_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx\, dy.$$

Преобразуя последний интеграл по формуле Грина, получим

$$\langle Wu, \varphi \rangle = \iint_D \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \varphi\, dx\, dy + \oint_\gamma (u_x n_y - u_y n_x)\, ds,$$

где $n = (n_x, n_y)$ — единичный вектор внешней нормали к γ. Учитывая (35), это можно переписать в виде

$$\langle Wu, \varphi \rangle = \langle W_D u, \varphi \rangle + \oint_\gamma (u_x n_y - u_y n_x) \varphi\, ds. \tag{36}$$

Напомним, что δ-функцией, сосредоточенной на кривой γ, называется обобщенная функция δ_γ, определяемая равенством

$$\langle \delta_\gamma, \varphi \rangle = \oint_\gamma \varphi\, ds.$$

Равенство (36) означает, что

$$Wu = W_D u + (u_x n_y - u_y n_x)\, \delta_\gamma. \tag{37}$$

Следовательно,

$$W_\gamma u = (u_x n_y - u_y n_x)\, \delta_\gamma, \tag{38}$$

а равенство (34) можно записать в виде

$$Wu = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} + (u_x n_y - u_y n_x)\, \delta_\gamma. \tag{39}$$

Укажем алгоритм определения $W_D u$ по функции $Iu(x, y, \alpha)$. Этот алгоритм вытекает из формулы, приведенной в следствии теоремы 2 работы [6] или в теореме 3 работы [7], и состоит в следующем. Сначала определяем векторное поле $\mu = (\mu_x, \mu_y)$ на плоскости по формулам

$$\mu_x(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} Iu(x, y, \alpha) \cos \alpha\, d\alpha;$$

$$\mu_y(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} Iu(x, y, \alpha) \sin \alpha\, d\alpha. \tag{40}$$

Затем находим поле $\nu = (\nu_x, \nu_y)$, полагая

$$\nu_x = (-\Delta)^{1/2} \mu_x; \quad \nu_y = (-\Delta)^{1/2} \mu_y, \tag{41}$$

где $(-\Delta)^{1/2}$ — оператор, определяемый с помощью преобразования Фурье F равенствами

$$F[(-\Delta)^{1/2}f(x,y)]=\varrho\tilde{f}(\xi,\eta);\qquad \tilde{f}(\xi,\eta)=F[f(x,y)];\qquad \varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Наконец, находим

$$W_D u=W_D v=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{42}$$

Второе слагаемое из правой части (34) можно определить по функции Iu, исходя из той же формулы, но проще это сделать следующим образом. Предположим, что область D строго выпуклая, и пусть $\gamma(s)=(\gamma_x(s),\ \gamma_y(s))$ — параметризация кривой γ длиной дуги s, причем при возрастании s кривая обходится против часовой стрелки. Обозначим через $\alpha(s,\Delta s)$ угол, образуемый с осью Ox вектором $\xi(s,\Delta s)=(\gamma(s+\Delta s)-\gamma(s))/|\gamma(s+\Delta s)-\gamma(s)|$. Тогда

$$Iu(\gamma_x(s),\gamma_y(s),\alpha(s,\Delta s))=\int_0^{|\xi|(s,\Delta s)}[u_x(\gamma(s)+t\xi(s,\Delta s))\cos\alpha(s,\Delta s)+$$
$$+u_y(\gamma(s)+t\xi(s,\Delta s))\sin\alpha(s,\Delta s)]\,dt.$$

Отсюда следует, что

$$(u_x\dot{\gamma}_x+u_y\dot{\gamma}_y)(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}Iu(\gamma_x(s),\gamma_y(s),\alpha(s,\Delta s)),$$

где точкой обозначено дифференцирование по s. Поскольку $\dot{\gamma}_x=-n_y$, $\dot{\gamma}_y=n_x$, то предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$(u_x n_y-u_y n_x)(s)=-\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}Iu(\gamma_x(s),\gamma_y(s),\alpha(s,\Delta s)). \tag{43}$$

Равенства (38), (43) дают выражение $W_\gamma u$ через Iu.

Рассмотрим теперь случай тензорного поля степени 2 на плоскости $(n=m=2)$. Пусть область D такая же, как выше, $v=(v_{xx},v_{xy},v_{yy})$ — симметричное тензорное поле, определенное и непрерывное вместе с первыми производными в замкнутой области $D\cup\gamma$ и имеющее непрерывные производные второго порядка в D. Полагаем $v=0$ вне $D\cup\gamma$. Лучевое преобразование в данном случае определяется формулой

$$Iv(x,y,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}[v_{xx}(\bar{x})\cos^2\alpha+2v_{xy}(\bar{x})\cos\alpha\sin\alpha+$$
$$+v_{yy}(\bar{x})\sin^2\alpha]_{\bar{x}=(x+t\cos\alpha,\,y+t\sin\alpha)}\,dt.$$

Оператор Сен-Венана в случае $n=m=2$ имеет одну ненулевую компоненту

$$Wv=2\partial_{xy}v_{xy}-\partial_{yy}v_{xx}-\partial_{xx}v_{yy}.$$

С помощью рассуждений, аналогичных использованным при выводе (39), легко показать, что

$$Wv=W_D v+W_\gamma v, \tag{44}$$

где

$$W_D v(x,y)=\begin{cases}2\dfrac{\partial^2 v_{xy}}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial^2 v_{xx}}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 v_{yy}}{\partial x^2}, & \text{если}\quad (x,y)\in D,\\ 0,\quad \text{если}\quad (x,y)\notin D\cup\gamma,\end{cases} \tag{45}$$

а $W_\gamma v$ — обобщенная функция с носителем на γ, определяемая равенством

$$\langle W_\gamma v, \varphi\rangle = \oint\limits_\gamma \left[\left(\frac{\partial v_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial v_{xy}}{\partial y}\right) n_x + \left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial v_{xy}}{\partial x}\right) n_y\right] \varphi\, ds -$$

$$- \int\limits_\gamma \left[(v_{yy} n_x - v_{xy} n_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (v_{xx} n_y - v_{xy} n_x) \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] ds. \tag{46}$$

Алгоритм определения $W_D v$ по Iv состоит в следующем. Сначала находим тензорное поле $\mu = (\mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{yy})$ на плоскости по формулам

$$\mu_{xx}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} Iv(x, y, \alpha) \cos^2\alpha\, d\alpha,$$

$$\mu_{xy}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} Iv(x, y, \alpha) \cos\alpha \sin\alpha\, d\alpha, \tag{47}$$

$$\mu_{yy}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} Iv(x, y, \alpha) \sin^2\alpha\, d\alpha.$$

Затем определяем поле $\nu = (\nu_{xx}, \nu_{xy}, \nu_{yy})$ равенствами

$$\nu_{xx} = (-\Delta)^{1/2}\left(\mu_{xx} - \frac{1}{2}\mu_{yy}\right), \quad \nu_{xy} = \frac{3}{2}(-\Delta)^{1/2}\mu_{xy},$$

$$\nu_{yy} = (-\Delta)^{1/2}\left(\mu_{yy} - \frac{1}{2}\mu_{xx}\right). \tag{48}$$

Наконец, полагаем

$$W_D v = W_D \nu = 2\frac{\partial^2 \nu_{xy}}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \nu_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \nu_{yy}}{\partial x^2}. \tag{49}$$

Можно выразить через Iv и второе слагаемое из правой части (44), однако мы здесь этого делать не будем.

В настоящее время автор не имеет опыта вычислений по формулам (40)—(42) и (47)—(49) и потому не может сказать, насколько они приемлемы с точки зрения практического применения. Возможно, что для этой цели их надо предварительно каким-либо образом преобразовать. В связи с этим отметим, что эти формулы по своей структуре во многом аналогичны формуле обращения преобразования Радона (ср. с теоремой 3.1 из [9] в случае $n=2$), поэтому здесь можно воспользоваться опытом, накопленным в томографии [10].

Автор благодарит Х. Абена за обсуждение предмета работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абен Х. К.* Интегральная фотоупругость. Таллинн, Валгус, 1975.
2. *Leray, T., Scheibling, G.* // J. Chim. Phys. (France), 1961, **68**, № 9, 797—802.
3. *Абен Х. К., Индурм С. И., Иозепсон Ю. И., Келл К.-Ю. Э.* // Оптическая томография. Всесоюзн. сем., Таллинн, 1988. Тез. докл. Таллинн, 1988, 7.
4. *Шарафутдинов В. А.* // Сиб. мат. журн., 1983, **24**, № 6, 176—187.

5. *Шарафутдинов В. А.* // Докл. АН СССР, 1986, 286, № 2, 305—307.
6. *Шарафутдинов В. А.* // Докл. АН СССР, (в печати).
7. *Шарафутдинов В. А.* // Всесоюзн. сем. по оптической томографии, Таллинн, апрель 1988. Тез. докл., Таллинн, 1988, 160.
8. *Cheng, Y. F.* // Exp. Mech., 1970, 10, № 2, 534—536.
9. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М., Мир, 1983.
10. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М., Мир, 1983.

Институт математики Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступила в редакцию 20/II 1989

V. ŠARAFUTDINOV

INTEGRAALNE FOTOELASTSUS NÕRGA OPTILISE ANISOTROOPIA KORRAL

On vaadeldud pingete määramist silindrilises z-teljega kehas nende mõõtmistulemuste põhjal, mis on saadud pinnaga $z=0$ paralleelsetel sirgetel. On eeldatud, et keha optiline anisotroopia on nõrk, ja näidatud, et niisugusel juhul saab määrata vaid pingetensori komponendi σ_{zz}.

V. SHARAFUTDINOV

ON INTEGRATED PHOTOELASTICITY IN CASE OF WEAK BIREFRINGENCE

Determination of stress in a cylindrical body with axis z on the basis of experimental data measured along all the lines parallel to the plane $z=0$, is considered on the assumption that birefringence is weak. It is shown that in this case it is possible to determine only the component σ_{zz} of the stress tensor.