Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1989, 38, № 4, 372—378

УДК 539.3

А. ПУРО

РАЗДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

(Представил Х. Абен)

Разделение уравнений теории упругости изотропного тела, основанное на выделении решения, описывающего деформацию кручения в плоскости или на сфере, полученное Гутманом [1], в дальнейшем было обобщено на случай трансверсально [2] и сферически трансверсально изотропных тел [3]. Для одномерной неоднородности такое разделение было выполнено в [4], когда коэффициенты Ламе $\lambda(z)$, $\mu(z)$ зависят от декартовой координаты, и в [5], если $\lambda(r)$, $\mu(r)$ — функции радиуса в сферической системе координат.

Симметрия трансверсально изотропных тел позволяет также проводить это разделение при указанных выше типах неоднородностей [6–8].

Для неоднородной среды с постоянным коэффициентом жесткости (коэффициент Пуассона ν — произвольная дифференцируемая функция координат) также были предложены формы общего решения [9–11].

Ниже разделение уравнений проводится, когда коэффициент жесткости является функцией декартовой координаты z, или радиуса r в сферической системе координат, а коэффициент Пуассона — произвольная дифференцируемая функция координат. В случае трансверсальной изотропии вышеупомянутых типов такое разделение возможно, когда оба коэффициента сдвига являются функциями z или r для соответствующих типов изотропий. Относительно вектора массовых сил $\mathbf{M}$ делается предположение, что он выражается через потенциалы.

1. Трансверсально изотропное тело отнесено к прямоугольной декартовой системе координат. Ось z направлена перпендикулярно плоскости изотропии тела.

Будем считать, что оба коэффициента сдвига $c_{44}=c^{-1}$, $(c_{11}-c_{12})/2=G$ в обобщенном законе Гука

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}=c_{11}\varepsilon_{xx}+c_{12}\varepsilon_{yy}+c_{13}\varepsilon_{zz}, &&\sigma_{xy}=(c_{11}-c_{12})\,\varepsilon_{xy},\\
&\sigma_{yy}=c_{12}\varepsilon_{xx}+c_{11}\varepsilon_{yy}+c_{13}\varepsilon_{zz}, &&\sigma_{xz}=2c_{44}\varepsilon_{xz},\\
&\sigma_{zz}=\sigma=c_{13}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{xy})+c_{33}\varepsilon_{zz}, &&\sigma_{yz}=2c_{44}\varepsilon_{yz}
\end{aligned}$$

дифференцируемые функции только координаты z, а остальные коэффициенты упругости c_{ik} — функции трех координат. Предполагается также, что вектор массовых сил $\mathbf{M}$ и вектор перемещений разлагаются на потенциальную и соленоидальную составляющие в плоскости изотропии и выражаются соответственно через потенциалы

$$\mathbf{M}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{u}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathbf{j}+w\mathbf{k}.$$

Подставляя выражение $\mathbf{M}$ и $\mathbf{u}$ в уравнение равновесия $\operatorname{div} \sigma+\mathbf{M}=0$, получаем следующую систему трех уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q_1+\varphi)+\frac{\partial}{\partial y}(Q_2+\Omega)=0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(Q_1+\varphi)-\frac{\partial}{\partial x}(Q_2+\Omega)=0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma+\chi)+\Delta_+\tau=0. \quad (1.2)$$

Здесь $Q_1=\dfrac{\partial\tau}{\partial z}+\dfrac{c_{13}}{c_{33}}\sigma+\dfrac{1}{d}\Delta_+F, \quad \Delta_+=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2},$

$$Q_2=\left[G\Delta_++\frac{\partial}{\partial z}c^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\right]N, \quad d=\frac{c_{33}}{c_{33}c_{11}-c_{13}^2},$$

$$\tau=c^{-1}\left(w+\frac{\partial}{\partial z}F\right), \quad (1.3)$$

$$\sigma_{zz}=\sigma=c_{33}\frac{\partial w}{\partial z}+c_{13}\Delta_+F. \quad (1.4)$$

Доказательство того, что система уравнений (1.1), (1.2) разлагается на уравнение $Q_2+\Omega=0$ относительно N (потенциала нормального вращения), а также на систему из двух уравнений $Q_1+\varphi=0$ и (1.2)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[c_{44}\left(w+\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]+c_{13}\frac{\partial w}{\partial z}+c_{11}\Delta_+F=-\varphi, \quad (1.5)$$

$$\Delta_+\left[c_{44}\left(w+\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[c_{33}\frac{\partial w}{\partial z}+c_{13}\Delta_+F\right]=\frac{-\partial\chi}{\partial z}, \quad (1.6)$$

(решение первого рода) идентично приведенному в [2, 6, 7] и поэтому здесь приводиться не будет.

Аналогичное разделение уравнений возможно для динамических задач, если плотность среды является функцией только координаты z. Приведем вывод других видов разрешающих уравнений первого рода. Для этого запишем уравнения (1.5), (1.6) в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z}=-\Delta_+\tau-\frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\sigma}{c_{33}}-\frac{c_{13}}{c_{33}}\Delta_+F, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=-\frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma-\frac{1}{d}\Delta_+F-\varphi, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=c\tau-w. \quad (1.10)$$

Удовлетворим уравнению (1.7), выражая σ и τ через функцию L (функцию напряжений)

$$\sigma=\Delta_+L-\chi, \quad \tau=-\frac{\partial L}{\partial z}.$$

Определив w через L и F из (1.10) и подставив σ, τ, w в систему (1.8), (1.9), получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+(c-b)\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}+c'\frac{\partial L}{\partial z}+a\Delta_+ L=a\chi-b\varphi, \tag{1.11}$$

$$\Delta_+ F-d\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}+b\Delta_+ L=b\chi-d\varphi. \tag{1.12}$$

Здесь $w=-\left(c\frac{\partial L}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial z}\right)$, $b=dc_{13}c_{33}^{-1}$.

Система (1.11), (1.12) является смешанной в том смысле, что неизвестными являются функция напряжений L и потенциал смещения F.

Рассмотрим более подробно случай однородных уравнений $\varphi=\chi=0$ (массовые силы отсутствуют).

В этом случае напряжения с учетом уравнений (1.11), (1.12) выражаются формулами ($\Phi=[c_{11}-c_{12}]F$)

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2},\quad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},\quad \sigma_{zz}=\Delta_+ L,$$
$$\sigma_{xy}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y},\quad \sigma_{xz}=-\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial z},\quad \sigma_{yz}=-\frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial z}. \tag{1.13}$$

Из (1.13) следует [10], что L и Φ являются диагональными элементами тензора функции напряжений ψ, в то время как остальные его элементы равны нулю $\psi=\mathrm{diag}\{L, L, -\Phi\}$. Таким образом, уравнения (1.11), (1.12) можно получить из уравнений совместности для тензора напряжений, выраженного по формулам (1.13).

Уравнение относительно L получим, исключая Φ из (1.11), (1.12)

$$\Delta_+\left(a\Delta_+-b\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}c\frac{\partial}{\partial z}\right)L+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(d\frac{\partial^2}{\partial z^2}-b\Delta_+\right)L=0. \tag{1.14}$$

Здесь $a=dc_{11}c_{33}^{-1}$.

По форме оно совпадает с приведенным ранее [6, 7] и отличается тем, что коэффициенты a, b, d могут зависеть от трех координат. Если L и коэффициенты уравнения (1.14) не зависят от x или y, то приходим к плоской задаче. Из формул (1.13), (1.14) видно, что L переходит в функцию Эйри.

В заключение запишем систему уравнений (1.11), (1.12) в симметричном виде, используя замену $F=F_0-cL/2$

$$2\Delta_i F_0=\mp\sqrt{D}\,\Delta_i L+c''L,\quad \text{при } i=1 \text{ знак минус, при } i=2 \text{ знак плюс.} \tag{1.15}$$

Здесь $\Delta_i F_0=\left(m_i^2\Delta_++\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F_0$, $i=1, 2$,

$m_{1,2}^2=[(c-2b)\pm\sqrt{D}]/(2d)$ — корни характеристического уравнения $dm^4-(c-2b)m^2+a=0$; $D=(c-2b)^2-4ad$ — дискриминант этого уравнения.

2. Приведем основные разрешающие уравнения для случая изотропного тела. Предполагаем, что коэффициент сдвига μ это функция от z, а коэффициент Пуассона ν — функция трех координат.

В этом случае система (1.11), (1.12) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\frac{(2+\nu)}{2\mu}\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}+\left(\frac{1}{\mu}\right)'\frac{\partial L}{\partial z}+\frac{1-\nu}{2\mu}\Delta_+ L=\frac{1-\nu}{2\mu}\chi-\frac{\nu}{2\mu}\varphi, \tag{2.1}$$

$$\Delta_+ F-\frac{1-\nu}{2\mu}\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}+\frac{\nu}{2\mu}\Delta_+ L=\frac{\nu}{2\mu}\chi-\frac{1-\nu}{2\mu}\varphi. \tag{2.2}$$

Рассмотрим запись разрешающих уравнений в переменных F_0, L (вводим $c(z)=[\mu(z)]^{-1}$)

$$F_0=F+cL/2. \tag{2.3}$$

В случае изотропного пространства дискриминант $D=0$, корни характеристического уравнения равны $m_1^2=m_2^2=1$ и уравнения (1.15) совпадают

$$2\Delta F_0=c''L-c(\varphi-\chi). \tag{2.4}$$

В качестве второго разрешающего уравнения можно выбрать одно из системы (2.1), (2.2).

В частности, выбираем (2.2) и записываем его в переменных F_0, L

$$c(1-\nu)\Delta L=2\Delta_+ F_0-c[\nu\chi-(1-\nu)\varphi]. \tag{2.5}$$

Необходимо отметить, что функции F_0, L использовались ранее А. Е. Лявом для вывода общего решения осесимметричной деформации тела через одну бигармоническую функцию — функцию Лява.

В дальнейших исследованиях они не нашли широкого применения. Как видно из (1.15) использование этих функций облегчает нахождение и исследование решений для трансверсально изотропных тел.

Подействуем оператором Δ на (2.5) и подставим значение ΔF_0 из (2.4), в результате получим уравнение относительно

$$\Delta[c(1-\nu)\Delta L]-c''\Delta_+ L=\Delta[c(1-\nu)\varphi-c\nu\chi]+\Delta_+[c(\chi-\varphi)].$$

В отсутствие массовых сил это уравнение по форме совпадает с уравнением, введенным В. П. Плевако [4]

$$\Delta[c(1-\nu)\Delta L]-c''\Delta_+ L=0. \tag{2.6}$$

Физический смысл уравнения (2.6) виден из записи в форме

$$2\Delta[(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}\operatorname{div}\mathbf{u}]=c''\sigma. \tag{2.7}$$

Здесь учтено, что ΔL можно выразить

$$\Delta L=2\mu(1-2\nu)^{-1}\operatorname{div}\mathbf{u}.$$

Уравнение (2.7) является разрешающим [9–11] при построении общего решения в случае $\mu=\mathrm{const}$ при помощи гармонического вектора и вспомогательной функции.

При $c''\neq 0$ можно в качестве разрешающей функции использовать F_0. Для этого выразим $L=(c'')^{-1}[2\Delta F_0+c(\chi-\varphi)]$ из (2.4) и, подставляя L в (2.5), получим уравнение относительно F_0

$$c(1-\nu)\Delta\{(c'')^{-1}[2\Delta F_0+c(\chi-\varphi)]\}=2\Delta_+ F_0+c[\nu\chi-(1-\nu)\varphi].$$

Если массовые силы отсутствуют, уравнение упрощается

$$c(1-\nu)\Delta[(c'')^{-1}\Delta F_0]=\Delta_+ F_0. \tag{2.8}$$

Перемещения в переменных F_0, L соответственно равны

$$u_{x,y}=\frac{\partial}{\partial x, y}\left[F_0-\frac{L}{2\mu}\right];\quad w=-\left[\frac{\partial F_0}{\partial z}+\frac{1}{2\mu^2}\frac{\partial}{\partial z}(\mu L)\right]. \tag{2.9}$$

Напряжения однородных уравнений через функции L и $\Phi_0=2\mu F_0$ выражаются формулами

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}+\frac{\partial^2(L-\Phi_0)}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xz}=-\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial z}, \quad \sigma_{zz}=\Delta_+ L,$$

$$\sigma_{yy}=\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}+\frac{\partial^2(L-\Phi_0)}{\partial x^2}, \quad \sigma_{yz}=-\frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial z}, \quad \sigma_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Phi_0-L).$$

3. Если в выражении тензора напряжений σ сферически трансверсально изотропной среды

$$\sigma_{rr}=c_{11}\varepsilon_{rr}+c_{12}(\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{\varphi\varphi}=c_{12}\varepsilon_{rr}+c_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi}+c_{23}\varepsilon_{\theta\theta},$$
$$\sigma_{\theta\theta}=c_{12}\varepsilon_{rr}+c_{22}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi}=2c_{44}\varepsilon_{r\varphi},$$
$$\sigma_{r\theta}=2c_{44}\varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{\theta\varphi}=(c_{22}-c_{23})\,\varepsilon_{\theta\varphi},$$

оба коэффициента сдвига c_{44}, $2G=c_{22}-c_{23}$ функции только координаты r (остальные коэффициенты могут зависеть от трех переменных), то уравнения равновесия $\operatorname{div}\sigma=0$ разделяются на уравнение, описывающее нормальное вращение (уравнение второго рода) и систему двух уравнений (решение первого рода). Ранее приведенный вывод [5, 6, 8] без изменений переносится на этот более общий случай, причем полученные формулы [8] полностью сохраняют свой вид.

Приведем разрешающие уравнения первого рода относительно w-составляющей вектора u_r и потенциала F

$$\bar{D}\sigma+\Delta_*\tau=2\left\{\frac{c_{12}}{r}\partial+\frac{c_{22}+c_{23}}{r^2}\right\}w+\frac{c_{22}+c_{23}}{r}\Delta_* F, \tag{3.1}$$

$$\bar{D}\left(\frac{\tau}{r}\right)+\frac{\tau}{r^2}=-\left\{\frac{c_{12}}{r}\partial+\frac{c_{22}+c_{23}}{r^2}\right\}w-\left(\frac{c_{22}-c_{23}}{r^2}+\frac{c_{22}}{r}\Delta_*\right)F. \tag{3.2}$$

Здесь $\partial v=\frac{\partial}{\partial r}v$, $\bar{D}v=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v)$,

$$\Delta_* v=\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}v\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right] \text{ — оператор Бельтрами},$$

$$\sigma=c_{11}\partial w+c_{12}\left[\frac{2w}{r}+\Delta_* F\right], \tag{3.3}$$

$$\tau=c_{44}\left[w+r^2\partial\left(\frac{F}{r^2}\right)\right]. \tag{3.4}$$

Уравнения (3.1), (3.2) являются уравнениями равновесия, а (3.3), (3.4) уравнениями закона Гука для $\sigma_{rr}=\sigma$ и τ-потенциала компонент тензоров

$$\sigma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\tau=D_\theta\tau, \quad \sigma_{r\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\tau=D_\varphi\tau.$$

Причем компоненты смещения $u_\theta=D_\theta F$, $u_\varphi=D_\varphi F$. Сложив (3.1) с удвоенным (3.2), получаем уравнение

$$\bar{D}\left(\sigma+\frac{2\tau}{r}\right)+\left(\Delta_*+\frac{2}{r}\right)\left(\tau+\frac{c_{22}-c_{23}}{r}F\right)=0, \tag{3.5}$$

решение которого можно выразить через L, заменив

$$\sigma=\left(\Delta_*+\frac{2}{r^2}\right)L-\frac{2\tau}{r}, \quad \tau=-\partial L-\frac{(c_{22}-c_{23})}{r}F.$$

Тем самым получим систему трех уравнений: уравнения равновесия (3.2) и закона Гука (3.3), (3.4) относительно L, F, w. Выражая w из (3.4) через L и F

$$w=-\frac{1}{c_{44}}\left[\partial L+c_{44}\,\partial F+\frac{c_{22}-c_{23}-2c_{44}}{r}F\right]$$

и подставляя в (3.3) и (3.2), получаем систему уравнений относительно L и F, аналогичную (1.11), (1.12).

Из формул для напряжения $\left(\Phi=[c_{23}-c_{22}]F,\ \tau=\frac{\Phi}{r}+\partial L\right)$

$$\sigma=\frac{2}{r^2}\Phi-\left[\Delta_*+\frac{2}{r}D\right]L,\qquad \sigma_{r\theta}=D_\theta\tau,\qquad \sigma_{r\varphi}=D_\varphi\tau,$$

$$\sigma_{\theta\varphi}=-D_\theta D_\varphi\Phi,\qquad \sigma_{\varphi\varphi}=\left[D_\theta^2-\frac{1}{r}\partial\right]\Phi-D^2L,$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\left[D_\varphi^2-\frac{1}{r}\partial+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}D_\theta\right]\Phi-D^2L$$

следует, что Φ и L являются компонентами тензора функции напряжений $\psi_{rr}=\Phi$, $\psi_{\varphi\varphi}=\psi_{\theta\theta}=-L$, у которого недиагональные члены равны нулю.

Рассмотрим более подробно изотропное тело. Разрешающая система уравнений

$$\Delta\left(\frac{L}{2\mu r^2}\right)+\frac{L}{r^2}\left[\frac{1}{r}\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)-\frac{1}{2}\partial^2\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]+\Delta\left(\frac{F}{r^2}\right)-\frac{F}{\mu r^3}\partial\mu=0, \tag{3.6}$$

$$\overline{D}(\partial L)-\frac{\nu}{1-\nu}\Delta_*L-\frac{2\mu}{1-\nu}\Delta_*F=\frac{-2}{(1-\nu)r}(\partial L+2\mu\partial F)+$$
$$+\frac{2\nu}{(1-\nu)r^2}(L+2\mu F)-\frac{2}{r}F\partial\mu \tag{3.7}$$

заменой переменной $2\mu F=2\mu F_0-L$ сводится к

$$\Delta\left(\frac{F_0}{r^2}\right)=\frac{L}{2r}\partial\left[\frac{1}{r}\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]-\frac{F_0}{\mu r^3}\partial\mu, \tag{3.8}$$

$$\Delta L-\frac{2\mu}{1-\nu}\left(\Delta_*F_0-\frac{2}{r}\partial F_0+\frac{2\nu}{r^2}F_0\right)=\frac{(1+\nu)L}{\mu r(\nu-1)}\partial\mu-\frac{2F_0}{r}\partial\mu. \tag{3.9}$$

Уравнения (3.8), (3.9) переходят в (2.4), (2.5) при $r\to\infty$. Коэффициент при L в (3.8) обращается в ноль, если $\mu=(cr^2+c_1)^{-1}$, в частности, при $\mu=\mathrm{const}$ $(F_0/r)^2$ — гармоническая, а L — бигармоническая функции. Если коэффициент при L в (3.8) неравен нулю, то систему можно свести к одному уравнению относительно F_0, аналогичному (2.8).

В заключение приведем выражение смещений решения первого рода

$$u_{\theta,\varphi}=D_{\theta,\varphi}\left[F_0-\frac{L}{2\mu}\right],\qquad w=-\left[\partial F_0+\frac{1}{2\mu^2}\partial(\mu L)\right].$$

Таким образом, для среды с рассмотренными выше неоднородностями решение выражается через две функции (решение первого и второго рода), которые удовлетворяют уравнениям в частных производных второго и четвертого порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман С. Г.* Изв. ВНИИ гидротех., 1948, **37**, 89—101.
2. *Hu Hai-chang* // Acta Sci. Sinica, 1953, **11**, № 2, 145—151.
3. *Hu Hai-chang* // Acta Sci. Sinica, 1954, **12**, № 3, 247—260.
4. *Плевако В. П.* // Прикл. мат. и мех., **35**, вып. 1, 853—860.
5. *Пуро А. Э.* // Прикл. мат. и мех., 1974, **38**, вып. 6, 1139—1144.
6. *Пуро А. Э.* // Канд. дис., Таллинн, 1975.
7. *Раппопорт Р. М.* // Прикл. мат. и мех., 1976, **40**, вып. 5, 956—958.
8. *Пуро А. Э.* // Прикл. механика, 1980, **16**, № 2, 40—44.
9. *Boudet, R.* // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Ser. A, 1966, **263**, № 19, 692—694.
10. *Ломакин В. А.* Теория упругости и однородных тел. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976.
11. *Бородачев А. Н.* // Прикл. мат. и мех., 1987, **51**, вып. 4, 611—615.

Калининградский технический институт рыбной промышленности и хозяйства

Поступила в редакцию 24/X 1988

A. PURO

MITTEHOMOGEENSETE KEHADE ELASTSUSTEOORIA VÕRRANDITE ERALDAMINE

Võrrandid on eraldatud juhul, kui elastsuskoefitsient on ristkoordinaadi z või sfäärilise koordinaadi r funktsioon ning Poissoni koefitsient sõltub kõigist kolmest koordinaadist. Kehade transversaalse isotroopia korral on võrrandite eraldamine võimalik, kui mõlemad elastsuskoefitsiendid on z-i või r-i funktsioonid. On eeldatud, et massijõudude vektoril on potentsiaal.

A. PURO

SEPARATION OF EQUATIONS OF NON-HOMOGENEOUS BODIES

The separation is carried out in cases when the coefficient of shear depends on the Decart coordinate z or radius r of the spherical system coordinates.

An analogical separation happens in the transversal isotropic body, when both coefficients of shear depend on z or r for the corresponding isotropy. It is presumed that mass forces have the potential.