EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR. PHYSICS * MATHEMATICS

1988, 37, 4

УДК 519.713.2+517.11

Л. ВОЛГИН

СВОЙСТВА И ЗАКОНЫ КОМПЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ

(Представил Н. Алумяэ)

Непрерывная (бесконечнозначная) логика успешно применяется для решения ряда кибернетических задач, для анализа и синтеза аналоговых функциональных и логических преобразователей [1–3]. Однако возможности непрерывной логики (НЛ) ограничены кругом задач, описываемых только линейно-изломными функциями.

В настоящей работе рассматривается логико-математический аппарат (комплементарная алгебра), являющийся расширением предикатной алгебры выбора (ПАВ) [4], который в отличии от НЛ позволяет решать задачи, описываемые как линейно-изломными, так и линейно-разрывными функциями.

Комплементарная алгебра (КА) существенно расширяет область практического использования континуальных логических методов. Достоинством разработанного логико-математического аппарата является его конструктивность (наличие общих свойств с булевой структурой [5]), совместимость с математическим аппаратом ПАВ и НЛ (его базовые операции включают в себя как частный случай базовые операции ПАВ и НЛ) и наличие адекватной элементной базы — реляторов.

Базовые операции КА z_1 и z_2 задаются корнями квадратного уравнения [6]

$$z^2-\frac{2}{1+\alpha}(y_1+y_2)(p_1+p_2)z+\frac{2}{1+\alpha}[y_1y_2(p_1^2+p_2^2)+(y_1^2+y_2^2)p_1p_2]=0,$$

для которого

$$z_{1,2}=\frac{1}{1+\alpha}[(y_1+y_2)(p_1+p_2)\pm$$

$$\pm\sqrt{(y_1^2-2\alpha y_1y_2+y_2^2)(p_1^2+p_2^2)-2p_1p_2(\alpha y_1^2-2y_1y_2+\alpha y_2^2)}\,]. \quad (1)$$

Здесь предметные переменные y_1, y_2 и коэффициенты α, p_1, p_2 являются комплексными и (или) действительными числами. Согласно (1) $z_1+z_2=(y_1+y_2)(p_1+p_2)$ (при $\alpha=1$).

При $p_1+p_2=1$ (при выполнении условия комплементарности) и $p_1, p_2\in\{0, 1\}$ (коэффициенты p_1 и p_2 являются двузначными предикатами) выражение (1) приводится к виду

$$z_{1,2}=\frac{1}{1+\alpha}(y_1+y_2\pm\sqrt{y_1^2-2\alpha y_1y_2+y_2^2}). \quad (2)$$

В частных случаях при $\alpha=1$, $\alpha=0$, $\alpha=-1$ из (2) получим соответственно

$$z_1=0{,}5(y_1+y_2+|y_1-y_2|)=\max(y_1, y_2), \quad (3а)$$

$$z_2=0{,}5(y_1+y_2-|y_1-y_2|)=\min(y_1, y_2), \quad (3б)$$

$$z_1=y_1+y_2+\sqrt{y_1^2+y_2^2}, \qquad z_2=y_1+y_2-\sqrt{y_1^2+y_2^2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{rect}(y_1+y_2)=\max_{\alpha\to-1}(0,\ z_1+z_2), \qquad \operatorname{rect}^{-1}(y_1+y_2)=\min_{\alpha\to-1}(0,\ z_1+z_2). \quad (5)$$

Выражения (3) воспроизводят базовые операции НЛ — операции выбора бо́льшей (3а) и меньшей (3б) переменной из двух предметных переменных y_1 и y_2, для которых $z_1-z_2=|y_1-y_2|$, и $z_1z_2=y_1y_2$. Выражения (5) воспроизводят взаимообратные функции идеального выпрямителя, для которых $\operatorname{rect}^{-1}(\operatorname{rect} y)=y$, $\operatorname{rect}(\operatorname{rect}^{-1} y)=y$ [7].

Если положить $p_1=0{,}5(1+\alpha)p_1^*$, $p_2=0{,}5(1+\alpha)p_2^*$, то при $p_1^*+p_2^*=1$ и $p_1^*, p_2^*\in\{0, 1\}$ выражение (1) приводится к виду

$$z_{1,2}=0{,}5(y_1+y_2\pm\sqrt{y_1^2-2\alpha y_1y_2+y_2^2}). \quad (6)$$

Выражение (6) определяет R-дизъюнкцию (z_1) и R-конъюнкцию (z_2), используемые в [8] для построения математических моделей сложных фигур (чертежей) на плоскости и в трехмерном пространстве. При $\alpha=1$ выражение (6) воспроизводит базовые операции НЛ (3). При $\alpha=-1$ согласно (6)

$$z_1=0{,}5(y_1+y_2+|y_1+y_2|)=(y_1+y_2)I(y_1+y_2)=\max(0,\ y_1+y_2), \quad (7а)$$

$$z_2=0{,}5(y_1+y_2-|y_1+y_2|)=(y_1+y_2)I(-y_1-y_2)=\min(0,\ y_1+y_2). \quad (7б)$$

Здесь $I(y)=0{,}5(1+\operatorname{sign} y)$, где

$$I(y)=\begin{cases}1 & \forall y>0\\ 0 & \forall y<0\end{cases}, \qquad \operatorname{sign}(y)=\begin{cases}1 & \forall y>0\\ -1 & \forall y<0\end{cases}$$

есть соответственно единичная (пороговая) и знаковая функции.

При $\alpha=1$ согласно (1) получим

$$z_1=0{,}5[(y_1+y_2)(p_1+p_2)+(y_1-y_2)(p_1-p_2)]=y_1p_1+y_2p_2, \quad (8а)$$

$$z_2=0{,}5[(y_1+y_2)(p_1+p_2)-(y_1-y_2)(p_1-p_2)]=y_1p_2+y_2p_1. \quad (8б)$$

Для операций (8) $z_1+z_2=(y_1+y_2)(p_1+p_2)$, $z_1-z_2=(y_1-y_2)(p_1-p_2)$, $z_1z_2=(y_1^2+y_2^2)p_1p_2+y_1y_2(p_1^2+p_2^2)$. При выполнении условия комплементарности $p_1+p_2=1$ (при $p_1=p_i$, $p_2=\bar{p}_i=1-p_i$, где $i=1, 2, \ldots, k$) согласно (8)

$$z_1=\vee_{p_i}(y_1, y_2)=0{,}5[y_1+y_2+(y_1-y_2)(2p_i-1)]=y_1p_i+y_2\bar{p}_i, \quad (9а)$$

$$z_2=\wedge_{p_i}(y_1, y_2)=0{,}5[y_1+y_2-(y_1-y_2)(2p_i-1)]=y_1\bar{p}_i+y_2p_i. \quad (9б)$$

Операции (9) являются комплементарными дизъюнкцией ($\vee_{p_i}$) и конъюнкцией ($\wedge_{p_i}$).

На рис. 1 представлены графики функций (3), (5), (7) и (9), где $y=y_1+y_2$.

Третьей базовой операцией КА является диаметральная инверсия $\bar{y}_j=2y_0-y_j$, $\bar{z}_i=2y_0-z_i$ относительно центра $y_0=0{,}5(y_{01}+y_{02})$ прямоугольника на комплексной плоскости (рис. 2), на котором определены предметные переменные $y_j\in\mathbf{Y}=\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, где $y_{01}=a_1+jb_1$ и $y_{02}=a_2+jb_2$ есть комплексные числа, задающие область определения

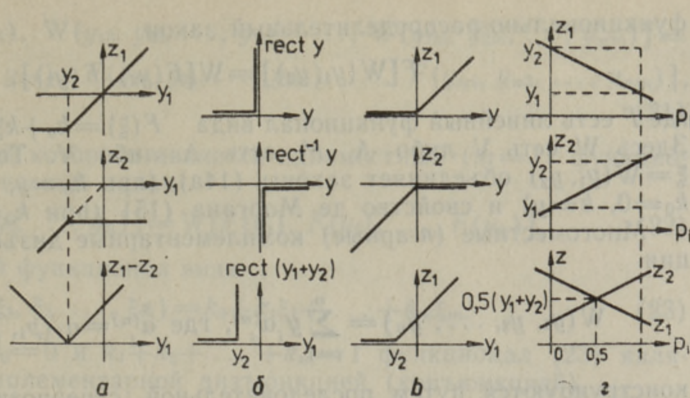


Рис. 1.

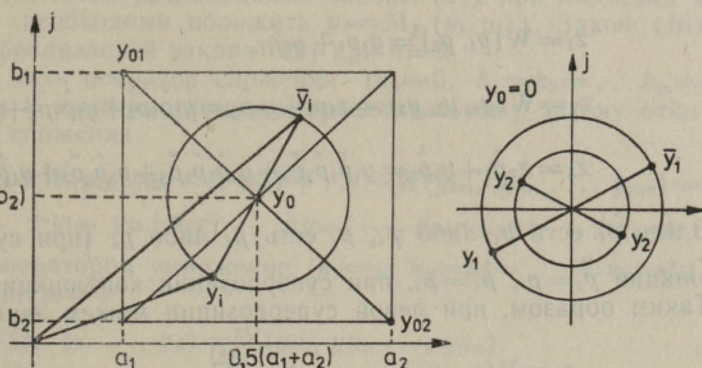


Рис. 2.

предметных переменных. Если предметные переменные и коэффициенты p_i являются действительными числами, то операции диаметральной инверсии КА и НЛ совпадают.

Для комплементарных дизъюнкции и конъюнкции справедливы следующие законы и свойства:
закон тавтологии

$$W_p(y, y) = M_p(y, y) = y, \tag{10}$$

свойства перестановочной (коммутативной) обратимости

$$W_p(y_1, y_2) = M_p(y_2, y_1) = M_{\bar{p}}(y_1, y_2) = W_{\bar{p}}(y_2, y_1), \tag{11}$$

распределительный закон

$$W_{p_1}[y_1, M_{p_2}(y_2, y_3)] = M_{p_2}[W_{p_1}(y_1, y_2),\ W_{p_1}(y_1, y_3)], \tag{12}$$

распределительно-сочетательный закон

$$W_{p_1}[W_{p_2}(y_1, y_2),\ W_{p_2}(y_3, y_4)] = W_{p_2}[W_{p_1}(y_1, y_3),\ W_{p_1}(y_2, y_4)], \tag{13}$$

распределительные законы относительно операций сложения (вычитания) и умножения (деления)

$$y + W(y_1, y_2) = W(y + y_1,\ y + y_2), \tag{14а}$$

$$y W(y_1, y_2) = W(y y_1,\ y y_2), \tag{14б}$$

свойство де Моргана

$$\overline{W(y_1, y_2)} = M(\bar{y}_2, \bar{y}_1), \tag{15}$$

функционально-распределительный закон

$$F[\mathrm{W}(y_1, y_2)] = \mathrm{W}[F(y_1), F(y_2)], \tag{16}$$

где F есть линейный функционал вида $F(\xi) = k_0 + k\xi$ и др. Здесь W есть V либо Λ, M есть Λ либо V. Тождество (16) при $\xi = \mathrm{W}(y_1, y_2)$ объединяет законы (14а) (при $k_0 = y$, $k = 1$), (14б) (при $k_0 = 0$, $k = y$) и свойство де Моргана (15) (при $k_0 = 2y_0$, $k = -1$).

Многоместные (n-арные) комплементарные дизъюнкции и конъюнкции

$$\mathrm{W}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i \check{\alpha}_i^{(n)}, \text{ где } \check{\alpha}_i^{(n)} = \alpha_i(\check{p}_1, \check{p}_2, \ldots, \check{p}_n) \tag{17}$$

конструируются путем последовательной суперпозиции элементарных операций вида (9). Например, при левой многократной суперпозиции комплементарных дизъюнкций (конъюнкций) получим

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{W}(y_1, y_2) = y_1\check{p}_1 + y_2\hat{p}_1, \\ z_2 &= \mathrm{W}(y_1, y_2, y_3) = z_1\check{p}_2 + y_3\hat{p}_2 = y_1\check{p}_1\check{p}_2 + y_2\hat{p}_1\check{p}_2 + y_3\hat{p}_2, \\ z_3 &= z_2\check{p}_3 + y_4\hat{p}_3 = y_1\check{p}_1\check{p}_2\check{p}_3 + y_2\hat{p}_1\check{p}_2\check{p}_3 + y_3\hat{p}_2\check{p}_3 + y_4\hat{p}_3 \text{ и т. д.} \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $\check{p}_i$ есть p_i либо $\bar{p}_i$, $\hat{p}_i$ есть $\bar{p}_i$ либо p_i (при суперпозиции дизъюнкций $\check{p}_i = p_i$, $\hat{p}_i = \bar{p}_i$, при суперпозиции конъюнкций $\check{p}_i = \bar{p}_i$, $\hat{p}_i = p_i$). Таким образом, при левой суперпозиции можем записать

$$z_k = \mathrm{V}(y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} y_i\alpha_i, \text{ где } \alpha_i = \bar{p}_{i-1}\prod_{j=i}^{k} p_j, \tag{19а}$$

$$z_k = \Lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} y_i\tilde{\alpha}_i, \text{ где } \tilde{\alpha}_i = p_{i-1}\prod_{j=i}^{k} \bar{p}_j, \tag{19б}$$

где $\check{p}_0 = 1$, $\prod_{j=k+1}^{k} \check{p}_j = 1$. Здесь весовые коэффициенты $\alpha_i = \alpha_i(p_{i-1}, p_i, \ldots, p_k)$ и $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i(\bar{p}_{i-1}, \bar{p}_i, \ldots, \bar{p}_k)$ связаны между собой через операцию комплементарной инверсии $\sim$.

Относительно операции суперпозиции множество $\mathbf{Z}$ всех функций вида (17), включая базовые операции (9), образуют алгебраическую полугруппу (моноид) с единичным элементом $\mathrm{W}_{\check{p}_i=1}(y_i, y_j)$.

Независимо от типа суперпозиции (левая, правая, смешанная) для всех функций множества $\mathbf{Z}$ при $\check{p}_i + \hat{p}_i = 1$ выполняется условие n-местной комплементарности: $\check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_2 + \ldots + \check{\alpha}_n = 1$, следствием которого является закон многоместной тавтологии $\mathrm{W}(y_1, y_2, \ldots, y) = y$, и свойство транзитивной комплементарности весовых коэффициентов $\check{\alpha}_i^{(j)}$ j-арных дизъюнкций и конъюнкций

$$1 = \check{\alpha}_1^{(1)} = \check{\alpha}_1^{(2)} + \check{\alpha}_2^{(2)} = \check{\alpha}_1^{(3)} + \check{\alpha}_2^{(3)} + \check{\alpha}_3^{(3)} = \ldots = \check{\alpha}_1^{(n)} + \check{\alpha}_2^{(n)} + \ldots + \check{\alpha}_n^{(n)}, \tag{20}$$

где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\check{\alpha}_i$ есть α_i либо $\tilde{\alpha}_i$, $\check{\alpha}_1^{(1)} \equiv 1$.

Для n-арных комплементарных дизъюнкций и конъюнкций выполняется многоместный функционально-распределительный закон

$$F[\mathrm{W}(y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}), \mathrm{W}(y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}), \ldots, \mathrm{W}(y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm})] = \\ = \mathrm{W}[F(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1m}), F(y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2m}), \ldots, F(y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nm})], \tag{21}$$

частной реализацией которого является одноместный ($m=1$) функционально-распределительный закон

$$F[W(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \mathrm{W}[F(y_1), F(y_2), \ldots, F(y_n)], \tag{22}$$

где F есть линейный функционал вида

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = k_0 + k_1\xi_1 + \ldots + k_m\xi_m. \tag{23}$$

В частности, при $k_0=0$ и $k_1+k_2+\ldots+k_m=1$ функционал (23) является m-местной комплементарной дизъюнкцией (конъюнкцией).

Все вышеприведенные распределительные законы (12)—(16) являются частными реализациями закона (21). Действительно, законы (12) и (13) являются частными реализациями закона (21) при $n=m=2$ и $F=\mathrm{W}_{p_1}$ (для (12) необходимо положить $y_1 = \mathrm{M}_{p_2}(y_1, y_1)$). Закон (16) является частной реализацией закона (22) при $n=2$.

Если в (21) F есть оператор сложения ($k_0=0$, $k_1=k_2=\ldots k_m=1$), то приходим к многоместному распределительному закону относительно операции сложения

$$\mathrm{W}(y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) + \mathrm{W}(y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}) + \ldots + \mathrm{W}(y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm}) = \\ = \mathrm{W}(y_{11}+y_{12}+\ldots+y_{1m}, y_{21}+y_{22}+\ldots+y_{2m}, \ldots, y_{n1}+y_{n2}+\ldots+y_{nm}).$$

Если F является оператором умножения ($k_1=y$, $k_0=k_2=\ldots=k_m=0$), то согласно (21) при $m=1$

$$y\mathrm{W}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \mathrm{W}(yy_1, yy_2, \ldots, yy_n).$$

При $k_0=2y_0$, $k_1=-1$, $k_2=k_3=\ldots=k_m=0$ из (21) следует n-арный закон де Моргана

$$\overline{\mathrm{W}(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \mathrm{W}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n).$$

При $F=\mathrm{M}_1$ и $n=m=2$ согласно (21)

$$\mathrm{M}_1[\mathrm{W}_2(y_{11}, y_{21}), \mathrm{W}_2(y_{12}, y_{22})] = \mathrm{W}_2[\mathrm{M}_1(y_{11}, y_{12}), \mathrm{M}_1(y_{21}, y_{22})].$$

Отсюда при $y_{11}=y_{12}=y$ следует распределительный закон (12) и т. д.

При $\check{p}_i \in \{0, 1\}$ ($\check{p}_i$ являются двузначными предикатами) КА вырождается в предикатную алгебру выбора [4]. При этом дополнительно имеют место ослабленный сочетательный закон

$$\mathrm{W}[y_1, \mathrm{W}(y_2, y_3)] = \mathrm{W}[\mathrm{W}(y_1, y_2), y_3] = \mathrm{W}(y_1, y_3), \tag{24}$$

закон булевого поглощения

$$\mathrm{W}[y_1, \mathrm{M}(y_1, y_2)] = y_1, \tag{25}$$

свойство ортогональности весовых коэффициентов $\check{\alpha}_i^{(n)}$ n-арных предикатных дизъюнкций и конъюнкций (17)

$$\check{\alpha}_i^{(n)}\check{\alpha}_i^{(n)} = \check{\alpha}_i^{(n)}, \quad \check{\alpha}_i^{(n)}\check{\alpha}_k^{(n)} = 0, \quad i \neq k \tag{26}$$

и др.

При $\check{\alpha}_i \in \{0, 1\}$ (при $\check{p}_i \in \{0, 1\}$) в выражениях (16), (21), (22) F есть любой заданный функционал (комплементарные и предикатные дизъюнкция или конъюнкция, базовые операции непрерывной логики, операции сложения, вычитания, умножения или деления, единичные или знаковые функции, любые функции нескольких переменных, операции интегрирования или дифференцирования и др.). Например, при $p_i \in \{0, 1\}$ согласно (21) при $F = \max$ и $F = I$ получим соответственно

$$\max [\mathrm{W}(y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}), \mathrm{W}(y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}), \ldots, \mathrm{W}(y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm})] = \\ = \mathrm{W}[\max(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1m}), \max(y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2m}), \ldots \\ \ldots, \max(y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nm})],$$

$$I[\mathrm{W}(y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) + \mathrm{W}(y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}) + \mathrm{W}(y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm})] = \\ = \mathrm{W}[I(y_{11} + y_{12} + \ldots + y_{1m}), I(y_{21} + y_{22} + \ldots + y_{2m}), \ldots \\ \ldots, I(y_{n1} + y_{n2} + \ldots + y_{nm})].$$

Если F есть оператор деления, то при $\check{p}_i \in \{0, 1\}$ согласно (21) справедливо тождество

$$\frac{\mathrm{W}(y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1})}{\mathrm{W}(y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2})} = \mathrm{W}\left(\frac{y_{11}}{y_{12}}, \frac{y_{21}}{y_{22}}, \ldots, \frac{y_{n1}}{y_{n2}}\right),$$

которое при $y_{11} = y_{21} = \ldots = y_{n1} = 1$ приводится к виду

$$1/\mathrm{W}(y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}) = \mathrm{W}\left(\frac{1}{y_{12}}, \frac{1}{y_{22}}, \ldots, \frac{1}{y_{n2}}\right)$$

и т. д.

При $p_i \in \{0, 1\}$ выражения (9) воспроизводят логические операции альтернативного выбора одной из двух предметных переменных y_1, y_2. Если коэффициенты p_i и $\bar{p}_i$ принадлежат отрезку $[0, 1]$ числовой оси ($p_i, \bar{p}_i \in [0, 1]$), то выражения (9) воспроизводят операцию взвешенного суммирования двух предметных переменных y_1, y_2, а при $p_i = \bar{p}_i = 0{,}5$ воспроизводится операция осреднения $z_1 = z_2 = 0{,}5(y_1 + y_2)$ двух предметных переменных.

Многоместные дизъюнкции и конъюнкции (17) при $\check{\alpha}_i \in \{0,1\}$ (при $\check{p}_i \in \{0,1\}$) воспроизводят операции выбора одной из нескольких предметных переменных, при $p_i \in [0,1]$ многоместные дизъюнкции и конъюнкции (17) воспроизводят операцию взвешенного суммирования n предметных переменных, а при $\check{\alpha}_1 = \check{\alpha}_2 = \ldots = \check{\alpha}_n = 1/n$ воспроизводится операция осреднения n предметных переменных $z = (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)/n$. В частности, для левой суперпозиции дизъюнкций согласно (19а) для воспроизведения операции осреднения необходимо положить $\check{p}_i = i/(i+1)$, т. е. $p_1 = 1/2$, $p_2 = 2/3$, $p_3 = 3/4$ и т. д., а для левой суперпозиции конъюнкций согласно (19б) $\hat{p}_i = 1/(i+1)$, причем $\check{p}_i + \hat{p}_i = 1$.

Согласно (19) переход от дизъюнктивных к конъюнктивным формам записи и обратно в КА осуществляется путем комплементарной инверсии.

Множество всех функций $\mathbf{Z}$, порождаемых операцией $\overline{\text{суперпозиции}}$, совместно с базовыми операциями диаметральной инверсии, комплементарными дизъюнкцией и конъюнкцией при $p_i + \bar{p}_i = 1$, где p_i есть комплексные или действительные числа, образуют комплементарную алгебру, а при $p_i \in \{0,1\}$ образуют предикатную алгебру выбора: $\langle \mathbf{Z}, \mathrm{V}, \Lambda, - \rangle$.

Для логико-математического описания и синтеза коммутационных цепей с n входами и m выходами введем операции многомерных комплементарных дизъюнкций и конъюнкций

$$z_i = \mathrm{W}_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} \check{\alpha}_{ij} y_j, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{27}$$

Выражение (27) записанное в матричной форме имеет вид: $\mathbf{Z} = \mathbf{AY}$, где $\mathbf{A} = \|\check{\alpha}_{ij}\|$ есть матрица весовых коэффициентов, $\mathbf{Y} = \|y_j\|$ — матрица-столбец предметных переменных. Условие комплементарности для многомерных дизъюнкций и конъюнкций имеет вид: $m = n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \check{\alpha}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \check{\alpha}_{ij} = 1. \tag{28}$$

Условие (28) при $\check{\alpha}_{ij} \in \{0, 1\}$ (при $\check{p}_i \in \{0, 1\}$) означает, что каждая строка и столбец матрицы $\mathbf{A}$ содержат только одну единицу.

Переход от дизъюнктивных к конъюнктивным формам и обратно в многомерной КА также осуществляется путем комплементарной инверсии и при $\check{\alpha}_{ij} \in \{0, 1\}$ сопровождается изменением знака определителя $|\mathbf{A}| \in \{-1, 1\}$. Функции многомерной КА конструируются путем суперпозиции и композиции.

При $n > m$ и $n = m$ многомерные предикатные дизъюнкции и конъюнкции ($\check{\alpha}_{ij} \in \{0, 1\}$) воспроизводят соответственно операции группового выбора m из n предметных переменных и операцию сортировки n предметных переменных (операции пространственного выбора m из n переменных).

В качестве коэффициентов p_i в КА могут быть использованы любые комплексные или действительные числа и, в частности, трехзначные

$$p_i = I_p(a_1x_1 + a_2x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } a_1x_1 + a_2x_2 > 0 \\ p & \text{при } a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \\ 0 & \text{при } a_1x_1 + a_2x_2 < 0 \end{cases} \tag{29}$$

или двузначные

$$p_i = I_0(a_1x_1 + a_2x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } a_1x_1 + a_2x_2 > 0 \\ 0 & \text{при } a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant 0 \end{cases}, \tag{29а}$$

$$p_i = I_1(a_1x_1 + a_2x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } a_1x_1 + a_2x_2 < 0 \end{cases}, \tag{29б}$$

$$p_i = \mathrm{si}(x, x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{при } x \notin [x_1, x_2] \end{cases}. \tag{30}$$

предикаты. Здесь x, x_j есть предикатные переменные a_1 и a_2 есть знаковые ($a_1, a_2 \in \{-1, 1\}$) или пороговые коэффициенты, $p \in [0, 1]$. Двузначные предикаты (29а) и (29б) являются частными реализациями функции (29) при $p = 0$ и $p = 1$ соответственно. Предикат (30) воспроизводит селектирующую функцию $p_i = I(x - x_1) I(x_2 - x)$.

При $p_i = p_i(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ функции КА и ПАВ конструируются путем предметной и предикатной суперпозиций.

Все вышеприведенные законы и свойства при $p_i = p_i(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ остаются в силе, если множества предикатных $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ и предметных $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ переменных не пересекаются. При пересечении множеств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ часть вышеприведенных законов и свойств видоизменяется.

Покажем, что КА включает в себя как частный случай непрерывную логику. Подставив (29) в (9), при $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ приходим к базовым операциям НЛ

$$z_1 = V_{I_p}(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2), \qquad z_2 = \Lambda_{I_p}(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2). \tag{31}$$

В НЛ условие непересечения множеств предметных и предикатных переменных не выполняется, так как для ее базовых операций $x_1=y_1$, $x_2=y_2$. Поэтому в общем случае законы НК не могут быть получены прямой заменой в вышеприведенных тождествах операций $\vee$ и $\wedge$ соответственно на max и min. Но поскольку КА является обобщением НЛ, то все законы и свойства НЛ являются следствием свойств КА. Представления законов и свойств КА в НЛ рассмотрены в [6]. Представления булевых функций в НЛ рассмотрены в [9].

При $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$ операции (31) являются соответственно булевыми дизъюнкцией $z_1=x_1\vee x_2$ и конъюнкцией $z_2=x_1\wedge x_2$. Отсюда следует, что КА устанавливает взаимосвязь между базовыми операциями двоичной булевой алгебры и логическими операциями (9) альтернативного выбора ($p_i \in \{0, 1\}$) одной из двух предметных переменных. При этом в рамках КА вскрывается взаимосвязь между булевыми дизъюнкцией и конъюнкцией (они связаны между собой через операцию взаимозамещения предметных переменных в базовых операциях КА).

В общем случае в (9) предметные переменные и коэффициенты p_i могут быть любыми математическими объектами, для которых определены операции умножения и сложения. В частности, в [10] разработана алгебра гипернионных чисел

$$z=y_1 1_1^n+y_2 1_2^n+\ldots+y_n 1_n^n, \quad \sum_{i=1}^{n} 1_i^n=1,$$

где 1_i^n ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) есть заданная базовая система «единиц» гипернионов, удовлетворяющих условию транзитивной комплементарности (20) и свойству ортогональности (26). Этим же условиям удовлетворяют весовые предикаты $\alpha_i^{(n)}$ ПАВ [4]. Однозначность тождественного повышения ранга гиперниона путем подстановки вида $1_i^n=1_i^{n+1}+1_{i+1}^{n+1}$ в [10] обеспечивается фиксацией типа суперпозиции (смешанная суперпозиция путем повторения правого и последующего левого фрагментов гипернионного графа его предыдущих ярусов). Отсюда следует, что i-й весовой предикат $\alpha_i^{(n)}$ n-арной предикатной дизъюнкции при использованном в [10] типе суперпозиции тождественно равен гипернионной «единице» 1_i^n i-го ранга, n-го порядка ($\alpha_i^{(n)}\equiv 1_i^n$), т. е. ПАВ включает в себя алгебру гипернионов. Таким образом, для алгебры гипернионов справедливы все законы и свойства ПАВ, а для ПАВ справедливы все свойства и понятия алгебры гипернионов. Отличие заключается лишь в том, что в алгебре гипернионов гипернионные единицы 1_i^n введены аксиоматически и рассматриваются как абстрактные математические объекты, а в ПАВ раскрыта структура весовых предикатов $\alpha_i^{(n)}$.

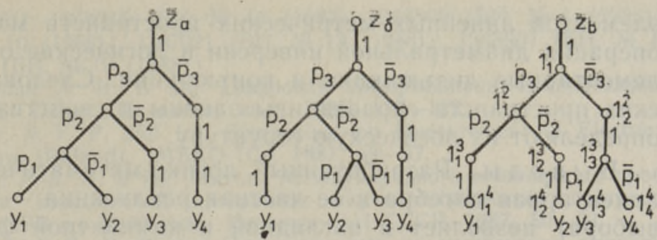
Последнее обстоятельство в рамках ПАВ позволяет установить существование $(n-1)!$ базовых систем «единиц» гипернионов, удовлетворяющих свойствам транзитивной комплементарности (20) и ортогональности (26). Действительно, рассмотрим все возможные типы суперпозиций при $n=4$, представленными на рис. 3 комплементарными графами (сигнальные графы Мэзона [11]). Графам по рис. 3, *а, б, в* соответствуют четырехместные дизъюнктивные функции

$$z_{\text{а}}=\sum_{i=1}^{4}\alpha_{i,\text{а}}^{(4)}y_i=y_1p_1p_2p_3+y_2\bar{p}_1p_2p_3+y_3\bar{p}_2p_3+y_4\bar{p}_3, \tag{32а}$$

$$z_{\text{б}}=\sum_{i=1}^{4}\alpha_{i,\text{б}}^{(4)}y_i=y_1p_2p_3+y_2p_1\bar{p}_2p_3+y_3\bar{p}_1\bar{p}_2p_3+y_4\bar{p}_3, \tag{32б}$$

$$z_{\text{в}}=\sum_{i=1}^{4}\alpha_{i,\text{в}}^{(4)}y_i=y_1p_2p_3+y_2\bar{p}_2\bar{p}_3+y_3p_1\bar{p}_3+y_4\bar{p}_1\bar{p}_3. \tag{32в}$$

Рис. 3.



а *б* *в*

Выражение (32а) соответствует системе уравнений (18). Каждому дизъюнктивному графу по рис. 3 соответствует конъюнктивный граф, полученный инверсией передач $\check{p}_j$ ветвей в исходном дизъюнктивном графе. Конъюнктивным графам соответствуют функции $z_г = \tilde z_а$, $z_д = \tilde z_б$ и $z_е = \tilde z_в$, полученные путем комплементарной инверсии функций (32). Таким образом, при $n=4$ существует шесть базовых систем «единиц» гипернионов, из которых в [10] использована система «единиц» соответствующая при $n=4$ функции $z_е = \tilde z_в$. Каждому узлу комплементарного графа может быть поставлена в соответствие гипернионная «единица» соответствующего ранга и порядка (рис. 3, *в*). При этом для узлов разветвления $1_i^j = 1_i^{j+1} + 1_{i+1}^{j+1}$, а для транзитных узлов $1_i^j = 1_i^{j+1}$.

В качестве другого примера рассмотрим многомерные векторные пространства. Пусть в m-мерном векторном пространстве заданы две точки (вектора) $\mathbf{y}_1 = (y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_1^{(m)})$, $\mathbf{y}_2 = (y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_2^{(m)})$ и скалярная величина $p_j \in [-\infty, \infty]$. Тогда уравнение прямой, проходящей через заданные точки $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ векторного пространства R^m будет определяться выражением $\mathbf{y} - \mathbf{y}_2 = p_i(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$, которое при $z_1 = \mathbf{y}$ приводится к выражению (9а). Отсюда следует, что комплементарные дизъюнкция (9а) и конъюнкция (9б) в многомерном векторном пространстве определяют множество прямых, проходящих через заданные пары точек $\mathbf{y}_i = (y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(m)})$ и $\mathbf{y}_j = (y_j^{(1)}, y_j^{(2)}, \ldots, y_j^{(m)})$. Если в выражении (17) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются точками многомерного векторного пространства R^m, то при всевозможных вещественных $\check{\alpha}_i$ уравнение (17) определяет линейное подпространство $R^n \in R^m$. При $\check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_2 + \ldots + \check{\alpha}_n = 1$ выражение (17) определяет многоместные комплементарные дизъюнкции и конъюнкции векторного пространства. Графики на рис. 1, *г* соответствуют комплементарным дизъюнкции (z_1) и конъюнкции (z_2) двухмерного пространства ($m=2$) при $p = \mathrm{var}$. Введенная выше операция инверсии может быть обобщена и на многомерные векторные пространства. Пусть $\mathbf{y}_0$ есть фиксированная точка многомерного пространства, являющаяся центром области определения предметных переменных — векторов $\mathbf{y}_j$ (m-мерный прямоугольник). Тогда любой точке $\mathbf{y}_i$ соответствует гиперсфера, все точки которой удалены на одинаковое расстояние $d(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_0)$ от центра $\mathbf{y}_0$, где d есть расстояние (метрика) между точками $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{y}_0$. Тогда любой точке $\mathbf{y}_i$ гиперсферы будет соответствовать инверсная ей точка $\bar{\mathbf{y}}_i$ на этой гиперсфере (точка пересечения гиперсферы с прямой, проходящей через точки $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{y}_0$). Следовательно, $\bar{\mathbf{y}}_i = \mathbf{y}_d + \mathbf{y}_i$, где $\mathbf{y}_d$ есть вектор, соединяющий точки пересечения гиперсферы с прямой, проходящей через точки $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{y}_0$. Если областью определения предметных переменных является все пространство R^m, то $\mathbf{y}_0 = 0$ и $\bar{\mathbf{y}}_i = -\mathbf{y}_i$, т. е. при инверсии изменяется только направление вектора $\mathbf{y}_i$. Из изложенного следует, что на множествах элементов линейных метрических пространств могут быть определены операция диаметральной инверсии и логические операции (9) — комплементарные дизъюнкция и конъюнкция. Следовательно для метрических пространств справедливы законы и свойства (10)—(27), которые определяют их логическую структуру.

Выводы. Разработанный логико-математический аппарат (комплементарная алгебра и ее частная реализация — предикатная алгебра выбора) позволяет в наглядной и компактной форме представить в единой аналитической записи широкий набор типовых и нетиповых нелинейных (изломных и разрывных) функций и аналоговых логических операций — операции взвешенного суммирования и осреднения двух и нескольких переменных, операции выбора одной переменной из двух или нескольких переменных, операции группового выбора m из n переменных и операции сортировки переменных, операции n-значных логик и непрерывной логики, операции ранжирования переменных, операции последовательного и параллельного выделения порядковых статистик и др.

Для синтеза аналоговых электрических цепей и систем с использованием изложенного логико-математического аппарата необходима разработка соответствующей элементной базы, воспроизводящей элементарные операции КА, ПАВ и НЛ. Такие аналоговые логические элементы разработаны и названы автором реляторами [4, 6, 12–15]. В элементном базисе реляторов возможно построение широкой номенклатуры аналоговых логических, функциональных, вычислительных, измерительных, управляющих и коммутационных преобразователей, аналоговых спецпроцессоров без промежуточных преобразований в цифровой код, систем сбора, сжатия и обработки аналоговой информации [4, 6, 15–23].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург С. А.* Математическая непрерывная логика и изображение функций. М., «Энергия», 1968.
2. *Волгин Л. И.* В кн.: Технические средства измерительно-вычислительных комплексов. Таллин, АН ЭССР, 1986, 61—69.
3. *Левин В. И.* Структурно-логические методы исследования сложных систем с применением ЭВМ. М., «Наука», 1987.
4. *Волгин Л. И.* В кн.: Опыт, результаты, проблемы: Повышение конкурентоспособности радиоэлектронной аппаратуры. Вып. 4. Таллин, «Валгус», 1986, 64—104.
5. *Яглом И. М.* Булева структура и ее модели. М., «Сов. радио», 1980.
6. *Волгин Л. И.* В кн.: Повышение конкурентоспособности радиоэлектронной аппаратуры: Опыт, результаты, проблемы. Вып. 5. Таллин, «Валгус», 1988, 95—154.
7. *Нетушил А. В., Бурляев В. В.* Изв. вузов. Радиоэлектроника, № 5, 266—276 (1972).
8. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев, «Наукова думка», 1982.
9. *Волгин Л. И.* В кн.: Методы и средства измерения, преобразования и обработки информации. Таллин, АН ЭССР, 1987, 39—55.
10. *Беркович Е. И.* В кн.: Методы и средства аналоговой и цифровой обработки информации. Таллин, АН ЭССР, 1988, 154—161.
11. *Мэзон С., Циммерман И. Г.* Электронные цепи, сигналы и системы. М., Изд-во ИЛ, 1963.
12. *Волгин Л. И.* В кн.: Методы и устройства цифровой и аналоговой обработки информации. Воронеж, Политехн. ин-т, 1987, 102—106.
13. *Волгин Л. И.* Изв. АН СССР. Техн. киберн., № 5, 75—79 (1987).
14. *Волгин Л. И., Ефимов А. В., Зарукин А. И.* Радиотехника, № 10, 23—26 (1987).
15. *Волгин Л. И. и др.* Авт. свид-ва СССР: 1251114 (опубл. в БИ № 30 (1986)), 1262531 (БИ, № 37 (1986)), 1270777 (БИ, № 42 (1986)), 1278898 (БИ, № 47 (1986)), 1278902 (БИ, № 47 (1986)), 1288723 (БИ, № 5 (1987)), 1288724 (БИ, № 5 (1987)), 1298779 (БИ, № 11 (1987)), 1300507 (БИ. № 12 (1987)), 1305726 (БИ, № 15 (1986)), 1322325 (БИ, № 25 (1987)), 1324040 (БИ, № 26 (1987)), 1325519 (БИ, № 27 (1987)), 1325524 (БИ, № 27 (1987)), 1336050

(БИ, № 33 (1987)), 1354215 (БИ, № 43 (1987), 1365099 (БИ, № 1 (1988)), 1381548 (БИ, № 10 (1988)), 1387021 (БИ, № 13 (1988)), 1388907 (БИ, № 14 (1988)), 1397944 (БИ, № 19 (1988)).

16. *Волгин Л. И., Зарукин А. И.* В кн.: Цифровая информационно-измерительная техника. Вып. 15. Пенза, Политехн. ин-т, 1985, 117—122.
17. *Volgin, L. I., Rebane, R.-V. P.* 2nd Int. Symposium on Measurement of Electrical Quantities. Warsaw (Poland), IMEKO-TC4. 1987, 49—57.
18. *Волгин Л. И., Ребане Р.-В. П.* В кн.: Мат-лы Международного семинара по проблеме реализации комплексной программы научно-технического прогресса стран — членов СЭВ до 2000 года. Кишинев, АН СССР, 1987, 50—53.
19. *Волгин Л. И., Ребане Р.-В. П.* В кн.: Проектирование и диагностика вычислительных средств. Таллин, «Валгус», 1987, 92—105.
20. *Волгин Л. И.* Электронное моделирование, № 2, 3—9 (1988).
21. *Волгин Л. И.* В кн.: Тез. докл. второй секции республ. научно-техн. конф. «Применение микропроцессоров в народном хозяйстве». Таллин, НТОРЭС им. А. С. Попова, 1988, 3—12.
22. *Волгин Л. И., Булдаков О. Б.* В кн.: Методы и средства аналоговой и цифровой обработки информации. Таллин, АН ЭССР, 1988, 30—43.
23. *Волгин Л. И.* В кн.: Цифровая информационно-измерительная техника. Вып. 18. Пенза, Политехн. ин-т, 1988, 12—16.

СКБ вычислительной техники
Института кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
10/VII 1987

L. VOLGIN

KOMPLEMENTAARALGEBRA OMADUSED JA SEADUSED

On näidatud, et sama ruutvõrrandi juured genereerivad erinevate koefitsientide väärtuste puhul erisuguste algebrate põhioperatsioonid: *R*-disjunktsiooni ja *R*-konjunktsiooni, s. o. predikaatvaliku algebra ja pideva algebra põhioperatsioonid, Boole'i disjunktsiooni ja konjunktsiooni jm.

On välja arendatud komplementaaralgebra (põhioperatsioonid: komplementaardisjunktsioon ja komplementaarkonjunktsioon). Selle alla kuuluvad (erijuhuna) predikaatvaliku algebra ja pidev loogika, mis on vaadeldavad Boole'i algebra üldistustena. Komplementaaralgebra põhioperatsioonidest tulenevad kahe individuaalmuutuja kaalutud summeerimise ja keskväärtuse leidmise operatsioonid; predikaatvaliku algebra põhioperatsioonidest tulenevad ühe individuaalmuutuja alternatiivse valiku operatsioonid kahe muutuja hulgast. Artiklis on tuletatud komplementaaralgebra omadused ja seadmed.

Saadud matemaatilis-loogiline aparaat võimaldab tuletada laia valiku binaarseid ja mitmeväärtuslikke analoogloogika operatsioone ning ebalineaarseid (murd- ja katkend)-funktsioone ja annab analoogiliste ning funktsionaalsete muundurite formaalse tuletusviisi realiseerituna relaatorite elementbaasil.

L. VOLGIN

PROPERTIES AND LAWS OF COMPLEMENTARY ALGEBRA

The paper shows that the basic operations of several algebraic systems are generated by radices of the same quadratic equation at different values of its coefficients: the *R*-disjunction and *R*-conjunction, i. e. the basic operations of predicate algebra of selection (PAS) and continuous logic, the Boolean disjunction and conjunction, and others.

Complementary algebra (CA) has been developed (basic operations: complementary disjunction and complementary conjunction); it comprises (as a special case) the predicate algebra of selection and continuous logic, which can be considered as a generalization of binary Boolean algebra. The basic operations of CA implement the operations of weighted adding and averaging of two individual variables, the basic operations of PAS implement the operations of alternative selection of one individual variable out of two. Properties and laws of CA and PAS are deduced in the paper.

The developed mathematical-logical procedures generate a wide assortment of binary and *n*-ary logic analog operations and non-linear (broken and discontinuous) functions, enabling to produce by formal methods logical and functional converters employing relators in the role of basic components.