EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1988, 37, 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1988.4.01

УДК 517.986.2

М. АБЕЛЬ, А. КОКК

ЛОКАЛЬНО ПСЕВДОВЫПУКЛЫЕ АЛГЕБРЫ ГЕЛЬФАНДА—МАЗУРА

(Представил Г. Вайникко)

§ 1. Введение

1.1. Пусть $\mathbf{K}$ — поле $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$ и A — *топологическая* $\mathbf{K}$-*алгебра*, т. е. линейное топологическое пространство над $\mathbf{K}$, в котором определено умножение элементов, относительно которого оно является ассоциативной алгеброй, и в топологии которого рассматриваемое умножение (как билинейное отображение $A\times A$ в A) раздельно непрерывно. В частном случае, когда умножение элементов алгебры A непрерывно в совокупности, A называется *топологической* $\mathbf{K}$-*алгеброй с непрерывным умножением*. В дальнейшем вместо «топологическая $\mathbf{C}$-алгебра» будем писать коротко «топологическая алгебра».

Топологическая алгебра A называется

Q-алгеброй, если множество $\operatorname{Qinv} A$ квазиобратимых элементов * алгебры A открыто в A;

алгеброй с непрерывным квазиобратным, если существует окрестность нуля алгебры A, все элементы которой квазиобратимы в A, и в которой отображение $a\to a_q$ (как отображение $\operatorname{Qinv} A$ на $\operatorname{Qinv} A$) непрерывно в точке θ_A (здесь θ_A обозначает нулевой элемент алгебры A);

алгеброй Фреше, если на A можно определить инвариантную метрику так, что топология, порожденная этой метрикой, полна и совпадает с исходной топологией алгебры A;

локально псевдовыпуклой (*локально выпуклой*), если топология на ней определена семейством $P_A=\{p_\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}\}$ непрерывных k_α-однородных (здесь $0<k_\alpha\leqslant 1$ для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$) полунорм (соответственно, непрерывных полунорм);

локально m-псевдовыпуклой (*локально m-выпуклой*), если она локально псевдовыпукла (соответственно, локально выпукла) и каждая $p_\alpha\in P_A$ удовлетворяет условию

$$p_\alpha(ab)\leqslant p_\alpha(a)\,p_\alpha(b)$$

для всех a, $b\in A$;

локально поглощенно псевдовыпуклой (*локально поглощенно выпуклой*), если она локально псевдовыпукла (соответственно, локально

---

* Элемент $a\in A$ называется *квазиобратимым* в A, если существует элемент $a_q\in A$ такой, что $a+a_q-aa_q=a+a_q-a_qa=\theta_A$.

выпукла) и для каждой полунормы $p_\alpha \in P_A$ и каждого элемента $a \in A$ существуют числа $M(\alpha, a)$, $N(\alpha, a) > 0$ такие, что

$$p_\alpha(a'a) \leqslant M(\alpha, a) p_\alpha(a')$$

и

$$p_\alpha(aa') \leqslant N(\alpha, a) p_\alpha(a')$$

для каждого $a' \in A$.

1.2. В 1938 г. вышла из печати статья С. Мазура [1], в которой среди остальных результатов было отмечено (но без доказательства), что каждая нормированная **R**-алгебра с делением топологически изоморфна полю **R**, полю **C** или телу кватернионов. Затем в 1939 г. в [2] И. М. Гельфанд утверждал, что каждая коммутативная банахова **C**-алгебра с делением топологически изоморфна полю **C**. Доказательство этого результата он опубликовал в 1941 г. [3]. После опубликования упомянутых работ появились статьи, в которых эти результаты обобщались на разные классы топологических алгебр, более общих, чем нормированные. Но так как первые результаты такого характера были получены С. Мазуром и И. М. Гельфандом, топологические алгебры A, обладающие свойством

(GM), *если алгебра A содержит замкнутые регулярные двусторонние идеалы, являющиеся максимальными как левые и как правые идеалы, то факторалгебра A/M по каждому такому идеалу M алгебры A является топологически изоморфной полю* **C**,

будем называть *алгебрами Гельфанда—Мазура* (ср. [4], с. 308) (в дальнейшем кратко *GM-алгебрами*).

В 1947 г. Р. Аренс показал, что все отделимые локально выпуклые алгебры с делением, обращение элементов в которых (как отображение $a \to a^{-1}$ на множестве обратимых элементов $\operatorname{Inv} A$ алгебры A) непрерывно, и все сепарабельные локально выпуклые алгебры Фреше с делением являются GM-алгебрами (см. [5], а также [6], с. 483). Далее, Г. Р. Аллан [7] доказал, что GM-алгебрами являются и отделимые локально выпуклые алгебры с делением, удовлетворяющие условию

(α) *для каждого $a \in A$ существует такое $\lambda_a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, что последовательность $((\lambda_a^{-1} a)^n)$ сходится к нулю в алгебре A.*

(Аналогичный результат получил позднее и Дж. Э. Симпсон [8]). Затем М. П. Тюпан [9] обобщил результат Г. Р. Аллана на случай отделимых локально псевдовыпуклых алгебр с делением, удовлетворяющих условию (α), а Л. Вальбрук [10] (с. 153) (см. также [11]), в свою очередь, обобщил результат Р. Аренса на случай отделимых локально псевдовыпуклых алгебр с делением, в которых обращение элементов непрерывно. В работах М. П. Тюпана и Л. Вальбрука было предположено, что умножение элементов в рассматриваемых алгебрах является непрерывным. Оказывается (см. теорему 3.1 настоящей статьи), что такие результаты можно получить и без этого дополнительного предположения.

1.3. Пусть A — топологическая алгебра, $\mathfrak{M}_l(A)$ ($\mathfrak{M}_r(A)$) — множество всех максимальных регулярных левых (соответственно, правых) идеалов алгебры A и $\mathfrak{M}_c(A)$ — подмножество замкнутых идеалов в $\mathfrak{M}_l(A) \cap \mathfrak{M}_r(A)$. Кроме того, пусть $\operatorname{hom} A$ — множество всех нетривиальных непрерывных **C**-гомоморфизмов на A. В общем случае множества $\mathfrak{M}_c(A)$ и $\operatorname{hom} A$ могут оказаться пустыми. Легко видеть, что в случае GM-алгебр эти множества пусты или непусты одновременно. Поскольку в теории топологических алгебр непустота множества $\operatorname{hom} A$ играет значительную роль (ведь в этом случае становится возможным развивать гельфандовскую теорию о представлении топологических алгебр в виде алгебр непрерывных функций), то представляет интерес рассматривать класс тех $\bar{G}M$-алгебр, для которых множество $\mathfrak{M}_c(A)$ непусто. В дальнейшем такие топологические алгебры будем называть *строго GM-алгебрами.*

Целью данной статьи является описание некоторых классов локально псевдовыпуклых GM-алгебр и выделение из этих классов строго GM-алгебр.

§ 2. Вспомогательные результаты

Для описания некоторых классов GM-алгебр нужны следующие результаты.

Лемма 2.1. *Пусть A — отделимая локально псевдовыпуклая алгебра с единицей e_A. Если выполнено одно из условий*

а) *алгебра A обладает свойством* (α)

или

б) *алгебра A является алгеброй с непрерывным квазиобратным, то спектр* $\sigma(a)=\{\lambda\in \mathbf{C}:(a-\lambda e_A)\notin \operatorname{Inv} A\}$ *каждого элемента $a\in A$ непуст.*

Доказательство см. в [12].

Лемма 2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *в локально т-псевдовыпуклых алгебрах с единицей обращение элементов непрерывно,*

б) *каждая отделимая поглощенно псевдовыпуклая алгебра с единицей имеет отделимую локально т-псевдовыпуклую топологию, которая сильнее исходной топологии,*

в) *каждая локально поглощенно псевдовыпуклая алгебра Фреше является локально т-псевдовыпуклой алгеброй.*

Доказательство. а) Пусть A — локально m-псевдовыпуклая алгебра с единицей, топология которой определена семейством $\{p_\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}\}$ непрерывных k_α-однородных субмультипликативных полунорм. Для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$ положим $A_\alpha=A/\ker p_\alpha$ и обозначим через π_α естественный гомоморфизм A на факторалгебру A_α. Тогда для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$ отображение q_α, определяемое на A_α равенством $q_\alpha(\pi_\alpha(a))=p_\alpha(a)$, является k_α-однородной субмультипликативной нормой на A_α. Значит, A_α является отделимой локально ограниченной алгеброй (см. [13], с. 8), в которой k_α-однородная норма q_α удовлетворяет условию $q_\alpha(xy)\leqslant q_\alpha(x)q_\alpha(y)$ для всех x, $y\in A_\alpha$. Поэтому (см. [13], с. 18) обращение элементов в алгебре A_α непрерывно для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $a_0\in\operatorname{Inv}A$ и $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\subset\operatorname{Inv}A$ — сеть, сходящаяся к a_0. Тогда, ввиду непрерывности отображения π_α, сеть $(\pi_\alpha(a_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к $\pi_\alpha(a_0)$ для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$. Так как $\pi_\alpha(a_0)$, $\pi_\alpha(a_\lambda)\in\operatorname{Inv}A$ и $\pi_\alpha(a^{-1})=(\pi_\alpha(a))^{-1}$ для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$ и $a\in\operatorname{Inv}A$, то в силу непрерывности обращения элементов в A_α, сеть $(\pi_\alpha(a_\lambda^{-1}))_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к $\pi_\alpha(a_0^{-1})$. Учитывая это, сеть $(p_\alpha(a_\lambda^{-1}-a_0^{-1}))_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к нулю для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$. Поэтому $(a_\lambda^{-1})_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к a_0^{-1} в топологии алгебры A. Значит, обращение элементов в алгебре A непрерывно.

б) Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 в [14] (с. 144—145).

в) Пусть A — локально поглощенно псевдовыпуклая алгебра Фреше и $T\subset A$ — псевдобочка в A (т. е. замкнутое закругленное поглощенное псевдовыпуклое ** подмножество). Так как $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT$ (ввиду поглощенности множества T), то по теореме Бэра (см., напр., [15], с. 27) существуют элемент $a_0 \in A$ и открытое множество $V_0 \subset A$ такие, что $a_0 \in V_0 \subset T$. Пусть теперь $\lambda > 0$ такое, что $T + T \subset \lambda T$ и f — отображение A на A, определяемое равенством $f(a) = (a - a_0)/2\lambda$ для каждого $a \in A$. Тогда f является гомеоморфизмом A на A и справедливо $f(V_0) \subset T$. Поскольку $\theta_A = f(a_0) \in f(V_0)$ и $f(V_0)$ открыто в A, то T является окрестностью нуля алгебры A. Значит, любая псевдобочка алгебры A является окрестностью нуля. Таким образом, по теореме 2.22 из [16] A является m-псевдовыпуклой алгеброй.

Л е м м а 2.3. *Пусть A — Q-алгебра, B — топологическая алгебра и π — открытый гомоморфизм A на B. Тогда B является Q-алгеброй.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично случаю, когда алгебра A имеет единицу (см. [17], с. 290).

Л е м м м а 2.4. *Пусть A — топологическая алгебра с непрерывным квазиобратным и $I \subset A$ — замкнутый двусторонний идеал. Тогда факторалгебра A/I (в фактортопологии) является топологической алгеброй с непрерывным квазиобратным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично случаю алгебр с единицей (см. [18], с. 58—59).

В дальнейшем будем рассматривать следующие классы топологических алгебр:

K_1 — *класс всех локально псевдовыпуклых алгебр, удовлетворяющих условию* (α),

K_2 — *класс всех локально псевдовыпуклых алгебр с непрерывным квазиобратным,*

K_3 — *класс всех локально поглощенно псевдовыпуклых алгебр,*

K_4 — *класс всех локально псевдовыпуклых алгебр Фреше,*

K_5 — *класс всех локально m-псевдовыпуклых алгебр с единицей.*

Л е м м а 2.5. *Если $A \in K_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$) и $I \subset A$ — замкнутый двусторонний идеал, то факторалгебра $A/I \in K_i$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — локально псевдовыпуклая алгебра и π — естественный гомоморфизм A на A/I. Тогда A имеет базу β_A закругленных псевдовыпуклых окрестностей нуля. Так как $\beta_{A/I} = \{\pi(U) : U \in \beta_A\}$ образует базу окрестностей нуля в фактортопологии алгебры A/I и каждое множество $\pi(U)$ ($U \in \beta_A$) закруглено и псевдовыпукло, то факторалгебра A/I является отделимой локально псевдовыпуклой алгеброй (см. [19], с. 4). При этом $A/I \in K_5$, если $A \in K_5$. Кроме того, A/I удовлетворяет условию (α) (является алгеброй с непрерывным квазиобратимым или алгеброй Фреше), если алгебра A удовлетворяет условию (α) (соответственно, является алгеброй с непрерывным квазиобратным или алгеброй Фреше).

Пусть теперь $A \in K_3$. Тогда она имеет базу окрестностей нуля β'_A, состоящую из тех $U \in \beta_A$, которые удовлетворяют условию

(β) *для каждого $a_0 \in A$ существуют $\lambda, \mu \geqslant 0$ такие, что $a_0 U \subset \lambda U$ и $U a_0 \subset \mu U$.*

Поскольку $\pi(U)$ обладает этим свойством для каждого $U \in \beta'_A$, то $A/I \in K_3$ (см. [16], с. 54).

§ 3. Некоторые классы GM-алгебр

Во-первых, рассмотрим случай локально псевдовыпуклых GM-алгебр с делением.

** Множество U называется *псевдовыпуклой*, если $U + U \subset \lambda U$ для некоторого числа $\lambda > 0$.

Теорема 3.1. *Пусть A — отделимая локально псевдовыпуклая алгебра с делением. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

а) *алгебра A топологически изоморфна полю* $\mathbf{C}$,

б) *каждый элемент алгебры A имеет непустой спектр,*

в) *алгебра A обладает свойством* (α),

г) *обращение элементов в алгебре A непрерывно.*

Доказательство. Импликация в)$\Rightarrow$б), а также г)$\Rightarrow$б) (так как каждая отделимая алгебра с делением, обращение элементов которой непрерывно, является алгеброй с непрерывным квазиобратным) имеют место по лемме 2.1.

б)$\Rightarrow$а). По условию б) каждый элемент $a\in A$ определяет число $\lambda_a\in\mathbf{C}$ такое, что $a=\lambda_a e_A$. (Если это не так, то $a-\lambda e_A\in\operatorname{Inv}A$ для всех $\lambda\in\mathbf{C}$, что невозможно). Легко заметить, что отображение $\tau: a\to\lambda_a$ является изоморфизмом A на $\mathbf{C}$. Чтобы показать непрерывность отображения τ, берем любую окрестность нуля O в $\mathbf{C}$. Тогда $O_\varepsilon=\{\lambda\in\mathbf{C}: |\lambda|<\varepsilon\}\subset O$ для некоторого $\varepsilon>0$. Если $\lambda\in O_\varepsilon\backslash\{0\}$, то (в силу отделимости алгебры A) существует закругленная окрестность нуля $V\subset A$ такая, что $\lambda e_A\notin V$. Теперь из $a\in V$ вытекает $\lambda_a\in O_\varepsilon$. В самом деле, если $a\in V$ и $|\lambda_a|\geqslant\varepsilon$, то $|\lambda\lambda_a^{-1}|\leqslant 1$, в силу чего $\lambda e_A=(\lambda\lambda_a^{-1})a\in V$. Но это невозможно. Значит, отображение τ непрерывно в точке $a=\theta_A$ и, следовательно, на A. Кроме того, τ^{-1} является непрерывным на $\mathbf{C}$, ибо $\tau^{-1}(\lambda)=\lambda e_A$ для всех $\lambda\in\mathbf{C}$.

а)$\Rightarrow$в). Пусть τ — топологический изоморфизм A на $\mathbf{C}$, $a\in A$ — любой элемент и $\lambda\in\mathbf{C}$ — такое число, что $|\tau(a)|<\lambda$. Тогда последовательность $\alpha_n=(\lambda^{-1}(\tau(a)))^n$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Поэтому последовательность $(\lambda^{-1}a)^n=\tau^{-1}(\alpha_n)$ сходится к нулю в алгебре A.

а)$\Rightarrow$г). Пусть ε_A — отображение, определяемое на $A\backslash\{\theta_A\}$ равенством $\varepsilon_A(a)=a^{-1}$. Так как $\varepsilon_A=\tau^{-1}\circ\varepsilon_{\mathbf{C}}\circ\tau$, то ε_A (как композиция непрерывных отображений) непрерывно на $A\backslash\{\theta_A\}$.

Теорема доказана.

Поскольку квазиобращение элементов в алгебре Фреше с делением непрерывно (см. [13], с. 7), то по теореме 3.1 справедливо

Следствие 3.1. *Каждая локально псевдовыпуклая алгебра Фреше с делением топологически изоморфна полю* $\mathbf{C}$.

Теорема 3.2. *Каждая отделимая поглощенно псевдовыпуклая алгебра с делением топологически изоморфна полю* $\mathbf{C}$.

Доказательство. Пусть A — отделимая поглощенно псевдовыпуклая алгебра с делением. Тогда на ней существует отделимая локально m-псевдовыпуклая топология (по лемме 2.2 б)). Поэтому существует изоморфизм τ алгебры A на $\mathbf{C}$ (по лемме 2.2 а) и по теореме 3.1), непрерывность которого и его обратного можно показать точно так же, как и в доказательстве теоремы 3.1.

Частный случай теоремы 3.2, когда рассматриваемая алгебра является локально выпуклой, был приведен без доказательства в [20] (см. также [21], с. 495), а доказан в статье [14] (с. 141—145) и в диссертации [22].

Следующая теорема дает описание некоторых классов локально псевдовыпуклых GM-алгебр.

Теорема 3.3. *Каждая топологическая алгебра из класса* K_i ($i=1, 2, 3, 4$) *является GM-алгеброй.*

Доказательство. Пусть $A\in\mathrm{K}_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) и $M\in\mathfrak{M}_C(A)$. Тогда A/M является отделимой алгеброй с делением, которая принадлежит классу K_i (по лемме 2.5). Следовательно (по теореме 3.1), факторалгебра A/M топологически изоморфна полю $\mathbf{C}$. Значит, A является GM-алгеброй.

Примечание 3.1. В работах [23], [24] (с. 214—217), [13] (с. 83—87), [25] (с. 127) и [19] (с. 141—148) приведены примеры топологических алгебр с делением (в том числе алгебр с непрерывным квазиобратным и алгебр Фреше), которые не являются топологически изоморфными полю $\mathbf{C}$. Таким образом, утверждения теоремы 3.3 необязательно справедливы, если рассматриваемые в ней алгебры не являются локально псевдовыпуклыми.

Примечание 3.2. Приведем теперь некоторые примеры, показывающие, что классы топологических алгебр, указанные в теореме 3.3, не совпадают.

1. **Алгебра** $(C(X), k)$. Пусть X — тихоново пространство и $(C(X), k)$ — алгебра непрерывных $\mathbf{C}$-значных функций на X, наделенное топологией компактной сходимости. Известно (см. [24], с. 63—64 и 204—205), что $(C(X), k)$ является алгеброй Фреше тогда и только тогда, когда X является хемикомпактным k-пространством, и алгеброй с непрерывным квазиобратным тогда и только тогда, когда пространство X компактно. Кроме того известно (см. [24], с. 342), что алгебра $(C(X), k)$ не удовлетворяет условию (α), если пространство X не является псевдокомпактным.

2. **Алгебра** $(C_b(X), \beta)$. Пусть X — отделимое топологическое пространство, $C_b(X)$ — алгебра непрерывных ограниченных $\mathbf{C}$-значных функций на X и $B_0(X)$ — алгебра ограниченных $\mathbf{C}$-значных функций на X с компактным носителем. Алгебру $C_b(X)$, наделенную топологией β (т. е. топологией, предбазу окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\Phi, \varepsilon) = \{f \in C_b(X) : |\Phi(x) f(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in X\},$$

где $\varepsilon > 0$ и $\Phi \in B_0(X)$), обозначим через $(C_b(X), \beta)$. Легко заметить, что $(C_b(X), \beta)$ является поглощенно псевдовыпуклой алгеброй, удовлетворяющей условию (α). При этом эта алгебра метризуема (по теоремам 3.4 и 3.5 из [26]) тогда и только тогда, когда X компактно.

3. **Алгебра** $L^\omega[0, 1]$. Пусть $L^\omega[0, 1]$ — множество классов эквивалентности интегрируемых функций f на $[0, 1]$ таких, что

$$p_n(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^n \, dx\right)^{1/n} < \infty$$

для каждого $n \in \mathbf{N}$. Тогда $L^\omega[0, 1]$ является локально выпуклой алгеброй Фреше относительно поточечных алгебраических операций и топологии, определенной семейством полунорм $\{p_n : n \in N\}$.

Известно, что алгебра $L^\omega[0, 1]$ удовлетворяет условию (α) (см. [27], с. 130) и не является поглощенно псевдовыпуклой алгеброй (по лемме 2.2 в)), ибо обращение элементов в локально m-псевдовыпуклых алгебрах с единицей непрерывно (по лемме 2.2 а)), а в алгебре $L^\omega[0, 1]$ нет (см. [28] или [29], с. 145).

4. **Алгебра** D. Пусть D — векторное пространство всех комплексных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N})$ с компактным носителем и $k = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{N}$. Пусть далее пространство $\mathbf{R}^n$ представлено в виде объединения счетного семейства подмножеств G_m $(m \in \mathbf{N})$ таких, что G_m содержится во внутренности G_{m+1} для каждого $m \in \mathbf{N}$. Через $D(G_m)$ обозначим векторное подпространство всех комплексных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}^n$ с носителем G_m. Определим на $D(G_m)$ топологию при помощи семейства полунорм $\{p_m : m \in \mathbf{N}\}$, где для каждого $f \in D(G_m)$

$$p_m(f)=\sup\{|d^k(f(x))| : x\in G_m, \quad 0\leqslant|k|\leqslant m\},$$

$$d^k(f)=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial^{k_1}x_1\partial^{k_2}x_2\ldots\partial^{k_m}x_m}$$

и

$$|k|=k_1+k_2+\ldots+k_m.$$

Кроме того, определим умножение элементов в D поточечно и наделим его индуктивной топологией относительно семейства $D(G_m)$. Тогда D является локально m-выпуклой Q-алгеброй (см. [30], с. 77), которая не метризуема (см. [29], с. 146).

Соотношения между классами K_i с $i=1$, 2, 3, 4 иллюстрирует таблица (при этом в клетках K_i, K_j указаны топологические алгебры, которые принадлежат к классу K_i, а не к классу K_j при $i\neq j$).

	K_1	K_2	K_3	K_4
K_1		$L^\omega[0, 1]$	$L^\omega[0, 1]$	$(C_b(X), \beta)$ X не компактно
K_2	?		?	D
K_3	$(C(X), k)$ X не псевдокомпактно	$(C(X), k)$ X не компактно		$(C_b(X), \beta)$ X не компактно
K_4	$(C(X), k)$ X не псевдокомпактно, а хемикомпактное k-пространство	$L^\omega[0, 1]$	$L^\omega[0, 1]$	

Закончим параграф некоторыми проблемами.

1. Известно, что каждая отделимая локально выпуклая алгебра с единицей и с непрерывным квазиобратным и каждая равномерно поглощенно выпуклая алгебра (т. е. такая локально поглощенно выпуклая алгебра, для которой числа $M(\alpha, a)$ и $N(\alpha, a)$, определенные выше, не зависят от $\alpha\in\mathfrak{A}$) удовлетворяют условию (α) (см. [31], а также [9] и [32], с. 851). При этом не известно, существуют или не существуют локально псевдовыпуклые алгебры с непрерывным квазиобратным, которые не удовлетворяют условию (α)?

2. Как показано в [33] (с. 163), каждая локально поглощенно выпуклая алгебра Фреше является локально m-выпуклой. Поэтому полная отделимая локально ограниченная алгебра, неявляющаяся локально m-выпуклой, служит примером локально псевдовыпуклой алгебры с непрерывным квазиобратным, которая не является локально поглощенно выпуклой алгеброй (пример такой алгебры приведен в [34], с. 337). Возникает вопрос, существуют ли локально псевдовыпуклые алгебры с непрерывным квазиобратным, которые не являются локально поглощенно псевдовыпуклыми?

Известно (см. [19], с. 123), что каждая коммутативная локально выпуклая алгебра с единицей и с непрерывным квазиобратным является локально m-выпуклой. Если аналогичный результат справедлив и в случае всех локально псевдовыпуклых алгебр, то ответ на этот вопрос был бы отрицательный.

§ 4. Строго GM-алгебры

Пусть A — топологическая алгебра и $\operatorname{comm} A$ — замыкание коммутаторного идеала алгебры A, т. е. замыкание двустороннего идеала алгебры A порожденного множеством $\{ab-ba : a, b \in A\}$. Ясно, что $\operatorname{comm} A = \{\theta_A\}$ для отделимых коммутативных топологических алгебр A, а $\operatorname{comm} A = A$ для простых некоммутативных топологических алгебр A. В дальнейшем мы изучаем значение условия $\operatorname{comm} A \neq A$ в GM-алгебрах.

Предложение 4.1. *Если A — строго GM-алгебра, то* $\operatorname{comm} A \neq A$.

Доказательство. Пусть A — строго GM-алгебра, идеал $M \in \mathfrak{M}_c(A)$, π — естественный гомоморфизм A на A/M и τ — топологический изоморфизм A/M на $\mathbf{C}$. Тогда $\Lambda = \tau \circ \pi \in \operatorname{hom} A$ и, поскольку $\operatorname{comm} A \subset \ker \Lambda$, то $\operatorname{comm} A \neq A$.

Теорема 4.1. *Пусть A — GM-алгебра с единицей, которая является Q-алгеброй. Тогда A является строго GM-алгеброй тогда и только тогда, когда* $\operatorname{comm} A \neq A$.

Доказательство. Пусть A — GM-алгебра с единицей, которая является Q-алгеброй и удовлетворяет условию $\operatorname{comm} A \neq A$. Тогда существует идеал $M \in \mathfrak{M}_l(A)$ такой, что $\operatorname{comm} A \subset M$. Но так как $am - ma \in M$ при всех $m \in M$ и $a \in A$, то M является двусторонним идеалом. Отсюда ясно, что $M \in \mathfrak{M}_r(A)$. Так как в Q-алгебрах максимальные идеалы замкнуты (см. [30], с. 77), то $M \in \mathfrak{M}_c(A)$. Значит, множество $\mathfrak{M}_c(A)$ непусто.

Обратное утверждение справедливо по предложению 4.1.

Из теоремы 4.1 вытекает, что каждая алгебра A с единицей из класса K_2 является строго GM-алгеброй тогда и только тогда, когда $\operatorname{comm} A \neq A$. Но в случае алгебр из классов K_1 и K_4 это утверждение не обязательно справедливо, поскольку алгебра $L^{\omega}[0, 1] \in K_1 \cap K_4$ и множество $\operatorname{hom} L^{\omega}[0, 1]$ пусто (см. [29], с. 146).

Теорема 4.2. *Топологическая алгебра $B \in K_5$ является строго GM-алгеброй тогда и только тогда, когда* $\operatorname{comm} B \neq B$.

Доказательство. Пусть $B \in K_5$, $\operatorname{comm} B \neq B$ и π — естественный гомоморфизм B на $A = B/\operatorname{comm} B$. Тогда по лемме 2.5 алгебра $A \in K_5$.

Пусть теперь $P_A = \{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — семейство k_α-однородных субмультипликативных полунорм, определяющее топологию алгебры A, и $\alpha \in \mathfrak{A}$. Пусть далее факторалгебра A_α и гомоморфизм π_α такие же, как в доказательстве леммы 2.2, а $\bar{A}_\alpha$ — пополнение алгебры A_α и $\delta : A_\alpha \to \bar{A}_\alpha$ — топологический изоморфизм, полученный при пополнении алгебры A_α. Тогда множество $\operatorname{hom} \bar{A}_\alpha$ непусто (см. [13], с. 22).

Пусть $\Lambda \in \operatorname{hom} \bar{A}_\alpha$ и $\Lambda_1 = \Lambda \circ \delta \circ \pi_\alpha \circ \pi$. Тогда $\Lambda_1 \in \operatorname{hom} B$ и поэтому $\ker \Lambda_1 \in \mathfrak{M}_C(B)$. Значит, B является строго GM-алгеброй (по теореме 3.3).

Обратное утверждение справедливо по предложению 4.1.

Из теорем 4.1 и 4.2 вытекает

Следствие 4.1. *Пусть A — топологическая алгебра с единицей. Если $A \in K_2 \cup K_5$, то $\operatorname{hom} A$ непусто тогда и только тогда, когда* $\operatorname{comm} A \neq A$.

Пусть теперь A — отделимая локально поглощенно псевдовыпуклая алгебра с единицей, удовлетворяющая условию $\operatorname{comm} A \neq A$. Тогда по лемме 2.2 б) на A существует отделимая локально m-псевдовыпуклая топология τ, которая сильнее исходной топологии алгебры A. Поскольку замыкание коммутаторного идеала в топологии τ принадлежит $\operatorname{comm} A$

и, следовательно, не сопадает с A, то на A существует (по теореме 4.2) хотя бы один нетривиальный **C**-гомоморфизм, который необязательно непрерывен в исходной топологии алгебры A.

В заключение отметим еще, что в случае алгебр A без единицы теоремы 4.1 и 4.2 (следовательно, и следствие 4.1) могут оказаться несправедливыми, так как $\operatorname{comm} A$ в этом случае может не принадлежать ни к одному максимальному регулярному идеалу. Примеры таких топологических алгебр приведены в [35] (с. 711—712).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mazur, S.* C. r. Acad. sci. (Paris), **207**, 1025—1027 (1938).
2. *Гельфанд И. М.* ДАН СССР, **23**, 430—432 (1939).
3. *Гельфанд И. М.* Мат. сб., **9(51)**, 3—24 (1941).
4. *Mallios, A.* Topological Algebras. Selected Topics. North-Holland Math. Studies, **124**. Amsterdam—New York, North-Holland Publ. Company, 1986.
5. *Arens, R.* Bull. Amer. Math. Soc., **53**, 623—630 (1947).
6. *Kamthan, P. K.* Indian J. Pure and Appl. Math., **1**, 481—484 (1970).
7. *Allan, G. R.* Proc. London Math. Soc., **15**, 399—421 (1965).
8. *Simpson, J. E.* Rev. Roum Math. Pures et Appl., **22**, 1155—1165 (1977).
9. *Turpin, Ph.* C. r. Acad. Sci. (Paris), **263**, 436—439 (1966).
10. *Waelbroeck, L.* In: Summer School on Topological Algebra Theory. Bruges, 1966. 128—185.
11. *Turpin, Ph., Waelbroeck, L.* C. r. Acad. Sci. (Paris), **267**, A194—A195 (1968).
12. *Абель М.* Уч. зап. Тарт. ун-та, 1988 (в печати).
13. *Żelazko, W.* Selected Topics in Topological Algebras. Lect. Notes Ser. Math., № 31. Aarhus Univ., 1971.
14. *Oudadess, M.* Rev. Colomb. Mat., **16**, 141—150 (1982).
15. *Köthe, G.* Topological Vector Spaces, I. Berlin—Heidelberg, Springer Verlag, 1969,
16. *Kaushik, V.* Math. Semin. Notes. Kobe Univ., **7**, 49—72 (1979).
17. *Page, W.* Topological Uniform Structures. New York, John Wiley & Sons, 1978.
18. *Waelbroeck, L.* Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes. Montreal, Univ. de Montreal, 1962.
19. *Waelbroeck, L.* Topological Vector Spaces and Algebras. Lect. Notes Math., **230**. Berlin—Heidelberg, Springer Verlag, 1971.
20. *Cochran, A. C.* Proc. Amer. Math. Soc., **41**, 473—479 (1973).
21. *Mildner, R.* Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math. natur. R., **24**, 491—511 (1975).
22. *Mildner, R.* Einige Beiträge zur Theorie der absorbierendkonvexen topologischen Algebren. (Diss.). Leipzig, Karl-Marx-Univ., 1974.
23. *Williamson, J. H.* Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 729—734 (1954).
24. *Beckenstein, E., Narici, L., Suffel, Ch.* Topological Algebras. North-Holland Math. Studies, **24**. Amsterdam, North-Holland Publ. Company, 1977.
25. *Żelazko, W.* On Ideal Theory in Banach and Topological Algebras. — Monogr. Inst. mat. UNAM, **15**, 1984.
26. *Khan, L. A.* Proc. Edinburgh Math. Soc., **22**, 35—41 (1979).
27. *Husain, T.* Multiplicative Functionals on Topological Algebras. Boston—London—Melbourne, Pitman Advanced Publ. Program, 1983.
28. *Arens, R.* Bull. Amer. Math. Soc., **52**, 931—935 (1946).
29. *Khaleelulla, S. M.* Counterexamples in Topological Vector Spaces. Lect. Notes Math., **936**. Berlin—Heidelberg, Springer Verlag, 1982.
30. *Michael, E. A.* Locally Multiplicatively-Convex Algebras. Mem. Amer. Math. Soc., **11**, 1952.
31. *Chabauty, M. R.* C. r. Acad. Sci. (Paris), **275**, A519—A522 (1972).
32. *Oudadess, M.* C. r. Acad. Sci. (Paris), **296**, A851—A853 (1983).
33. *Husain, T., Warsi, S. A.* Bull. Roy. Sci. Liège, **45**, 163—165 (1976).
34. *Żelazko, W.* Stud. math., **19**, 333—356 (1960).
35. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., Изд-во ИЛ, 1962.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 16/IX 1987

M. ABEL, A. KOKK

LOKAALSELT PSEUDOKUMERAD GELFAND-MAZURI ALGEBRAD

Artiklis on leitud tingimused selleks, et vaadeldav kompleksne lokaalselt pseudokumer algebra oleks Gelfand-Mazuri algebra või rangelt Gelfand-Mazuri algebra.

M. ABEL and A. KOKK

LOCALLY PSEUDOCONVEX GELFAND-MAZUR ALGEBRAS

The by now classical theorem of Gelfand-Mazur has been generalized to many different classes of topological algebras (see, for example, [5], [7], [9], [20], [34]). The purpose of the present paper is to give some generalizations of this theorem for complex locally pseudoconvex algebras. (We recall that a complex locally pseudoconvex algebra is a locally pseudoconvex space over **C** which is at the same time an associative algebra with separately continuous multiplication).

Let comm X denote the closed commutator ideal of a topological algebra X (i. e. the smallest closed two-sided ideal containing all commutators), let $\mathfrak{M}_l(X)$ ($\mathfrak{M}_r(X)$) denote the set of all maximal regular left (respectively right) ideals of X and let $\mathfrak{M}_C(X)$ denote the subset of all closed ideals of $\mathfrak{M}_l(X) \cap \mathfrak{M}_r(X)$.

We say that a complex topological algebra X is a *Gelfand-Mazur algebra* if for every $M \in \mathfrak{M}_C(X)$, the quotient algebra X/M is topologically isomorphic to **C**. Moreover, we say that a Gelfand-Mazur algebra X is a *strictly Gelfand-Mazur* algebra if the set $\mathfrak{M}_C(X)$ is nonempty.

Theorem 1. *Let X be a complex locally pseudoconvex algebra. Then X is a Gelfand-Mazur algebra if any one of the following possibilities holds.*

(a) *For each $x \in X$ there exists $\lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ such that the sequence $(x/\lambda)^n$ converges to zero in X.*

(b) *X is a topological algebra with continuous quasi-inverse.*

(c) *X is a locally A-pseudoconvex algebra.*

(d) *X is a Fréchet algebra.*

Theorem 2. *Let X be either a complex locally multiplicatively convex algebra with unit or a Gelfand-Mazur Q-algebra with unit. Then X is a strictly Gelfand-Mazur algebra if and only if* $\operatorname{comm} X \neq X$.