

1988, 37, 4

УДК 517.986.2

М. АБЕЛЬ, А. КОКК

ЛОКАЛЬНО ПСЕВДОВЫПУКЛЫЕ АЛГЕБРЫ
ГЕЛЬФАНДА—МАЗУРА

(Представил Г. Вайникко)

§ 1. Введение

1.1. Пусть K — поле C или R и A — топологическая K -алгебра, т. е. линейное топологическое пространство над K , в котором определено умножение элементов, относительно которого оно является ассоциативной алгеброй, и в топологии которого рассматриваемое умножение (как билинейное отображение $A \times A$ в A) раздельно непрерывно. В частном случае, когда умножение элементов алгебры A непрерывно в совокупности, A называется топологической K -алгеброй с непрерывным умножением. В дальнейшем вместо «топологическая C -алгебра» будем писать коротко «топологическая алгебра».

Топологическая алгебра A называется

Q -алгеброй, если множество $Q \cap v A$ квазиобратимых элементов* алгебры A открыто в A ;

алгеброй с непрерывным квазиобратным, если существует окрестность нуля алгебры A , все элементы которой квазиобратимы в A , и в которой отображение $a \rightarrow a_q$ (как отображение $Q \cap v A$ на $Q \cap v A$) непрерывно в точке θ_A (здесь θ_A обозначает нулевой элемент алгебры A);

алгеброй Фреше, если на A можно определить инвариантную метрику так, что топология, порожденная этой метрикой, полна и совпадает с исходной топологией алгебры A ;

локально псевдовыпуклой (локально выпуклой), если топология на ней определена семейством $P_A = \{p_\alpha : \alpha \in \mathcal{U}\}$ непрерывных k_α -однородных (здесь $0 < k_\alpha \leq 1$ для каждого $\alpha \in \mathcal{U}$) полунорм (соответственно, непрерывных полунорм);

локально m -псевдовыпуклой (локально m -выпуклой), если она локально псевдовыпукла (соответственно, локально выпукла) и каждая $p_\alpha \in P_A$ удовлетворяет условию

$$p_\alpha(ab) \leq p_\alpha(a)p_\alpha(b)$$

для всех $a, b \in A$;

локально поглощенно псевдовыпуклой (локально поглощенно выпуклой), если она локально псевдовыпукла (соответственно, локально

* Элемент $a \in A$ называется квазиобратимым в A , если существует элемент $a_q \in A$ такой, что $a + a_q - aa_q = a + a_q - a_qa = \theta_A$.

выпукла) и для каждой полунормы $p_\alpha \in \bar{P}_A$ и каждого элемента $a \in A$ существуют числа $M(a, a)$, $N(a, a) > 0$ такие, что

$$p_\alpha(a'a) \leq M(a, a)p_\alpha(a')$$

и

$$p_\alpha(aa') \leq N(a, a)p_\alpha(a')$$

для каждого $a' \in A$.

1.2. В 1938 г. вышла из печати статья С. Мазура [1], в которой среди остальных результатов было отмечено (но без доказательства), что каждая нормированная \mathbf{R} -алгебра с делением топологически изоморфна полю \mathbf{R} , полю \mathbf{C} или телу кватернионов. Затем в 1939 г. в [2] И. М. Гельфанд утверждал, что каждая коммутативная банахова \mathbf{C} -алгебра с делением топологически изоморфна полю \mathbf{C} . Доказательство этого результата он опубликовал в 1941 г. [3]. После опубликования упомянутых работ появились статьи, в которых эти результаты обобщались на разные классы топологических алгебр, более общих, чем нормированные. Но так как первые результаты такого характера были получены С. Мазуром и И. М. Гельфандом, топологические алгебры A , обладающие свойством

(GM), если алгебра A содержит замкнутые регулярные двусторонние идеалы, являющиеся максимальными как левые и как правые идеалы, то факторалгебра A/M по каждому такому идеалу M алгебры A является топологически изоморфной полю \mathbf{C} ,

будем называть алгебрами Гельфанда—Мазура (см. [4], с. 308) (в дальнейшем кратко GM-алгебрами).

В 1947 г. Р. Аренс показал, что все отделимые локально выпуклые алгебры с делением, обращение элементов в которых (как отображение $a \rightarrow a^{-1}$ на множестве обратимых элементов $\text{Inv } A$ алгебры A) непрерывно, и все сепарабельные локально выпуклые алгебры Фреше с делением являются GM-алгебрами (см. [5], а также [6], с. 483). Далее, Г. Р. Аллан [7] доказал, что GM-алгебрами являются и отделимые локально выпуклые алгебры с делением, удовлетворяющие условию

(α) для каждого $a \in A$ существует такое $\lambda_a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, что последовательность $((\lambda_a^{-1}a)^n)$ сходится к нулю в алгебре A .

(Аналогичный результат получил позднее и Дж. Э. Симпсон [8]). Затем М. П. Тюпан [9] обобщил результат Г. Р. Аллана на случай отделимых локально псевдовыпуклых алгебр с делением, удовлетворяющих условию (α), а Л. Вальбрук [10] (с. 153) (см. также [11]), в свою очередь, обобщил результат Р. Аренса на случай отделимых локально псевдовыпуклых алгебр с делением, в которых обращение элементов непрерывно. В работах М. П. Тюпана и Л. Вальбрука было предположено, что умножение элементов в рассматриваемых алгебрах является непрерывным. Оказывается (см. теорему 3.1 настоящей статьи), что такие результаты можно получить и без этого дополнительного предположения.

1.3. Пусть A — топологическая алгебра, $\mathfrak{M}_l(A)$ ($\mathfrak{M}_r(A)$) — множество всех максимальных регулярных левых (соответственно, правых) идеалов алгебры A и $\mathfrak{M}_c(A)$ — подмножество замкнутых идеалов в $\mathfrak{M}_l(A) \cap \mathfrak{M}_r(A)$. Кроме того, пусть $\text{hom } A$ — множество всех нетривиальных непрерывных \mathbf{C} -гомоморфизмов на A . В общем случае множества $\mathfrak{M}_c(A)$ и $\text{hom } A$ могут оказаться пустыми. Легко видеть, что в случае GM-алгебр эти множества пусты или непусты одновременно. Поскольку в теории топологических алгебр непустота множества $\text{hom } A$ играет значительную роль (ведь в этом случае становится возможным развивать гельфандовскую теорию о представлении топологических алгебр в виде алгебр непрерывных функций), то представ-

ляет интерес рассматривать класс тех \bar{GM} -алгебр, для которых множество $\mathcal{M}_c(A)$ непусто. В дальнейшем такие топологические алгебры будем называть *строгими GM-алгебрами*.

Целью данной статьи является описание некоторых классов локально псевдовыпуклых GM -алгебр и выделение из этих классов строго GM -алгебр.

§ 2. Вспомогательные результаты

Для описания некоторых классов GM -алгебр нужны следующие результаты.

Лемма 2.1. Пусть A — отделимая локально псевдовыпуклая алгебра с единицей e_A . Если выполнено одно из условий

- а) алгебра A обладает свойством (а) или
- б) алгебра A является алгеброй с непрерывным квазиобратным, то спектр $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda e_A) \notin \text{Inv } A\}$ каждого элемента $a \in A$ непуст.

Доказательство см. в [12].

Лемма 2.2. Справедливы следующие утверждения:

- а) в локально m -псевдовыпуклых алгебрах с единицей обращение элементов непрерывно,
- б) каждая отделимая поглощенно псевдовыпуклая алгебра с единицей имеет отделимую локально m -псевдовыпуклую топологию, которая сильнее исходной топологии,
- в) каждая локально поглощенно псевдовыпуклая алгебра Фреше является локально m -псевдовыпуклой алгеброй.

Доказательство. а) Пусть A — локально m -псевдовыпуклая алгебра с единицей, топология которой определена семейством $\{p_\alpha : \alpha \in \mathcal{M}\}$ непрерывных k_α -однородных субмультипликативных полунорм. Для каждого $\alpha \in \mathcal{M}$ положим $A_\alpha = A / \ker p_\alpha$ и обозначим через π_α естественный гомоморфизм A на факторалгебру A_α . Тогда для каждого $\alpha \in \mathcal{M}$ отображение q_α , определяемое на A_α равенством $q_\alpha(\pi_\alpha(a)) = p_\alpha(a)$, является k_α -однородной субмультипликативной нормой на A_α . Значит, A_α является отделимой локально ограниченной алгеброй (см. [13], с. 8), в которой k_α -однородная норма q_α удовлетворяет условию $q_\alpha(xy) \leq q_\alpha(x)q_\alpha(y)$ для всех $x, y \in A_\alpha$. Поэтому (см. [13], с. 18) обращение элементов в алгебре A_α непрерывно для каждого $\alpha \in \mathcal{M}$.

Пусть теперь $a_0 \in \text{Inv } A$ и $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \text{Inv } A$ — сеть, сходящаяся к a_0 . Тогда, ввиду непрерывности отображения π_α , сеть $(\pi_\alpha(a_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ сходится к $\pi_\alpha(a_0)$ для каждого $\alpha \in \mathcal{M}$. Так как $\pi_\alpha(a_0), \pi_\alpha(a_\lambda) \in \text{Inv } A$ и $\pi_\alpha(a^{-1}) = (\pi_\alpha(a))^{-1}$ для каждого $\alpha \in \mathcal{M}$ и $a \in \text{Inv } A$, то в силу непрерывности обращения элементов в A_α , сеть $(\pi_\alpha(a_\lambda^{-1}))_{\lambda \in \Lambda}$ сходится к $\pi_\alpha(a_0^{-1})$. Учитывая это, сеть $(p_\alpha(a_\lambda^{-1} - a_0^{-1}))_{\lambda \in \Lambda}$ сходится к нулю для каждого $\alpha \in \mathcal{M}$. Поэтому $(a_\lambda^{-1})_{\lambda \in \Lambda}$ сходится к a_0^{-1} в топологии алгебры A . Значит, обращение элементов в алгебре A непрерывно.

б) Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 в [14] (с. 144—145).

в) Пусть A — локально поглощенно псевдовыпуклая алгебра Фреше и $T \subset A$ — псевдобочка в A (т. е. замкнутое закругленное по-

глощенное псевдовыпуклое** подмножество). Так как $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT$ (ввиду поглощенности множества T), то по теореме Бэра (см., напр., [15], с. 27) существуют элемент $a_0 \in A$ и открытое множество $V_0 \subset A$ такие, что $a_0 \in V_0 \subset T$. Пусть теперь $\lambda > 0$ такое, что $T + T \subset \lambda T$ и f — отображение A на A , определяемое равенством $f(a) = (a - a_0)/2\lambda$ для каждого $a \in A$. Тогда f является гомеоморфизмом A на A и справедливо $f(V_0) \subset T$. Поскольку $\theta_A = f(a_0) \in f(V_0)$ и $f(V_0)$ открыто в A , то T является окрестностью нуля алгебры A . Значит, любая псевдобочка алгебры A является окрестностью нуля. Таким образом, по теореме 2.22 из [16] A является m -псевдовыпуклой алгеброй.

Лемма 2.3. Пусть A — Q -алгебра, B — топологическая алгебра и π — открытый гомоморфизм A на B . Тогда B является Q -алгеброй.

Доказательство проводится аналогично случаю, когда алгебра A имеет единицу (см. [17], с. 290).

Лемма 2.4. Пусть A — топологическая алгебра с непрерывным квазиобратным и $I \subset A$ — замкнутый двусторонний идеал. Тогда факторалгебра A/I (в фактортопологии) является топологической алгеброй с непрерывным квазиобратным.

Доказательство проводится аналогично случаю алгебр с единицей (см. [18], с. 58—59).

В дальнейшем будем рассматривать следующие классы топологических алгебр:

K_1 — класс всех локально псевдовыпуклых алгебр, удовлетворяющих условию (а),

K_2 — класс всех локально псевдовыпуклых алгебр с непрерывным квазиобратным,

K_3 — класс всех локально поглощенно псевдовыпуклых алгебр,

K_4 — класс всех локально псевдовыпуклых алгебр Фреше,

K_5 — класс всех локально m -псевдовыпуклых алгебр с единицей.

Лемма 2.5. Если $A \in K_i$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) и $I \subset A$ — замкнутый двусторонний идеал, то факторалгебра $A/I \in K_i$.

Доказательство. Пусть A — локально псевдовыпуклая алгебра и π — естественный гомоморфизм A на A/I . Тогда A имеет базу β_A закругленных псевдовыпуклых окрестностей нуля. Так как $\beta_{A/I} = \{\pi(U) : U \in \beta_A\}$ образует базу окрестностей нуля в фактортопологии алгебры A/I и каждое множество $\pi(U)$ ($U \in \beta_A$) закруглено и псевдовыпукло, то факторалгебра A/I является отделимой локально псевдовыпуклой алгеброй (см. [19], с. 4). При этом $A/I \in K_5$, если $A \in K_5$. Кроме того, A/I удовлетворяет условию (а) (является алгеброй с непрерывным квазиобратным или алгеброй Фреше), если алгебра A удовлетворяет условию (а) (соответственно, является алгеброй с непрерывным квазиобратным или алгеброй Фреше).

Пусть теперь $A \in K_3$. Тогда она имеет базу окрестностей нуля β'_A , состоящую из тех $U \in \beta_A$, которые удовлетворяют условию

(β) для каждого $a_0 \in A$ существуют $\lambda, \mu \geq 0$ такие, что $a_0 U \subset \lambda U$ и $U a_0 \subset \mu U$.

Поскольку $\pi(U)$ обладает этим свойством для каждого $U \in \beta'_A$, то $A/I \in K_3$ (см. [16], с. 54).

§ 3. Некоторые классы GM -алгебр

Во-первых, рассмотрим случай локально псевдовыпуклых GM -алгебр с делением.

** Множество U называется псевдовыпуклой, если $U + U \subset \lambda U$ для некоторого числа $\lambda > 0$.

Теорема 3.1. Пусть A — отделимая локально псевдовыпуклая алгебра с делением. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- а) алгебра A топологически изоморфна полю \mathbb{C} ,
- б) каждый элемент алгебры A имеет непустой спектр,
- в) алгебра A обладает свойством (а),
- г) обращение элементов в алгебре A непрерывно.

Доказательство. Импликация в) \Rightarrow б), а также г) \Rightarrow б) (так как каждая отделимая алгебра с делением, обращение элементов которой непрерывно, является алгеброй с непрерывным квазиобратным) имеют место по лемме 2.1.

б) \Rightarrow а). По условию б) каждый элемент $a \in A$ определяет число $\lambda_a \in \mathbb{C}$ такое, что $a = \lambda_a e_A$. (Если это не так, то $a - \lambda_a e_A \in \text{Inv } A$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, что невозможно). Легко заметить, что отображение $\tau: a \rightarrow \lambda_a$ является изоморфизмом A на \mathbb{C} . Чтобы показать непрерывность отображения τ , берем любую окрестность нуля O в \mathbb{C} . Тогда $O_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \varepsilon\} \subset O$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Если $\lambda \in O_\varepsilon \setminus \{0\}$, то (в силу отделимости алгебры A) существует закругленная окрестность нуля $V \subset A$ такая, что $\lambda e_A \notin V$. Теперь из $a \in V$ вытекает $\lambda_a \in O_\varepsilon$. В самом деле, если $a \in V$ и $|\lambda_a| \geq \varepsilon$, то $|\lambda \lambda_a^{-1}| \leq 1$, в силу чего $\lambda e_A = (\lambda \lambda_a^{-1}) a \in V$. Но это невозможно. Значит, отображение τ непрерывно в точке $a = \theta_A$ и, следовательно, на A . Кроме того, τ^{-1} является непрерывным на \mathbb{C} , ибо $\tau^{-1}(\lambda) = \lambda e_A$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

а) \Rightarrow в). Пусть τ — топологический изоморфизм A на \mathbb{C} , $a \in A$ — любой элемент и $\lambda \in \mathbb{C}$ — такое число, что $|\tau(a)| < \lambda$. Тогда последовательность $a_n = (\lambda^{-1}(\tau(a)))^n$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность $(\lambda^{-1}a)^n = \tau^{-1}(a_n)$ сходится к нулю в алгебре A .

а) \Rightarrow г). Пусть ε_A — отображение, определяемое на $A \setminus \{\theta_A\}$ равенством $\varepsilon_A(a) = a^{-1}$. Так как $\varepsilon_A = \tau^{-1} \circ \varepsilon_{\mathbb{C}} \circ \tau$, то ε_A (как композиция непрерывных отображений) непрерывно на $A \setminus \{\theta_A\}$.

Теорема доказана.

Поскольку квазиобращение элементов в алгебре Фреше с делением непрерывно (см. [13], с. 7), то по теореме 3.1 справедливо

Следствие 3.1. Каждая локально псевдовыпуклая алгебра Фреше с делением топологически изоморфна полю \mathbb{C} .

Теорема 3.2. Каждая отделимая поглощенно псевдовыпуклая алгебра с делением топологически изоморфна полю \mathbb{C} .

Доказательство. Пусть A — отделимая поглощенно псевдовыпуклая алгебра с делением. Тогда на ней существует отделимая локально m -псевдовыпуклая топология (по лемме 2.2 б)). Поэтому существует изоморфизм τ алгебры A на \mathbb{C} (по лемме 2.2 а) и по теореме 3.1), непрерывность которого и его обратного можно показать точно так же, как и в доказательстве теоремы 3.1.

Частный случай теоремы 3.2, когда рассматриваемая алгебра является локально выпуклой, был приведен без доказательства в [20] (см. также [21], с. 495), а доказан в статье [14] (с. 141—145) и в диссертации [22].

Следующая теорема дает описание некоторых классов локально псевдовыпуклых GM -алгебр.

Теорема 3.3. Каждая топологическая алгебра из класса K_i ($i=1, 2, 3, 4$) является GM -алгеброй.

Доказательство. Пусть $A \in K_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) и $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(A)$. Тогда A/M является отделимой алгеброй с делением, которая принадлежит классу K_i (по лемме 2.5). Следовательно (по теореме 3.1), факторалгебра A/M топологически изоморфна полю \mathbb{C} . Значит, A является GM -алгеброй.

Примечание 3.1. В работах [23], [24] (с. 214—217), [13] (с. 83—87), [25] (с. 127) и [19] (с. 141—148) приведены примеры топологических алгебр с делением (в том числе алгебр с непрерывным квазиобратным и алгебр Фреше), которые не являются топологически изоморфными полю \mathbb{C} . Таким образом, утверждения теоремы 3.3 necessarily справедливы, если рассматриваемые в ней алгебры не являются локально псевдовыпуклыми.

Примечание 3.2. Приведем теперь некоторые примеры, показывающие, что классы топологических алгебр, указанные в теореме 3.3, не совпадают.

1. **Алгебра $(C(X), k)$.** Пусть X — тихоновово пространство и $(C(X), k)$ — алгебра непрерывных \mathbb{C} -значных функций на X , наделенное топологией компактной сходимости. Известно (см. [24], с. 63—64 и 204—205), что $(C(X), k)$ является алгеброй Фреше тогда и только тогда, когда X является хемикompактным k -пространством, и алгеброй с непрерывным квазиобратным тогда и только тогда, когда пространство X компактно. Кроме того известно (см. [24], с. 342), что алгебра $(C(X), k)$ не удовлетворяет условию (а), если пространство X не является псевдокомпактным.

2. **Алгебра $(C_b(X), \beta)$.** Пусть X — отдeлимое топологическое пространство, $C_b(X)$ — алгебра непрерывных ограниченных \mathbb{C} -значных функций на X и $B_0(X)$ — алгебра ограниченных \mathbb{C} -значных функций на X с компактным носителем. Алгебру $C_b(X)$, наделенную топологией β (т. е. топологией, предбазу окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\Phi, \varepsilon) = \{f \in C_b(X) : |\Phi(x)f(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in X\},$$

где $\varepsilon > 0$ и $\Phi \in B_0(X)$), обозначим через $(C_b(X), \beta)$. Легко заметить, что $(C_b(X), \beta)$ является поглощенно псевдовыпуклой алгеброй, удовлетворяющей условию (а). При этом эта алгебра метризуема (по теоремам 3.4 и 3.5 из [26]) тогда и только тогда, когда X компактно.

3. **Алгебра $L^\omega[0, 1]$.** Пусть $L^\omega[0, 1]$ — множество классов эквивалентности интегрируемых функций f на $[0, 1]$ таких, что

$$p_n(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^n dx \right)^{1/n} < \infty$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $L^\omega[0, 1]$ является локально выпуклой алгеброй Фреше относительно поточечных алгебраических операций и топологии, определенной семейством полунорм $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Известно, что алгебра $L^\omega[0, 1]$ удовлетворяет условию (а) (см. [27], с. 130) и не является поглощенно псевдовыпуклой алгеброй (по лемме 2.2 в)), ибо обращение элементов в локально m -псевдовыпуклых алгебрах с единицей непрерывно (по лемме 2.2 а)), а в алгебре $L^\omega[0, 1]$ нет (см. [28] или [29], с. 145).

4. **Алгебра D .** Пусть D — векторное пространство всех комплексных бесконечно дифференцируемых функций на \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) с компактным носителем и $k = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, где $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. Пусть далее пространство \mathbb{R}^n представлено в виде объединения счетного семейства подмножеств G_m ($m \in \mathbb{N}$) таких, что G_m содержится во внутренности G_{m+1} для каждого $m \in \mathbb{N}$. Через $D(G_m)$ обозначим векторное подпространство всех комплексных бесконечно дифференцируемых функций на \mathbb{R}^n с носителем G_m . Определим на $D(G_m)$ топологию при помощи семейства полунорм $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$, где для каждого $f \in D(G_m)$

$$p_m(f) = \sup \{ |d^h(f(x))| : x \in G_m, 0 \leq |k| \leq m \},$$

$$d^h(f) = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^{h_1} x_1 \partial^{h_2} x_2 \dots \partial^{h_m} x_m}$$

и

$$|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_m.$$

Кроме того, определим умножение элементов в D поточечно и наделим его индуктивной топологией относительно семейства $D(G_m)$. Тогда D является локально m -выпуклой Q -алгеброй (см. [30], с. 77), которая не метризуема (см. [29], с. 146).

Соотношения между классами K_i с $i=1, 2, 3, 4$ иллюстрирует таблица (при этом в клетках K_i, K_j указаны топологические алгебры, которые принадлежат к классу K_i , а не к классу K_j при $i \neq j$).

	K_1	K_2	K_3	K_4
K_1		$L^\omega[0, 1]$	$L^\omega[0, 1]$	$(C_b(X), \beta)$ X не компактно
K_2	?		?	D
K_3	$(C(X), k)$ X не псевдо- компактно	$(C(X), k)$ X не компактно		$(C_b(X), \beta)$ X не компактно
K_4	$(C(X), k)$ X не псевдо- компактно, а хеми- компактное k -пространство	$L^\omega[0, 1]$	$L^\omega[0, 1]$	

Закончим параграф некоторыми проблемами.

1. Известно, что каждая отделимая локально выпуклая алгебра с единицей и с непрерывным квазиобратным и каждая равномерно поглощенно выпуклая алгебра (т. е. такая локально поглощенно выпуклая алгебра, для которой числа $M(\alpha, a)$ и $N(\alpha, a)$, определенные выше, не зависят от $a \in \mathfrak{A}$) удовлетворяют условию (α) (см. [31], а также [9] и [32], с. 851). При этом не известно, существуют ли не существуют локально псевдовыпуклые алгебры с непрерывным квазиобратным, которые не удовлетворяют условию (α) ?

2. Как показано в [33] (с. 163), каждая локально поглощенно выпуклая алгебра Фреше является локально m -выпуклой. Поэтому полная отделимая локально ограниченная алгебра, не являющаяся локально m -выпуклой, служит примером локально псевдовыпуклой алгебры с непрерывным квазиобратным, которая не является локально поглощенно выпуклой алгеброй (пример такой алгебры приведен в [34], с. 337). Возникает вопрос, существуют ли локально псевдовыпуклые алгебры с непрерывным квазиобратным, которые не являются локально поглощенно псевдовыпуклыми?

Известно (см. [19], с. 123), что каждая коммутативная локально выпуклая алгебра с единицей и с непрерывным квазиобратным является локально m -выпуклой. Если аналогичный результат справедлив и в случае всех локально псевдовыпуклых алгебр, то ответ на этот вопрос был бы отрицательный.

§ 4. Строго GM -алгебры

Пусть A — топологическая алгебра и $\text{com} A$ — замыкание коммутаторного идеала алгебры A , т. е. замыкание двустороннего идеала алгебры A порожденного множеством $\{ab - ba : a, b \in A\}$. Ясно, что $\text{com} A = \{0_A\}$ для отделимых коммутативных топологических алгебр A , а $\text{com} A = A$ для простых некоммутирующих топологических алгебр A . В дальнейшем мы изучаем значение условия $\text{com} A \neq A$ в GM -алгебрах.

Предложение 4.1. *Если A — строго GM -алгебра, то $\text{com} A \neq A$.*

Доказательство. Пусть A — строго GM -алгебра, идеал $M \in \mathfrak{M}_c(A)$, π — естественный гомоморфизм A на A/M и τ — топологический изоморфизм A/M на C . Тогда $\Lambda = \tau \circ \pi \in \text{hom } A$ и, поскольку $\text{com} A \subset \ker \Lambda$, то $\text{com} A \neq A$.

Теорема 4.1. *Пусть A — GM -алгебра с единицей, которая является Q -алгеброй. Тогда A является строго GM -алгеброй тогда и только тогда, когда $\text{com} A \neq A$.*

Доказательство. Пусть A — GM -алгебра с единицей, которая является Q -алгеброй и удовлетворяет условию $\text{com} A \neq A$. Тогда существует идеал $M \in \mathfrak{M}_l(A)$ такой, что $\text{com} A \subset M$. Но так как $at - ta \in M$ при всех $t \in M$ и $a \in A$, то M является двусторонним идеалом. Отсюда ясно, что $M \in \mathfrak{M}_r(A)$. Так как в Q -алгебрах максимальные идеалы замкнуты (см. [30], с. 77), то $M \in \mathfrak{M}_c(A)$. Значит, множество $\mathfrak{M}_c(A)$ непусто.

Обратное утверждение справедливо по предложению 4.1.

Из теоремы 4.1 вытекает, что каждая алгебра A с единицей из класса K_2 является строго GM -алгеброй тогда и только тогда, когда $\text{com} A \neq A$. Но в случае алгебр из классов K_1 и K_4 это утверждение не обязательно справедливо, поскольку алгебра $L^\omega[0, 1] \in K_1 \cap K_4$ и множество $\text{hom } L^\omega[0, 1]$ пусто (см. [29], с. 146).

Теорема 4.2. *Топологическая алгебра $B \in K_5$ является строго GM -алгеброй тогда и только тогда, когда $\text{com} B \neq B$.*

Доказательство. Пусть $B \in K_5$, $\text{com} B \neq B$ и π — естественный гомоморфизм B на $A = B/\text{com} B$. Тогда по лемме 2.5 алгебра $A \in K_5$.

Пусть теперь $P_A = \{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — семейство k_α -однородных субмультипликативных полунорм, определяющее топологию алгебры A , и $\alpha \in \mathfrak{A}$. Пусть далее факторалгебра A_α и гомоморфизм π_α такие же, как в доказательстве леммы 2.2, а \bar{A}_α — пополнение алгебры A_α и $\delta : A_\alpha \rightarrow \bar{A}_\alpha$ — топологический изоморфизм, полученный при пополнении алгебры A_α . Тогда множество $\text{hom } \bar{A}_\alpha$ непусто (см. [13], с. 22).

Пусть $\Lambda \in \text{hom } \bar{A}_\alpha$ и $\Lambda_1 = \Lambda \circ \delta \circ \pi_\alpha \circ \pi$. Тогда $\Lambda_1 \in \text{hom } B$ и поэтому $\ker \Lambda_1 \in \mathfrak{M}_c(B)$. Значит, B является строго GM -алгеброй (по теореме 3.3).

Обратное утверждение справедливо по предложению 4.1.

Из теорем 4.1 и 4.2 вытекает

Следствие 4.1. *Пусть A — топологическая алгебра с единицей. Если $A \in K_2 \cup K_5$, то $\text{hom } A$ непусто тогда и только тогда, когда $\text{com} A \neq A$.*

Пусть теперь A — отделимая локально поглощенно псевдовыпуклая алгебра с единицей, удовлетворяющая условию $\text{com} A \neq A$. Тогда по лемме 2.2 б) на A существует отделимая локально m -псевдовыпуклая топология τ , которая сильнее исходной топологии алгебры A . Поскольку замыкание коммутаторного идеала в топологии τ принадлежит $\text{com} A$

и, следовательно, не совпадает с A , то на A существует (по теореме 4.2) хотя бы один нетривиальный C -гомоморфизм, который необязательно непрерывен в исходной топологии алгебры A .

В заключение отметим еще, что в случае алгебр A без единицы теоремы 4.1 и 4.2 (следовательно, и следствие 4.1) могут оказаться несправедливыми, так как $\text{com} A$ в этом случае может не принадлежать ни к одному максимальному регулярному идеалу. Примеры таких топологических алгебр приведены в [35] (с. 711—712).

ЛИТЕРАТУРА

1. Mazur, S. C. *r. Acad. sci. (Paris)*, **207**, 1025—1027 (1938).
2. Гельфанд И. М. *ДАН СССР*, **23**, 430—432 (1939).
3. Гельфанд И. М. *Мат. сб.*, **9(51)**, 3—24 (1941).
4. Mallios, A. *Topological Algebras. Selected Topics*. North-Holland Math. Studies, **124**. Amsterdam—New York, North-Holland Publ. Company, 1986.
5. Arens, R. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**, 623—630 (1947).
6. Kamthan, P. K. *Indian J. Pure and Appl. Math.*, **1**, 481—484 (1970).
7. Allan, G. R. *Proc. London Math. Soc.*, **15**, 399—421 (1965).
8. Simpson, J. E. *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, **22**, 1155—1165 (1977).
9. Turpin, Ph. C. *r. Acad. Sci. (Paris)*, **263**, 436—439 (1966).
10. Waelbroeck, L. In: *Summer School on Topological Algebra Theory*. Bruges, 1966. 128—185.
11. Turpin, Ph., Waelbroeck, L. C. *r. Acad. Sci. (Paris)*, **267**, A194—A195 (1968).
12. Абель М. Уч. зап. Тарт. ун-та, 1988 (в печати).
13. Zelazko, W. *Selected Topics in Topological Algebras*. Lect. Notes Ser. Math., № 31. Aarhus Univ., 1971.
14. Oudadess, M. *Rev. Colomb. Mat.*, **16**, 141—150 (1982).
15. Köthe, G. *Topological Vector Spaces*, I. Berlin—Heidelberg, Springer Verlag, 1969.
16. Kaushik, V. *Math. Semin. Notes. Kobe Univ.*, **7**, 49—72 (1979).
17. Page, W. *Topological Uniform Structures*. New York, John Wiley & Sons, 1978.
18. Waelbroeck, L. *Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes*. Montreal, Univ. de Montreal, 1962.
19. Waelbroeck, L. *Topological Vector Spaces and Algebras*. Lect. Notes Math., **230**. Berlin—Heidelberg, Springer Verlag, 1971.
20. Cochran, A. C. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41**, 473—479 (1973).
21. Mildner, R. *Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math. natur. R.*, **24**, 491—511 (1975).
22. Mildner, R. *Einige Beiträge zur Theorie der absorbierendkonvexen topologischen Algebren*. (Diss.). Leipzig, Karl-Marx-Univ., 1974.
23. Williamson, J. H. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5**, 729—734 (1954).
24. Beckenstein, E., Narici, L., Suffel, Ch. *Topological Algebras*. North-Holland Math. Studies, **24**. Amsterdam, North-Holland Publ. Company, 1977.
25. Zelazko, W. *On Ideal Theory in Banach and Topological Algebras*. — *Monogr. Inst. mat. UNAM*, **15**, 1984.
26. Khan, L. A. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **22**, 35—41 (1979).
27. Husain, T. *Multiplicative Functionals on Topological Algebras*. Boston—London—Melbourne, Pitman Advanced Publ. Program, 1983.
28. Arens, R. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**, 931—935 (1946).
29. Khaleelulla, S. M. *Counterexamples in Topological Vector Spaces*. Lect. Notes Math., **936**. Berlin—Heidelberg, Springer Verlag, 1982.
30. Michael, E. A. *Locally Multiplicatively-Convex Algebras*. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **11**, 1952.
31. Chabauty, M. R. C. *r. Acad. Sci. (Paris)*, **275**, A519—A522 (1972).
32. Oudadess, M. C. *r. Acad. Sci. (Paris)*, **296**, A851—A853 (1983).
33. Husain, T., Warsi, S. A. *Bull. Roy. Sci. Liège*, **45**, 163—165 (1976).
34. Zelazko, W. *Stud. math.*, **19**, 333—356 (1960).
35. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы*. М., Изд-во ИЛ, 1962.

LOKAALSELT PSEUDOKUMERAD GELFAND-MAZURI ALGEBRAD

Artiklis on leitud tingimused selleks, et vaadeldav kompleksne lokaalselt pseudokumer algebra oleks Gelfand-Mazuri algebra või rangelt Gelfand-Mazuri algebra.

M. ABEL and A. KOKK

LOCALLY PSEUDOCONVEX GELFAND-MAZUR ALGEBRAS

The by now classical theorem of Gelfand-Mazur has been generalized to many different classes of topological algebras (see, for example, [5], [7], [9], [20], [34]). The purpose of the present paper is to give some generalizations of this theorem for complex locally pseudoconvex algebras. (We recall that a complex locally pseudoconvex algebra is a locally pseudoconvex space over \mathbb{C} which is at the same time an associative algebra with separately continuous multiplication).

Let $\text{comm } X$ denote the closed commutator ideal of a topological algebra X (i.e. the smallest closed two-sided ideal containing all commutators), let $\mathfrak{m}_l(X)$ ($\mathfrak{m}_r(X)$) denote the set of all maximal regular left (respectively right) ideals of X and let $\mathfrak{m}_c(X)$ denote the subset of all closed ideals of $\mathfrak{m}_l(X) \cap \mathfrak{m}_r(X)$.

We say that a complex topological algebra X is a *Gelfand-Mazur algebra* if for every $M \in \mathfrak{m}_c(X)$, the quotient algebra X/M is topologically isomorphic to \mathbb{C} . Moreover, we say that a Gelfand-Mazur algebra X is a *strictly Gelfand-Mazur algebra* if the set $\mathfrak{m}_c(X)$ is nonempty.

Theorem 1. *Let X be a complex locally pseudoconvex algebra. Then X is a Gelfand-Mazur algebra if any one of the following possibilities holds.*

(a) *For each $x \in X$ there exists $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ such that the sequence $(x/\lambda)^n$ converges to zero in X .*

(b) *X is a topological algebra with continuous quasi-inverse.*

(c) *X is a locally A-pseudoconvex algebra.*

(d) *X is a Fréchet algebra.*

Theorem 2. *Let X be either a complex locally multiplicatively convex algebra with unit or a Gelfand-Mazur Q-algebra with unit. Then X is a strictly Gelfand-Mazur algebra if and only if $\text{comm } X \neq X$.*