EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1986.4.12

УДК 62-501.7

И. РАНДВЕЭ

АЛГОРИТМ ВЫБОРА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИДЕРА

I. RANDVEE. ALGORITM OPTIMAALSE JUHTTOIME ESITUSVIISI VALIKUKS

I. RANDVEE. AN INCENTIVE SCHEME FOR LINEAR QUADRATIC SYSTEMS

(Представил Н. Алумяэ)

Известно [1, 2], что при управлении динамическими системами, состоящими из нескольких (независимых) центров, приоритетный центр (лидер) может установить в системе режим, который соответствует глобальному минимуму своей функции цели. Ниже приводится алгоритм выбора представления закона управления, с помощью которого лидер может воздействовать на функцию цели последующего центра и реализовать в линейной дискретно-непрерывной системе желаемую ему допустимую траекторию движения.

1. Формальное описание задачи

Дана динамическая система

$$\dot{x}=f(x, u_1, u_2, t), \qquad x\in R^n, \qquad u_i\in R^{r_i}, \tag{1}$$

которая управляется из двух центров. Приоритетный центр использует управление u_1. Предполагается, что при любой паре допустимых законов управления $u_i=p_i(x(s),\ t_0\leqslant s\leqslant t)$, $p_i\in\Gamma_i$, т. е. для $(p_1, p_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2$ при заданном x_0 существует единственное решение уравнения (1) и конечное значение критерия оптимальности неприоритетного центра $J_2(x_0, p_1, p_2)$. Пусть лидер выбрал желаемое ему решение уравнения (1) — траекторию $\bar{x}(t)$ и соответствующие этому решению законы управления (p_1^0, p_2^0).

Дефинируем множество эквивалентных относительно траектории $\bar{x}(t)$ представлений закона p_1^0:

$$\bar{\Gamma}_1\overset{\triangle}{=}\{p_1\in\Gamma_1 \mid p_1(\bar{x}, t)=p_1^0(\bar{x}, t),\ t_0\leqslant t\leqslant t_f\}.$$

Задача теперь состоит в выборе такого $p_1^*\in\Gamma_1$, при котором имеет место равенство

$$p_2^*(\tilde{x})=p_2^0(\bar{x}), \tag{2}$$

где $p_2^*=\arg\min\limits_{\Gamma_2} J_2(p_1^*, p_2)$,

а $\tilde{x}(t)$ — соответствующее паре (p_1^*, p_2^*) решение уравнения (1). При $\tilde{x}(t_0)=\bar{x}(t_0)$ и выполнении условия (2), очевидно, траектории $\tilde{x}(t)$ и $\bar{x}(t)$ идентичны.

2. Алгоритм для дискретно-непрерывных систем

Будем считать, что желаемая для лидера траектория $\bar{x}_k$ $(k=0, 1, \ldots \ldots N-1)$ системы

$$x_{k+1}=Ax_k+B_1u_k+B_2v_k \tag{3}$$

достигается при линейных законах управления: $u_k{}^0=-K_k\bar{x}_k$ и $v_k{}^0=-L_k\bar{x}_k$, где $\bar{x}_k\in R^n$, $u_k\in R^{r_1}$, $v_k\in R^{r_2}$, A, B_1, B_2, K_k, L_k — известные матрицы.

Определим множество эквивалентных управлений лидера, используя одношаговый прогноз

$$\overline{\Gamma}_{1,k}=\{p_{1,k}(x_k, x_{k-1})=-K_kx_k+P_k(x_k-A_kx_{k-1})\},$$

где $A_k=A-B_1K_{k-1}-B_2L_{k-1}$, а $P_k\in R^{n\times r_1}$ неизвестная матрица.

Требуется определить последовательность $P_k{}^*$, $k=0, 1, \ldots N-1$, при которой минимум функции цели неприоритетного центра

$$J_2=x'_NQ_{2N}x_N+\sum_{k=0}^{N-1}(x'_kQ_2x_k+p'_{1,k}R_{21}p_{1,k}+v'_kR_{22}v_k) \tag{4}$$

по управлениям v_k достигается при $v_k{}^*$ равном $v_k{}^0$, т. е. $v_k{}^*=-L_k\bar{x}_k$ для всех k.

Минимизация (4) должна осуществляться при условии (3), в котором u_k заменен, как и в (4), на $p_{1,k}(x_k, x_{k-1})\in\overline{\Gamma}_{1,k}$; предполагается также, что $Q_{2N}\geqslant 0$, $Q_2\geqslant 0$, $R_{21}>0$, $R_{22}>0$ — известные симметричные матрицы.

В данном случае вторая вариация J_2 включает P_k, т. е. у лидера в действительности имеется возможность изменять J_2, не изменяя при этом $u_k{}^0$ — желаемых значений своего сигнала управления.

Задача (3)—(4) решается по схеме синтеза линейных регуляторов с учетом воздействий предшествующей системы [3]. Приоритет лидера при этом обеспечивается исключением управления v_k на последнем шаге, т. е. выбором $B_2(N)=0$ или $R_{22}(N)=0$.

Искомое $P_k{}^*$ определяется на каждом шаге N, $N-1$, $\ldots$, 0 решением линейного матричного уравнения

$$B'_2(P'_kG_k+S_k)A_{k-1}-R_{22}L_{k-1}=0 \tag{5}$$

совместно с рекурсивными уравнениями для матриц S_k и G_k:

$$S_k=Q_2+A'_kS_{k+1}A_k+K'_kR_{21}K_k+L'_kR_{22}L_k, \qquad S_N=Q_{2N},$$

$$G_k=B'_1P_{k+1}G_{k+1}A_k-R_{21}K_k+B'_1S_{k+1}A_k, \qquad G_N=0.$$

Уравнение (5) является необходимым условием минимума функции цели неприоритетного центра на k-м шаге. Его решение $P_k{}^*$, если оно существует, обеспечивает равенство $v_k{}^*$ с желаемым управлением $v_k{}^0=-L_k\bar{x}_k$.

Ниже в качестве иллюстрации приведены практически установившиеся значения $P_k{}^*$ представления закона управления лидера $u_k=-K_kx_k+P_k{}^*(x_k-A_kx_{k-1})$ для шести различных желаемых траекторий скалярной системы

$$x_{k+1}=0{,}9x_k+u_k+v_k, \qquad x_0=30,$$

в случае функции цели неприоритетного центра

$$J_2=\sum_{k=0}^{30}x_k^2+u_k^2+3v_k^2.$$

	1	2	3	4	5	6
K_{15}	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
L_{15}	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
P_{15}^*	0,2	1,0	1,6	2,3	3,2	4,3

Использование эквивалентных представлений закона управления лидера в виде $p_k(x_k, x_{k-1})$ открывает некоторые новые возможности в задачах управления многоуровневыми системами и системами с двумя шкалами времени [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ishida, T., Shimemura, E.* Int. J. Control, **38**, № 6, 1133—1148 (1983).
2. *Zheng, Y.-P., Basar, T., Cruz, J. B. Jr.* IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, **SNC-14**, № 1 (1984).
3. *Рандвеэ И.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **35**, № 1, 107—109 (1986).
4. *Рандвеэ И.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **30**, № 1, 35—46 (1981).
5. *Salman, M. A., Cruz, J. B. Jr.* Int. J. Control, **37**, № 6, 1401—1416 (1983).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/II 1986