

1986, 35, 4

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1986.4.11>

УДК 517.977.58

Р. ТЕННО

## ПРИБЛИЖЕННО ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

R. TENNO. BILINEAARSE SÜSTEEMI LÄHISOPTIMAALNE JUHTIMINE

R. TENNO. SUB-OPTIMAL CONTROL OF A BILINEAR SYSTEM

(Представил Н. Алумяэ)

Билинейные системы являются наиболее простым обобщением линейных. Несмотря на это, возникают серьезные трудности в связи с построением оптимальных управлений. В некоторых случаях эти трудности могут быть преодолены — найдены управления, которые аппроксимируют оптимальные лучше, чем предложенные в [1].

Ставится задача. Найти стратегию  $(\alpha_t)$  управления с обратной связью  $\alpha_t = \alpha_t(\xi_0, \dots, \xi_t)$  такую, которая минимизирует функционал

$$v^\alpha = M \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} (\Theta_t^2 + \alpha_t^\top \Upsilon \alpha_t) + \Theta_N^2 \right\}, \quad (1)$$

если управляемая  $(\Theta_t)$  и наблюдаемая последовательности  $(\xi_t)$  заданы уравнениями

$$\begin{aligned} \Theta_{t+1} &= \mu + \alpha_t^\top G \Theta_t + \sigma \varepsilon_{t+1}, & \Theta_0 &= \tilde{\Theta}, \\ \xi_{t+1} &= F(t, \xi_t) + A \Theta_t + e_{t+1}, & \xi_0 &= \xi_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon_t, e_t$  — независимые гауссовские величины,  $\xi_0$  — фиксированное,  $\tilde{\Theta}$  — случайное начальное условие с гауссовской плотностью распределения со средним  $m_0$  и дисперсией  $\gamma_0$ ,  $F(t, \xi_t)$  — функция, имеющая конечный момент второго порядка.

Решив двухшаговую ( $N=2$ ) задачу, получим следующий результат.

Пусть матрица  $\Upsilon$  положительно определена. Тогда задача (1), (2) имеет решение. Оптимальное управление на первом шаге определяется из решения уравнения

$$S_\alpha + R_\alpha = 0 \quad (3)$$

при условии, что матрица  $S_{\alpha\alpha} + R_{\alpha\alpha}$  положительно определена. Здесь  $S_\alpha, R_\alpha$  — первые,  $S_{\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha}$  — вторые производные от функции

$$S(\alpha) = m^2 + \gamma + \alpha^\top \Upsilon \alpha$$

и

$$R(\alpha) = c^2 + C + \sigma^2 + \sqrt{\pi} \mu^2 \Upsilon \operatorname{Re} w(z),$$

$m = M(\Theta_0/\xi_0)$  — условное среднее,  $\gamma = \operatorname{cov}(\Theta_0/\xi_0)$  — условная ковариация,

$$c = \mu + \alpha^T G m$$

— прогноз состояния  $\Theta_1$ ,

$$C = \sigma^2 + (\alpha^T G)^2 \gamma$$

— дисперсия прогноза

$$\omega(z) = e^{-z^2} [1 - \operatorname{erf}(-iz)]$$

— интеграл вероятности от комплексного аргумента  $z = X + iY$ . Переменная  $z$  связана с остальными параметрами задачи (1), (2) по формулам

$$\sqrt{2} XT = -c, \quad 2Y^2 T^2 G^T [\Gamma + GG^T (C - T^2)]^{-1} G = 1;$$

$$T \sqrt{\Gamma + A^T \gamma A} = \gamma A G^T \alpha.$$

Оптимальное управление на втором шаге единственное. Оно задается равенством

$$\alpha^* = -[\Gamma + GG^T (m_1^2 + \gamma_1)]^{-1} G m_1 \gamma, \quad (4)$$

где  $m_1 = M(\Theta_1 / \xi_1)$ ,  $\gamma_1 = \operatorname{cov}(\Theta_1 / \xi_1)$ .

В общем случае, когда  $N$  любое натуральное число, решение задачи (1), (2) не мыслимо ввиду сложности. Приближенно она может быть решена следующим образом. Пусть  $m_t$  — условное среднее,  $\gamma_t$  — условная ковариация, вычисляемые согласно уравнениям фильтрации [2]. Примем  $m = m_t$ ,  $\gamma = \gamma_t$  в (3) и  $m_1 = m_{N-1}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_{N-1}$  в (4). Тогда оптимальное в смысле

$$v_1^\alpha = M \left\{ \sum_{\tau=t}^{t+1} (\Theta_\tau^2 + \alpha_\tau^T \Gamma \alpha_\tau) + \Theta_{\tau+2}^2 \right\}$$

управление на каждом шаге  $t=0, 1, \dots, N-2$  определяется из уравнения (3), а на  $t=N-1$  из равенства (4).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Jacobs, O. L. R., Potter, R. V. In: Recent Theoretical Developments in Control (Ed. by M. J. Gregson). London—New York—San Francisco, Academic Press, 1978, 403—419.
2. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М., «Наука», 1974.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
11/II 1986