EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR. PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 4

УДК 517.977.58

Р. ТЕННО

ПРИБЛИЖЕННО ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

R. TENNO. BILINEAARSE SÜSTEEMI LÄHISOPTIMAALNE JUHTIMINE

R. TENNO. SUB-OPTIMAL CONTROL OF A BILINEAR SYSTEM

(*Представил Н. Алумяэ*)

Билинейные системы являются наиболее простым обобщением линейных. Несмотря на это, возникают серьезные трудности в связи с построением оптимальных управлений. В некоторых случаях эти трудности могут быть преодолены — найдены управления, которые аппроксимируют оптимальные лучше, чем предложенные в [1].

Ставится задача. Найти стратегию (α_t) управления с обратной связью $\alpha_t=\alpha_t(\xi_0, \ldots, \xi_t)$ такую, которая минимизирует функционал

$$v^\alpha=M\left\{\sum_{t=0}^{N-1}(\Theta_t^2+\alpha_t^\tau\Upsilon\alpha_t)+\Theta_N^2\right\}, \tag{1}$$

если управляемая (Θ_t) и наблюдаемая последовательности (ξ_t) заданы уравнениями

$$\begin{aligned}\Theta_{t+1}&=\mu+\alpha_t^\tau G\Theta_t+\sigma\varepsilon_{t+1}, \qquad \Theta_0=\tilde{\Theta},\\ \xi_{t+1}&=F(t,\xi_t)+A\Theta_t+e_{t+1}, \qquad \xi_0=\xi_0,\end{aligned} \tag{2}$$

где ε_t, e_t — независимые гауссовские величины, ξ_0 — фиксированное, $\tilde{\Theta}$ — случайное начальное условие с гауссовской плотностью распределения со средним m_0 и дисперсией γ_0, $F(t, \xi_t)$ — функция, имеющая конечный момент второго порядка.

Решив двухшаговую $(N=2)$ задачу, получим следующий результат.

Пусть матрица Υ положительно определена. Тогда задача (1), (2) имеет решение. Оптимальное управление на первом шаге определяется из решения уравнения

$$S_\alpha+R_\alpha=0 \tag{3}$$

при условии, что матрица $S_{\alpha\alpha}+R_{\alpha\alpha}$ положительно определена. Здесь S_α, R_α — первые, $S_{\alpha\alpha}$, $R_{\alpha\alpha}$ — вторые производные от функции

$$S(\alpha)=m^2+\gamma+\alpha^\tau\Upsilon\alpha$$

и

$$R(\alpha)=c^2+C+\sigma^2+\sqrt{\pi}\,\mu^2 Y\,\mathrm{Re}\,w(z),$$

$m=M(\Theta_0/\xi_0)$ — условное среднее, $\gamma=\mathrm{cov}(\Theta_0/\xi_0)$ — условная ковариация,

$$c = \mu + \alpha^{\tau} G m$$

— прогноз состояния Θ_1,

$$C = \sigma^2 + (\alpha^{\tau} G)^2 \gamma$$

— дисперсия прогноза

$$w(z) = e^{-z^2}[1 - erf(-iz)]$$

— интеграл вероятности от комплексного аргумента $z = X + iY$. Переменная z связана с остальными параметрами задачи (1), (2) по формулам

$$\sqrt{2}\, XT = -c, \quad 2Y^2 T^2 G^{\tau} [\Upsilon + G G^{\tau} (C - T^2)]^{-1}) G = 1;$$

$$T\sqrt{1 + A^{\tau} \gamma A} = \gamma A G^{\tau} \alpha.$$

Оптимальное управление на втором шаге единственное. Оно задается равенством

$$\alpha^* = -[\Upsilon + G G^{\tau} (m_1^2 + \gamma_1)]^{-1} G m_1 \gamma, \tag{4}$$

где $m_1 = M(\Theta_1/\xi_1)$, $\gamma_1 = \text{cov}(\Theta_1/\xi_1)$.

В общем случае, когда N любое натуральное число, решение задачи (1), (2) не мыслимо ввиду сложности. Приближенно она может быть решена следующим образом. Пусть m_t — условное среднее, γ_t — условная ковариация, вычисляемые согласно уравнениям фильтрации [2]. Примем $m = m_t$, $\gamma = \gamma_t$ в (3) и $m_1 = m_{N-1}$, $\gamma_1 = \gamma_{N-1}$ в (4). Тогда оптимальное в смысле

$$v_1^{\alpha} = M\left\{\sum_{\tau=t}^{t+1} (\Theta_{\tau}^2 + \alpha_{\tau}^{\tau} \Upsilon \alpha_{\tau}) + \Theta_{\tau+2}^2\right\}$$

управление на каждом шаге $t = 0, 1, \ldots, N-2$ определяется из уравнения (3), а на $t = N-1$ из равенства (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jacobs, O. L. R., Potter, R. V.* In: Recent Theoretical Developments in Control (Ed. by M. J. Gregson). London—New York—San Francisco, Academic Press, 1978, 403—419.
2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М., «Наука», 1974.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
11/II 1986