EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR. PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 4

УДК 519.6

А. МАРШАК

НЕСТАНДАРТНАЯ ФОРМА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ДЛЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С СИЛЬНО НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ УЗЛОВ

(Представил Г. Кузмин)

Введение

Целью данной работы является представление погрешности квадратурных формул (КФ), которые имеют сильное сгущение узлов у какого-либо конца отрезка. Такие КФ разумно использовать для аппроксимации интегралов от функций, имеющих особенности на конце отрезка интегрирования. Примером таких функций могут служить подынтегральные функции в интегральных экспонентах [1]

$$E_p(\tau)=\int_0^1 x^{p-2}\exp(-\tau/x)\,dx,\qquad p=1,\,2,\,\ldots,\ \tau>0.$$

Известно [2], что несмотря на то, что подынтегральные функции бесконечно раз дифференцируемы, их производные по x порядка $k>p-2$ около точки $x=0$ неограничены в совокупности по x и τ.

Однако известные формы остаточного члена КФ совсем не учитывают или учитывают слабо [3] неравномерность расположения узлов КФ.

Для широкого класса КФ в данной работе выводится форма остаточного члена, которая учитывает сильное сгущение узлов к левому концу отрезка интегрирования. Такой вид остаточного члена позволяет удачным образом строить оценки аппроксимации интеграла при помощи КФ с неравномерно расположенными узлами.

Рассмотрим последовательность КФ, приближающих интеграл

$$\int_0^1 f(x)\,dx\approx\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{(n)}f(\xi_j^{(n)}),\tag{1}$$

$$\omega_j^{(n)}\geqslant 0,\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n,\quad 0<\xi_1^{(n)}<\xi_2^{(n)}<\ldots<\xi_n^{(n)}\leqslant 1,\quad n=1,\,2,\,\ldots.$$

(В дальнейшем верхний индекс n будем опускать).

В § 1 для КФ, точных для многочленов степени $N-1$ и удовлетворяющих некоторым естественным требованиям, выводится оценка приближения интегралов от достаточно гладких на $(0,1]$ функций. Доказано, что погрешность ограничена величиной

$$c_s\int_0^1\left[\xi_1^{(1-\rho)s}x^{\rho s}+\xi_1x^{s-1}\right]|f^{(s)}(x)|\,dx$$

для всех целых положительных $s\leqslant N$. Здесь $0\leqslant\rho<1$ характеризует степень сгущения узлов у левого конца отрезка, ξ_1 — первый узел КФ, а постоянная c_s не зависит от n и f. Основное в этой оценке, конечно, то, что функция $f^{(s)}$ может иметь определенные особенности в точке $x=0$ такие, что вышестоящий интеграл конечен при некоторых значениях ϱ и s. Выделение первого узла КФ — ξ_1, говорит о важности его выбора для тех КФ, которые имеют сгущение у левого конца отрезка.

В § 3 для вышестоящего интеграла используется аппроксимация с весом в пространстве суммируемых функций [4]. При $s\leqslant N-2$ последнюю оценку удается представить в виде

$$\frac{c_{s,t}}{(N-1-s)^t}\int_0^1 [\xi_1^{(1-\rho)s}x^{\rho s+t/2}+\xi_1 x^{s-1+t/2}]\,|f^{(s+t)}(x)|\,dx,$$

где $t=1, 2, \ldots, N-s$. Наличие множителя $(N-1-s)^{-t}$ показывает зависимость малости погрешности от гладкости функции f.

В § 4 обсуждаются ограничения, накладываемые на КФ. Показано, что эти ограничения естественны и основные КФ удовлетворяют им. (В частности, для КФ Кленшоу—Куртиса см., напр., [5]).

§ 1. Одна новая форма остаточного члена

Рассмотрим КФ (1). Обозначим через $R_n(f)$ ее остаточный член, т. е.

$$R_n(f)=\int_0^1 f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{n}\omega_j f(\xi_j).$$

Нам понадобится несколько нестандартная форма этого члена. Пусть $W^{(N)}(0, 1)$ означает класс функций, имеющих на $[0, 1]$ абсолютно непрерывные производные до порядка $N-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную порядка N.

Лемма. *Пусть $f\in W^{(N)}(0,1)$, $N\geqslant 1$, и пусть КФ точна для многочленов степени $N-1$. Тогда для всех $s=1, 2, \ldots, N$ справедливо равенство*

$$R_n(f)=\frac{1}{(s-1)!}\int_0^1 \Phi_s(x)f^{(s)}(x)\,dx, \tag{2}$$

где

$$\Phi_s(x)=\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i c_i^{s-1}A_{s-i}(x)x^i, \tag{3}$$

а

$$A_m(x)=\sum_{\xi_j<x}\omega_j\xi_j^{m-1}-\frac{x^m}{m}. \tag{4}$$

(Здесь и далее c_i^s — биномиальные коэффициенты).

Доказательство. Разложим функцию f в ряд Тейлора. Учитывая, что КФ точна для многочленов степени $N-1$, получим (см., напр. [3]):

$$R_n(f)=\frac{1}{(s-1)!}\int_0^1 F_s(x)f^{(s)}(x)\,dx.$$

где

$$F_s(x)=\frac{(1-x)^s}{s}-\sum_{j=1}^{n}\omega_j K_s(\xi_j-x),\quad s=1, 2, \ldots, N,$$

$$K_s(t)=\begin{cases}t^{s-1}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Для доказательства леммы нам достаточно показать, что $F_s \equiv \Phi_s$, $s = 1, 2, \ldots, N$. Действительно. Выпишем цепочку равенств

$$F_s(x) = \frac{(1-x)^s}{s} - \sum_{\xi_j \geqslant x} \omega_j (\xi_j - x)^{s-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} (-1)^s \frac{c_i^s}{s} x^i - \sum_{\xi_j \geqslant x} \omega_j \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i c_i^{s-1} \xi_j^{s-1-i} x^i =$$

$$= (-1)^s \frac{x^s}{s} + \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i c_i^{s-1} x^i \left(\frac{1}{s-i} - \sum_{\xi_j \geqslant x} \omega_j \xi_j^{s-1-i} \right) = \tag{5}$$

$$= (-1)^s \frac{x^s}{s} + \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i c_i^{s-1} x^i \sum_{\xi_j < x} \omega_j \xi_j^{s-1-i}.$$

Для получения последнего равенства мы использовали точность КФ для многочленов степени $N-1$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \xi_j^{i-1} = \frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое в (5). Из очевидного равенства

$$\sum_{i=0}^{s} (-1)^i c_i^s = \delta_{0s}$$

следует, что при $s \neq 0$ справедлива следующая цепочка

$$-\frac{(-1)^s}{s} = -\frac{(-1)^s}{s} c_s^s + \frac{\delta_{0s}}{s} = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i c_i^s = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \frac{c_i^{s-1}}{s-i}.$$

Продолжая (5), имеем

$$F_s(x) = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i c_i^{s-1} x^i A_{s-i}(x) \equiv \Phi_s(x), \quad s = 1, 2, \ldots, N,$$

где A_m определено в (4).

Лемма доказана.

По аналогии с КФ Гаусса функцию $\Phi_s(x)$ будем называть ядром Пеано.

§ 2. Преобразование ядра Пеано

Мы сделаем дополнительное предположение относительно весов и узлов КФ. Пусть при некотором целом положительном $s \leqslant N$ имеет место равенство *

$$\text{A1)} \quad \sum_{j=1}^{l} \omega_j \xi_j^{i-1} = \frac{\xi_{l+1}^i + \xi_l^i}{2i} + O(\xi_1) \xi_l^{i-1}, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

(Это требование мы обсудим ниже в § 4).

---

* $O(\xi_1) = O(\xi_1^{(n)}) = a_n$ означает, что последовательность $a_n / \xi_1^{(n)}$ ограничена при $n \to \infty$.

Рассмотрим теперь функцию A_m. Для всех $x \in (\xi_l, \xi_{l+1}]$, $l=1, 2, \ldots, n$, $\xi_{n+1}=1$ с учетом $A1$) имеем

$$A_m(x)=\sum_{j=1}^{l}\omega_j\xi_j^{m-1}-\frac{x^m}{m}=\frac{\xi_{l+1}^m+\xi_l^m}{2m}-\frac{x^m}{m}+O(\xi_1)\xi_l^{m-1}.$$

Для того, чтобы выписать вид ядра Пеано $\Phi_s(x)$ при $x\in(\xi_l, \xi_{l+1}]$, найдем сумму $\sum\limits_{i=0}^{s-1}(-1)^i\frac{c_i^{s-1}}{s-i}\left[\frac{A^{s-i}+B^{s-i}}{2}x^i-x^s\right]$.

Цепочка несложных равенств показывает, что

$$\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\frac{c_i^{s-1}}{s-i}\left[\frac{A^{s-i}+B^{s-i}}{2}x^i-x^s\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\frac{c_i^{s-1}}{s-i}A^{s-i}x^i+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\frac{c_i^{s-1}}{s-i}B^{s-i}x^i-x^s\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\frac{c_i^{s-1}}{s-i}=$$

$$=\frac{(-1)^{s+1}}{2s}x^s+\frac{1}{2s}\sum_{i=0}^{s}(-1)^ic_i^sA^{s-i}x^i+\frac{(-1)^{s+1}}{2s}x^s+\frac{1}{2s}\sum_{i=0}^{s}(-1)^ic_i^sB^{s-i}x^i+$$

$$+\frac{(-1)^s}{s}x^s-\frac{x^s}{s}\sum_{i=0}^{s}(-1)^ic_i^s=\frac{1}{2s}[(A-x)^s+(B-x)^s].$$

Подставляя вместо A и B узлы ξ_{l+1} и ξ_l, имеем

$$\Phi_s(x)=\frac{1}{2s}[(\xi_{l+1}-x)^s+(\xi_l-x)^s]+r_s(x),\quad x\in(\xi_l,\xi_{l+1}],\tag{6}$$

где

$$|r_s(x)|=\left|\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^ic_i^{s-1}O(\xi_1)\xi_l^{s-1-i}x^i\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\xi_1\sum_{i=0}^{s-1}c_i^{s-1}\xi_l^{s-1-i}x^i=c\xi_1(\xi_l+x)^{s-1}\leqslant$$

$$\leqslant c_1\xi_1x^{s-1},\quad c_1,\ c-\text{const}.$$

Заметим, что при $x\in[0,\xi_1]$ из (3) и (4) следует

$$\Phi_s(x)=\frac{(-1)^s}{s}x^s.\tag{7}$$

Подставив (6) и (7) в (2), получим

$$R_n(f)=\frac{1}{2s!}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}}[(\xi_{j+1}-x)^s+(\xi_j-x)^s]f^{(s)}(x)\,dx+$$

$$+\frac{(-1)^s}{s!}\int_0^{\xi_1}x^sf^{(s)}(x)\,dx+\frac{1}{(s-1)!}\int_{\xi_1}^{1}r_s(x)f^{(s)}(x)\,dx,\tag{8}$$

где

$$|r_s(x)|\leqslant c\xi_1x^{s-1},\quad c=\text{const},\quad s=1, 2, \ldots, N.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы и пусть узлы и веса КФ удовлетворяют* A1) *при некотором* $s=1, 2, \ldots, N$. *Тогда остаточный член КФ представим в виде* (8).

Обозначим

$$\Delta\xi_j=\xi_{j+1}-\xi_j, \quad j=0, 1, \ldots, n, \quad \xi_0=0, \quad \xi_{n+1}=1.$$

Предположим теперь, что КФ такова, что ее узлы удовлетворяют условию

A2) $$\Delta\xi_j\leqslant c\xi_1^{1-\rho}\xi_j^{\rho}, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad 0\leqslant\rho<1, \quad c=\text{const}.$$

(Обсуждение этого условия мы также отложим до § 4). Тогда для первого слагаемого в (8) справедлива цепочка неравенств

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}}[(\xi_{j+1}-x)^s+(\xi_j-x)^s]f^{(s)}(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}}[(\xi_{j+1}-x)^s+(x-\xi_j)^s]\left|f^{(s)}(x)\,dx\right.\leqslant$$

$$\leqslant 2c\xi_1^{(1-\rho)s}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}}\xi_j^{\rho s}|f^{(s)}(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c_s\xi_1^{(1-\rho)s}\int_{\xi_1}^{1}x^{\rho s}|f^{(s)}(x)|\,dx.$$

Отсюда

$$|R_n(f)|\leqslant c_s\int_0^1 G_{s,\rho}(x)\,|f^{(s)}(x)|\,dx, \tag{9}$$

где

$$G_{s,\rho}(x)=\xi_1^{(1-\rho)s}x^{\rho s}+\xi_1 x^{s-1}, \tag{10}$$

а константа c_s не зависит от n и f. Мы доказали следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы и пусть КФ удовлетворяет при некотором натуральном* $s\leqslant N$ *условию* A1) *и при некотором* $\rho\in[0,1)$ *условию* A2). *Тогда для остаточного члена КФ справедлива оценка* (9), *где функция* $G_{s,\rho}$ *определена в* (10), *а константа* c_s *не зависит от* n *и* f.

Замечание 1. Нетрудно теоремы 1 и 2 обобщить на случай произвольного отрезка $[a, b]$, $-\infty<a<b<\infty$. В этом случае условия A1) и A2) принимают вид

A1′) $$\sum_{j=1}^{l}\omega_j\xi_j^{i-1}=\frac{\xi_{l+1}^i+\xi_l^i}{2i}-\frac{a^i}{i}+O(\xi_1-a)(\xi_l-a)^{i-1},$$

$$l=1, 2, \ldots, n, \quad i=1, 2, \ldots, s,$$

A2′) $$\Delta\xi_j\leqslant c(\xi_1-a)^{1-\rho}(\xi_j-a)^{\rho}, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad 0\leqslant\rho<1, \quad c=\text{const}.$$

Отметим, что в случае отрезка $[a, b]$ функция A_m, определенная в (4), имеет вид

$$A_m(x)=\sum_{\xi_j<x}\omega_j\xi_j^{m-1}+\frac{a^m-x^m}{m}.$$

§ 3. Аппроксимация с весом в пространстве суммируемых функций

В этом параграфе к оценке (9) применим результат Де Воре и Скотта [5], которые вывели оценку для полиномиальной аппроксимации с весом в пространстве суммируемых функций, а именно:

$$\inf_{P\in \mathfrak{P}_M} \int_{-1}^{1} |u-P|(x)\,\omega(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{t,\omega}}{M^t} \int_{-1}^{1} |u^{(t)}(x)|\,\omega(x)\,(1-x^2)^{t/2}\,dx. \tag{11}$$

Здесь $\mathfrak{P}_M$ обозначает множество многочленов степени, непревосходящей M, t — целое положительное число ($t\leqslant M+1$), $c_{t,\omega}$ — константа, независящая от M и u, а ω — положительная интегрируемая весовая функция, удовлетворяющая некоторым требованиям, которым удовлетворяет и весовая функция Якоби

$$\omega_{\alpha,\beta}(x)=(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta},\quad \alpha,\beta>-1. \tag{12}$$

Неравенство (11) справедливо для всех функций u таких, что произведение $u^{(t)}(x)\cdot(1-x^2)^{t/2}$ интегрируемо на $[-1, 1]$.

Нетрудно видеть, что оценка (11) распространяется и на весовые функции

$$\omega(x)=c_1\omega_{\alpha_1,\beta_1}(x)+c_2\omega_{\alpha_2,\beta_2}(x),$$

где $\omega_{\alpha_i,\beta_i}$, $i=1, 2$ — функции Якоби (12), а c_1 и c_2 константы.

Отобразив (11) на $[0, 1]$, получим

$$\inf_{P\in \mathfrak{P}_M} \int_{0}^{1} |u-P|(x)\,\omega(x)\,dx\leqslant \frac{c_{t,\omega}}{M^t} \int_{0}^{1} |u^{(t)}(x)|\,\omega(x)\,x^{t/2}(1-x)^{t/2}\,dx, \tag{13}$$

где

$$\omega(x)=c_1x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}+c_2x^{\alpha_2}(1-x)^{\beta_2},\quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2>-1. \tag{14}$$

Вернемся теперь к теореме 2. Ввиду того, что КФ точна для многочленов степени $N-1$, справедливо равенство

$$R_n(f)=R_n(f-P)$$

для всех $P\in\mathfrak{P}_{N-1}$. Отсюда

$$|R_n(f)|=\inf_{P\in\mathfrak{P}_{N-1}} |R_n(f-P)|\leqslant$$

$$\leqslant c_s \inf_{P\in\mathfrak{P}_{N-1-s}} \int_0^1 G_{s,\rho}(x)\,|f^{(s)}-P|(x)\,dx.$$

Из (10) следует, что функция $G_{s,\rho}$ имеет вид (14), где

$$c_1=\xi_1^{(1-\rho)s},\quad \alpha_1=\rho s,\quad \beta_1=0,\quad c_2=\xi_1,\quad \alpha_2=s-1,\quad \beta_2=0.$$

Таким образом, к правой части последнего неравенства мы можем применить оценку (13), положив $u=f^{(s)}$, $M=N-1-s$ и $\omega=G_{s,\rho}$. Имеем

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{c_{s,t}}{(N-1-s)^t} \int_0^1 G_{s,\rho}(x)\,|f^{(s+t)}(x)|\,x^{t/2}(1-x)^{t/2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{s,t}}{(N-1-s)^t} \int_0^1 G^1_{s,\rho,t}(x)\,|f^{(s+t)}(x)|\,dx,$$

где

$$G^1_{s,\rho,t}(x) = \xi_1^{(1-\rho)s} x^{\rho s + t/2} + \xi_1 x^{s-1+t/2}, \tag{15}$$

а ξ_1 — первый узел КФ.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при всех* $t=0, 1, \ldots, N-s$ $(s<N-1)$ *справедлива оценка*

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{c_{s,t}}{(N-1-s)^t} \int_0^1 G^1_{s,\rho,t}(x)\,|f^{(s+t)}(x)|\,dx, \tag{16}$$

где функция $G^1_{s,\rho,t}$ *определена в* (15).

Замечание 2. Теоремы 2 и 3 имеют место и в случае, если производные от функции f имеют особенности в левом конце отрезка $[0, 1]$. Действительно. Рассмотрим оценку (9). Она верна для всех $f \in W^{(N)}(0, 1)$. Определим пространство

$$Y^{(N)}_{s,\rho} = \{f \in C_{[0,1]} \cap C^{N-1}_{(0,1]} : \int_0^1 |f^{(i)}(x)|\,x^{\min\{\rho i, i-1\}}\,dx < \infty,\ i=1, 2, \ldots, s\}, \tag{17}$$

где $0 \leqslant \rho < 1$ и $s \leqslant N$. Это пространство содержит в себе $W^{(N)}(0, 1)$ как плотное подмножество. Возьмем произвольную функцию из $Y^{(N)}_{s,\rho}$, аппроксимируем ее последовательностью функций из $W^{(N)}(0, 1)$ и перейдем к пределу по $f \in W^{(N)}(0, 1)$ в обеих частях неравенства (9). Отсюда вытекает справедливость (9) для произвольной $f \in Y^{(N)}_{s,\rho}$.

Аналогичным рассуждением, вводя пространство

$$Y^{(N)}_{s,t,\rho} = \{f \in C_{[0,1]} \cap C^{N-1}_{(0,1]} : \int_0^1 |f^{(i+j)}(x)|\,x^{\min\{\rho i + j/2,\ i-1+j/2\}}\,dx < \infty,$$

$$i=1, 2, \ldots, s,\ j=0, 1, \ldots, t\}, \tag{17'}$$

где $0 \leqslant \rho < 1$, $t \leqslant N-s$, $s < N-1$, можно показать, что оценка (16) имеет место для всех $f \in Y^{(N)}_{s,t,\rho}$.

Отметим, что параметры s и ρ определяются в условиях А1) и А2) и их выбор зависит от конкретной КФ.

Замечание 3. Оценки (9) и (16) можно уточнить, рассматривая отдельно интегралы от 0 до ξ_1 и от ξ_1 до 1 (см. (8)), а именно, справедливы неравенства

$$|R_n(f)| \leqslant c_s \Big[\int_{\xi_1}^1 G_{s,\rho}(x)\,|f^{(s)}(x)|\,dx + \int_0^{\xi_1} x^s |f^{(s)}(x)|\,dx \tag{9'}$$

и

$$|R_n(f)| \leqslant c_{s,t} \Big[\frac{1}{(N-1-s)^t} \int_{\xi_1}^1 G^1_{s,\rho,t}(x)\,|f^{(s+t)}(x)|\,dx +$$

$$+ \int_0^{\xi_1} x^s |f^{(s)} - P^*|(x)\,dx, \tag{16'}$$

где функции $G_{s,\rho}$ и $G^1_{s,\rho,t}$ определены соответственно в (10) и (16), а $P^* \in \mathfrak{P}_{N-1-s}$ такой, что

$$\inf_{P\in\mathfrak{P}_{N-1-s}} \int_{\xi_1}^{1} G_{s,\rho}(x)\,|f^{(s)}-P|\,(x)\,dx = \int_{\xi_1}^{1} G_{s,\rho}(x)\,|f^{(s)}-P^*|\,(x)\,dx.$$

Оценка (9′) немедленно следует из (8) с учетом A2). Для вывода оценки (16′) надо к первому слагаемому в (9′) применить полиномиальную аппроксимацию с весом $H_{\xi_1}(x)\ \ G_{s,\rho}(x)$ в пространстве суммируемых на [0, 1] функций. Здесь H_ξ — функция Хевисайда

$$H_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x<\xi,\\ 1, & x\geqslant\xi. \end{cases}$$

§ 4. Обсуждение условий A1) и A2)

1. Условие A1). Предположим, что веса и узлы КФ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\xi_l^i}{i} \leqslant \sum_{j=1}^{l} \omega_j \xi_j^{i-1} \leqslant \frac{\xi_{l+1}^i}{i}, \quad l=1,\,2,\,\ldots,\,n, \quad i=1,\,2,\,\ldots,\,s. \tag{18}$$

Это условие вполне естественно и основные КФ удовлетворяют ему (например, для КФ Гаусса на [0, 1] неравенства (18) при $i=1$ непосредственно вытекают из теоремы Чебышева—Маркова—Стильтьеза [6]). Заметим, что величины, стоящие слева и справа в (18), есть $\int_0^{\xi_l} x^{i-1}\,dx$ и $\int_0^{\xi_{l+1}} x^{i-1}\,dx$, $l=1,\,2,\,\ldots,\,n$, $i=1,\,2,\,\ldots,\,s$. Отсюда асимптотическое равенство A1) требует, чтобы сумма $\sum_{j=1}^{l} \omega_j \xi_j^{i-1}$, где ω_j и ξ_j соответственно веса и узлы КФ (1), лежала «недалеко» от середины отрезка между последними интегралами, а именно на расстоянии $O(\xi_1)\,\xi_l^{i-1}$.

Отметим, что при построении оптимальной КФ на некоторых простейших классах функций требуется чтобы сумма $\sum_{j=1}^{l} \omega_j \xi_j^{i-1}$ лежала точно в середине между ограничивающими ее интегралами, т. е. чтобы $O(\xi_1)\,\xi_l^{i-1} \equiv 0$ [7]. Очевидно, что уже при $i>2$ таких КФ не существует, т. к. число уравнений (ni) превышает число неизвестных (ω_j, ξ_j, $j=1,\,2,\,\ldots,\,n$).

Рассмотрим КФ средних прямоугольников. Она точна для многочленов первого порядка. Отсюда A1) должно выполняться для $s\leqslant 2$. Действительно, при $i=1$ КФ прямоугольников является оптимальной на классе непрерывно дифференцируемых функций и сумма $\sum_{j=1}^{l} \omega_j$ $(l<n)$ лежит точно в середине между l-м и $l+1$ узлом. При $i=2$ непосредственная проверка легко устанавливает справедливость A1) (на самом деле КФ средних прямоугольников удовлетворяет A1) при всех s).

Для других КФ процесс проверки A1) более трудоемкий. В [5] доказано, что КФ Кленшоу—Куртиса на [0, 1] и ее предельный случай [8] удовлетворяют A1) при всех s.

Можно показать, что КФ Гаусса на $[0, 1]$ удовлетворяет требованию A1). Однако, это выходит за рамки данной статьи.

2. Условие A2). Параметр ϱ в условии A2) характеризует степень сгущения узлов к точке 0. Если $\varrho=0$, то случай $\Delta\xi_j\leqslant c\xi_1$ соответствует равномерному разбиению (например, КФ Ньютона—Котеса, в которых первый узел не совпадает с левым концом отрезка). Случай $\varrho=1/2$ соответствует КФ Гаусса на $[0, 1]$. Действительно, у КФ Гаусса на $[0, 1]$ $\xi_j=\sin^2\theta_j$, где $\theta_j\in\left(\frac{j-1/2}{2n+1}\pi, \frac{j}{2n+1}\pi\right)$, $j=1, 2, \ldots, n$. Отсюда

$$\Delta\xi_j\leqslant\frac{c}{n}\sqrt{\xi_j(1-\xi_j)},\quad j=1, 2, \ldots, n,\quad c=\mathrm{const},$$

что соответствует A2) при $\varrho=1/2$ (т. к. $\xi_1=O(n^{-2})$).

Хороший пример, характеризующий скорость сгущения узлов КФ к левому концу отрезка $[0,1]$, дают степенные КФ: $\xi_j=(j/n)^\theta$, $j=1, 2, \ldots, n$, $\theta\geqslant1$. Для них

$$\Delta\xi_j\leqslant c\xi_1^{1/\theta}\xi_j^{(\theta-1)/\theta},\quad j=1, 2, \ldots, n,\quad c=\mathrm{const},$$

т. е. $\varrho=1-1/\theta$ (Отсюда, в частности, видно, что $0\leqslant\varrho<1$). С увеличением θ увеличивается и ϱ и скорость сгущения узлов. Например, $\theta=1$ — равномерное разбиением, $\theta=2$ — КФ Гаусса на $[0, 1]$, КФ Кленшоу—Куртиса на $[0, 1]$ и т. д.

Обсуждение условий A1′), A2′) для произвольного конечного отрезка $[a, b]$ можно провести аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaper, H. G., Kellog, R. B.* SIAM J. Appl. Math., 32, № 1, 191—200 (1977).
2. *Вайникко Г. М., Маршак А. Л.* Изв. Вузов. Математика, № 11, 11—12 (1978).
3. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М., «Наука», 1979.
4. *De Vore, R. A., Scott, L. R.* SIAM J. Numer. Anal., 21, № 21, 400—412 (1984).
5. *Маршак А.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 35, № 3, 338—340 (1986).
6. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
7. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М., Физматгиз, 1959.
8. *Imhof, I. P.* Numer. Math., № 5, 138—141 (1963).

Институт астрофизики и физики атмосферы Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 20/I 1986

A. MARŞAK

TUGEVALT EBAÜHTLASE SÕLMEDE PAIGUTUSEGA KVADRATUURVALEMITE JÄÄKLIIKME MITTESTANDARDNE KUJU

Töös on toodud hinnangud sellise funktsiooni integraali lahendamisele, millel on singulaarsused integreerimislõigu vasakul osal, kvadratuurvalemite abil, mille sõlmede tihedus lõigu sellel serval on oluliselt suurem.

A. MARSHAK

A NONSTANDARD FORM OF REMAINDER TERM OF THE QUADRATURE RULES WITH A STRONG NON-UNIFORM LOCATION OF THE QUADRATURE POINTS

In the present paper the form of remainder term is deduced for rather general class of quadrature rules (QR). This form takes into account the strong thickening of the QR points to the left boundary of the interval $[0, 1]$. It is reasonable to use such QR for the approximation of the integral of function derivatives of which have singularities near the left boundary of the interval of integration.

The main results of this paper are formulated in Theorems 2 and 3.

Theorem 2. *Let $R_n(f)$ denote the error in n-point QR applied to $f \in Y^{(N)}_{s,\rho}$ (see* (17) *for definition). Further, let the order of QR accuracy be $N-1$ and QR satisfy assumptions* A1) *and* A2). *Then the following estimate*

$$|R_n(f)| \leqslant c_s \int_0^1 [\xi^{(1-\rho)s} x^{\rho s} + \xi_1 x^{s-1}] \, |f^{(s)}(x)| \, dx$$

takes place for integer positive $s \leqslant N$ (see A1)). *Here ξ_1 is the first point of QR and c_s is a constant independent of n, N and f. The parameter $\rho \in [0, 1)$ denotes the degree of thickening of the QR points to the point $x=0$ (see* A2)).

The main point is that derivatives of f may have certain singularities at $x=0$ such that the above integral is finite for some values of s and ρ. The presence of the first point of the QR in the estimate shows the importance of its choosing for such functions.

Theorem 3. *Let $f \in Y^{(N)}_{s,t,\rho}$ (see* (17′) *for definition) and QR that approximates the integral of f, satisfy the conditions of Theorem 2. Then the estimate* (16), *where $G^1_{s,t,\rho}$ is defined in* (15), *takes place for integer positive s and t ($s \leqslant N-2$, $t \leqslant N-s$).*

The assumptions A1) and A2) are discussed in § 4.