EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 4

УДК 514.745 : 514.752.447 https://doi.org/10.3176/phys.math.1986.4.02

М. ВЯЛЬЯС

КОНФОРМНО-ЕВКЛИДОВЫ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С ТРЕМЯ РАЗЛИЧНЫМИ ГЛАВНЫМИ КРИВИЗНАМИ В E_4

(Представил А. Хумал)

Хотя конформно-евклидовы гиперповерхности V_n в евклидовом пространстве $E_{n+1}(n\geqslant 3)$ привлекают внимание исследователей с начала XX века до наших дней, некоторые задачи остались все же нерешенными. В 1903 г. А. Финци [1] установил, что конформно-евклидовы V_3 в E_4 имеют голономную сеть линий кривизны, в остальном же их строение осталось неисследованным. В 1921 г. Дж. А. Схоутен [2] показал, что при $n>3$ у таких V_n по крайней мере $n-1$ главных кривизн должны быть равными. В 1950-х гг. появились работы В. И. Ведерникова и Л. Л. Вербицкого [3–5] о геометрическом строении этих V_n в E_{n+1}, $n>3$. Было выяснено [5], что они представляют собой либо гиперсферы, либо огибающие однопараметрических семейств гиперсфер. Показано также [3], что последние характеризуются (в рамках конформной геометрии) конформной наложимостью на гиперсферу.

Несправедливость утверждения Дж. А. Схоутена при $n=3$ показал впервые Л. Л. Вербицкий [6], построив пример конформно плоской V_3 с тремя различными главными кривизнами в том частном случае, когда одна из них тождественно равна нулю. Оказалось, что в этом случае V_3 есть конус над поверхностью V_2 постоянной кривизны в гиперсфере S_3 с центром на вершине конуса или его предельным цилиндром при бесконечном удалении вершины.

Г. М. Ланкастер [7] классифицировал решения уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци в случае изотермических V_3 в E_4 (т. е. в том частном случае конформно-евклидовых V_3, когда сеть линий кривизны является изотермической) и обнаружил среди них решение с главными кривизнами k_i, $k_1\neq k_2\neq k_3\neq k_1$, ни одна из которых не равна нулю, но оставил геометрическое строение соответствующей V_3 еще открытым. Состояние изучения задачи конформно-евклидовых V_3 в E_4 к 1980 г. характеризуется в [8] следующим образом: классификация таких V_3 еще отсутствует и является интригующей проблемой.

В нижеследующей работе изучаются конформно-евклидовы V_3 в E_4 с $k_1\neq k_2\neq k_3\neq k_1$ методом внешних форм Картана [9], доказывается их существование в общем случае и в некоторых частных случаях, выводится математический аппарат для дальнейшего их исследования. Основные результаты оформлены в виде теорем 2, 3, 4, 5. Изучение геометрического строения рассматриваемых V_n в E_4 будет дано в дальнейшем.

1. Пусть даны два римановых многообразия V_n и $\overline{V}_n$ с метрическими тензорами g и $\overline{g}$ соответственно. Отображение $f: U\to\overline{V}_n$ области $U\subset V_n$ в $\overline{V}_n$ называется конформным, если существует функция σ на U так, что

$$f^*\overline{g}=e^{\sigma}g.$$

Риманово многообразие V_n, каждая точка которого обладает окрестностью, конформно отображающейся в евклидово пространство E_n, называется (локально) конформно-евклидовым.

Тензор кривизны конформно-евклидова V_n имеет особое строение (см. [10], с. 610)

$$R_{ij,kl}=g_{ik}S_{jl}-g_{jk}S_{il}-g_{il}S_{jk}+g_{jl}S_{ik}, \tag{1.1}$$

где g_{ij} — метрический тензор на V_n, а S_{jk} — некоторый симметрический тензор на V_n, который выражается через функцию σ следующим образом:

$$S_{jk}=\nabla_j\sigma_k-\sigma_j\sigma_k+\frac{1}{2}g_{jk}g^{lm}\sigma_l\sigma_m. \tag{1.2}$$

Условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1.2) имеют вид

$$\nabla_i S_{jk}-\nabla_j S_{ik}=0. \tag{1.3}$$

Существование симметрического тензора S_{jk}, удовлетворяющего уравнениям (1.1) и (1.3), является необходимым и достаточным признаком, чтобы V_n было конформно-евклидовым ([10], с. 610).

Для конформно-плоского V_n тензор S_{jk} можно выразить через тензор Риччи R_{jk} и скалярную кривизну R следующим образом:

$$S_{jk}=\frac{1}{n-2}\left(\frac{Rg_{jk}}{2(n-1)}-R_{jk}\right). \tag{1.4}$$

Из (1.1) видно, что при $n=3$ тензоры $R_{ij,kl}$ и S_{jk} имеют по шесть существенно различных компонент и (1.1) можно рассматривать как систему линейных уравнений с шестью неизвестными S_{jk}. Исследование этой системы показывает ([11], с. 218), что такие S_{jk}, которые удовлетворяют (1.1) и имеют вид (1.4), можно всегда найти для трехмерного риманова многообразия V_3. Таким образом, из двух условий остается лишь (1.3), так как (1.1) удовлетворяется тождественно.

При $n>3$, наоборот, достаточным является уже условие (1.1), так как из тождества Бианки следует, что (1.3) является в этом случае его следствием ([10], с. 613).

2. Пусть дана гиперповерхность V_n в E_{n+1}. Присоединим к ее точке $x\in V_n$ ортонормальный подвижный репер так, что первые n его векторов касательны и идут в главных направлениях, т. е. дают канонический вид второй фундаментальной формы. Этот репер естественно называть каноническим. В формулах его инфинитезимального перемещения

$$dx=e_J\omega^J,\quad de_K=e_J\omega^J_K,\quad J,K=1,\ldots,n+1 \tag{2.1}$$

имеем $\omega_J{}^K=-\omega_K{}^J$ и

$$\omega^{n+1}=0,\quad \omega^{n+1}_p=k_p\omega^p;\quad p=1,\ldots,n \tag{2.2}$$

(по индексу p не суммировать!), где $k_1,\ldots,k_n$ — главные кривизны поверхности V_n.

Тензор кривизны гиперповерхности V_n выражается через ее главные кривизны с помощью формулы

$$R_{ij,kl}=k_ik_j(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}), \tag{2.3}$$

а тензор Риччи и скалярная кривизна

$$R_{jk}=-k_j\sum_{i\neq j}k_i\delta_{jk},\qquad R=-2\sum_{i<j}k_ik_j. \tag{2.4}$$

Из (2.3) следует, что среди $\frac{1}{12}n^2(n-1)$ существенных координат тензора кривизны отличными от нуля являются лишь координаты вида $R_{ij,ij}$.

3. Пусть V_3 является конформно-евклидовой гиперповерхностью в E_4 с тремя различными главными кривизнами, т. е. пусть $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$. Система (2.2) принимает вид

$$\omega^4=0, \qquad \omega^4_p=k_p\omega^p, \tag{3.1}$$

а ее дифференциальное продолжение приводит к

$$\omega^q_p=\Gamma_{rp}\omega^p-\Gamma_{rq}\omega^q+(k_p-k_q)^{-1}\lambda\omega^r, \tag{3.2}$$

$$dk_p=\lambda_p\omega^p+(k_p-k_q)\Gamma_{rp}\omega^q+(k_p-k_r)\Gamma_{qp}\omega^r, \tag{3.3}$$

где p, q, r — любая перестановка из чисел 1, 2, 3.

Из (2.4) следует, что $R_{pq}=0$ и

$$R_{pp}=k_p(k_p-k_1-k_2-k_3), \quad R=-2(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1).$$

Следовательно, тензор S_{jk} в силу (1.4) имеет диагональный вид, и его ненулевыми компонентами являются

$$S_{pp}=\frac{1}{2}(k_pk_q+k_pk_r-k_qk_r). \tag{3.4}$$

Вычисляя ковариантный дифференциал $\nabla S_{ij}=dS_{ij}-S_{kj}\omega_i{}^k-S_{ik}\omega_j{}^k$, получаем в каноническом репере, что

$$dS_{pp}=S_{p,pp}\omega^p+S_{q,pp}\omega^q+S_{r,pp}\omega^r, \tag{3.5}$$

$$-S_{qq}\omega^q_p-S_{pp}\omega^p_q=S_{p,pq}\omega^p+S_{q,pq}\omega^q+S_{r,pq}\omega^r, \tag{3.6}$$

где

$$S_{p,pq}=k_r(k_p-k_q)\Gamma_{rp}, \tag{3.7}$$

$$S_{q,pq}=k_r(k_q-k_p)\Gamma_{rq},$$

$$S_{r,pq}=k_r\lambda \tag{3.8}$$

являются компонентами тензора $\nabla_i S_{jk}$ в этом репере. В силу (1.3) имеют место

$$S_{p,pq}=S_{q,pp}, \tag{3.9}$$

$$S_{r,pq}=S_{p,rq}. \tag{3.10}$$

Если сделать подстановку из (3.8) в (3.10), то получается $k_r\lambda=k_p\lambda$, откуда в силу $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$ следует, что

$$\lambda=0. \tag{3.11}$$

Продифференцировав (3.4), находим коэффициенты в правых частях (3.5). Сравнивая полученное для $S_{q,pp}$ выражение с (3.7) и учитывая (3.9), получим после некоторых сокращений следующее соотношение:

$$k_r(k_p-k_q)\Gamma_{rp}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\lambda_q(k_p-k_r)+\Gamma_{rp}(k_q+k_r)(k_p-k_q)+\Gamma_{pr}(k_p-k_q)(k_r-k_q)\right].$$

Отсюда можно выразить λ_q. Если сделать замену индексов $p \leftrightarrow q$, получим формулу

$$\lambda_p = \frac{(k_p - k_q)(k_r - k_p)}{k_q - k_r} (\Gamma_{qr} - \Gamma_{rq}).$$

Так мы пришли к результатам А. Финци [1].

Теорема 1. *Конформно-евклидова гиперповерхность V_3 в E_4 с тремя различными главными кривизнами определяется в каноническом репере системой дифференциальных уравнений, состоящей из* (3.1) *и*

$$\underset{p}{\omega^q} = \Gamma_{rp}\omega^p - \Gamma_{rq}\omega^q, \tag{3.12}$$

$$dk_p = \frac{(k_p - k_q)(k_r - k_p)}{k_q - k_r} (\Gamma_{qr} - \Gamma_{rq})\omega^p + \\ + (k_p - k_q)\Gamma_{rp}\omega^q + (k_p - k_r)\Gamma_{qp}\omega^r. \tag{3.13}$$

Совместность этой системы А. Финци не установил. Геометрическая характеристика дана им лишь для условия (3.11), причем показано, что это условие равносильно тому, что сеть линии кривизны гиперповерхности V_3 голономна. В самом деле, из (3.1) и (3.2) следует, что уравнение $\omega^q = 0$ вполне интегрируемо в силу

$$d\omega^q = \omega^p \wedge \underset{p}{\omega^q} + \omega^r \wedge \underset{r}{\omega^q} = \omega^p \wedge (-\Gamma_{rq}\omega^q + (k_p - k_q)^{-1}\lambda\omega^r) + \\ + \omega^r \wedge (-\Gamma_{pq}\omega^q + (k_r - k_q)^{-1}\lambda\omega^p)$$

тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$.

В частном случае, когда одна из главных кривизн тождественно равна нулю, совместность системы теоремы 1 следует из работы Л. Л. Вербицкого [6], где установлено указанное во введении строение конформно-евклидовой гиперповерхности V_3 в этом случае.

4. Выясним теперь вопрос о совместности системы теоремы 1 в самом общем случае, применяя метод продолжения системы до инволюции по критерию Картана (см. [9], [12]).

Из (3.12) дифференциальным продолжением получаются новые уравнения

$$d\Gamma_{rp} = A_{rpp}\omega^p + \left[A_{rpq} + \frac{1}{2}(2\Gamma^2 + \Gamma_{pq}\Gamma_{qp} + k_p k_q)\right]\omega^q + 2\Gamma_{qp}\Gamma_{[rp]}\omega^r, \tag{4.1}$$

где $A_{rpq} = -A_{rqp}$ и $\Gamma_{[rp]} = \frac{1}{2}(\Gamma_{rp} - \Gamma_{pr})$. При этом внешнее дифференцирование уравнений (3.13) приводит лишь к соотношению

$$A_{rpp} = -\frac{4(k_p - k_q)\Gamma_{[qr]}\Gamma_{[rp]} + (k_r - k_q)A_{rqq}}{k_q - k_r}. \tag{4.2}$$

Следовательно, среди коэффициентов, связанных этими соотношениями, существенными являются, например, A_{rpp}, A_{pqq}, A_{qrr}, которые мы в дальнейшем будем обозначать как A_r, A_p и A_q соответственно, считая при этом, что p, q, r — четная перестановка из 1, 2, 3. Для краткости введем еще обозначение $A_{rpq} = B_r$. В этих обозначениях уравнения (4.1) пишутся в виде

$$d\Gamma_{rp} = A_r\omega^p + \left[B_r + \frac{1}{2}(2\Gamma^2_{rp} + \Gamma_{pq}\Gamma_{qp} + k_p k_q)\right]\omega^q + 2\Gamma_{pq}\Gamma_{[rp]}\omega^r, \tag{4.3}$$

$$d\Gamma_{rq}=-\frac{4(k_p-k_q)\Gamma_{[qr]}\Gamma_{[rp]}+(k_q-k_r)A_r}{k_r-k_p}\omega^q+$$

$$+\left[-B_r+\frac{1}{2}(2\Gamma^2_{rq}+\Gamma_{qp}\Gamma_{pq}+k_qk_p)\right]\omega^p+2\Gamma_{pq}\Gamma_{[rq]}\omega^r. \qquad (4.4)$$

Система уравнений (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) и (4.4) оказывается системой в инволюции. Действительно, продифференцировав (4.3) и (4.4) внешним образом, получим после некоторых упрощений для этой системы следующую систему ковариантов:

$$\Delta A_r\wedge\omega^p+\Delta B_r\wedge\omega^q=0, \qquad (4.5)$$

$$-\Delta B_r\wedge\omega^p+\frac{k_r-k_q}{k_r-k_p}\Delta A_r\wedge\omega^q=0, \qquad (4.6)$$

где $\Delta A_r=dA_r-\Theta_r\omega^r+\zeta_r\omega^p$ и $\Delta B_r=dB_r+\psi_r\omega^p-\vartheta_r\omega^r$, а Θ_r, ϑ_r, ψ_r и ζ_r являются некоторыми рациональными функциями из k_p, Γ_{pq}, A_r, B_r; в частности

$$\Theta_r=2\Gamma_{qp}A_r-\frac{8(k_r-k_p)\Gamma_{[qr]}\Gamma_{[rp]}\Gamma_{[pq]}+2(k_p-k_q)A_r\Gamma_{[rp]}}{k_q-k_r}, \qquad (4.7)$$

$$\vartheta_r=\frac{1}{2}(\Gamma_{pq}B_q+\Gamma_{qp}B_p)+2B_r\Gamma_{(pq)}+\frac{3}{4}(\Gamma_{rp}\Gamma_{pr}\Gamma_{pq}-\Gamma_{qr}\Gamma_{rq}\Gamma_{qp})+$$

$$+\frac{1}{4}(\Gamma_{pq}k_p-\Gamma_{qp}k_q)k_r, \qquad (4.8)$$

$$\psi_r=3A_r\Gamma_{rp}-B_r\Gamma_{rq}-\frac{1}{2}\Gamma_{rq}\Gamma^2_{qp}-\Gamma^2_{rp}\Gamma_{rq}-$$

$$-\frac{1}{2}\Gamma_{rq}k^2_p-2\frac{k_r-k_p}{k_q-k_r}\Gamma_{[pq]}\Gamma_{[qr]}\Gamma_{pq}+$$

$$+\frac{(k_p-k_q)(k_r-k_p)}{k_q-k_r}k_q\Gamma_{[qr]}-\frac{1}{2}\frac{k_p-k_q}{k_q-k_r}A_q\Gamma_{pq}. \qquad (4.9)$$

Матрица полярной системы для системы ковариантов (4.5) и (4.6) имеет вид

$$\left|\begin{matrix}
\xi^2 & 0 & 0 & \xi^3 & 0 & 0\\
0 & \xi^3 & 0 & 0 & \xi^1 & 0\\
0 & 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2\\
\frac{k_1-k_3}{k_1-k_2}\xi^3 & 0 & 0 & -\xi^2 & 0 & 0\\
0 & \frac{k_2-k_1}{k_2-k_3}\xi^1 & 0 & 0 & -\xi^3 & 0\\
0 & 0 & \frac{k_3-k_2}{k_3-k_1}\xi^2 & 0 & 0 & -\xi^1
\end{matrix}\right|.$$

Определитель этой матрицы при параметрических ξ^1, ξ^2 и ξ^3 отличен от нуля, значит, $s_1=6$. Так как (4.5) и (4.6) содержат шесть независимых форм ΔA_r, ΔB_r, $r=1, 2, 3$, то $q=6$. В силу равенства $q=s_1+s_2+s_3$ получим, следовательно, $s_2=s_3=0$ и число Картана $Q=s_1+2s_2+3s_3=6$.

После применения леммы Картана к системе (4.5), (4.6) получим, что интегральный элемент зависит от шести произвольных параметров, т. е. $N=6$. Таким образом, $Q=N$, и рассматриваемая система находится в инволюции. Итог можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Конформно-евклидова гиперповерхность V_3 в E_4 с тремя различными главными кривизнами определяется в каноническом репере системой уравнений* (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) *и* (4.4), *где p, q, r — любая четная перестановка из чисел 1, 2, 3. Эта система находится в инволюции и рассматриваемая V_3 существует с произволом шести функций одного аргумента.*

Класс гиперповерхностей в E_4, описываемых в теореме 2 (т. е. конформно-евклидовых V_3 с $k_1\neq k_2\neq k_3\neq k_1$), обозначим через C_3.

5. Выделим в классе C_3 некоторые подклассы. Пусть для $V_3\subset C_3$ имеет место равенство

$$\Gamma_{qr}=\Gamma_{rq} \tag{5.1}$$

при одной паре значений индексов q и r; индекс p имеет при этом фиксированное значение. Обозначим этот класс гиперповерхностей $C_3^{(1)}$. Из уравнений (4.3) и (4.4), если первое писать для $d\Gamma_{qr}$, следует, что

$$A_q=A_r=0, \tag{5.2}$$

$$B_q+B_r=\frac{1}{2}\left[\Gamma_{qp}\Gamma_{pq}+k_qk_p-\Gamma_{rp}\Gamma_{pr}-k_rk_p\right]. \tag{5.3}$$

Система ковариантов (4.5) и (4.6) в силу (4.7), (4.8) и (4.9) принимает следующий вид:

$$\Delta B_r\wedge\omega^q=0,$$

$$-\Delta B_r\wedge\omega^p+\frac{k_r-k_q}{k_r-k_p}\zeta_r\omega^p\wedge\omega^q=0,$$

откуда получаем, что

$$\Delta B_r=-\frac{k_r-k_q}{k_r-k_p}\zeta_r\omega^q, \tag{5.4}$$

или более подробно

$$dB_r=\vartheta_r\omega^r-\psi_r\omega^p-\frac{k_r-k_q}{k_r-k_p}\zeta_r\omega^q.$$

Аналогично для ΔB_q получаем

$$\Delta B_q=-\frac{k_q-k_p}{k_q-k_r}\zeta_q\omega^p, \tag{5.5}$$

и встает вопрос, согласуется ли все это с (5.3). С одной стороны,

$$\Delta B_q+\Delta B_r=-\frac{k_q-k_p}{k_q-k_r}\zeta_q\omega^p-\frac{k_r-k_q}{k_r-k_p}\zeta_r\omega^q, \tag{5.6}$$

а с другой,

$$\Delta B_q+\Delta B_r=d\,(B_q+B_r)+(\psi_q-\vartheta_r)\,\omega^r+\psi_r\omega^p-\vartheta_q\omega^q, \tag{5.7}$$

где первое слагаемое в правой части следует вычислить из (5.3).

В общем случае нам не понадобились выражения коэффициентов ζ_r, ζ_q. Теперь они нужны. Чтобы их получить, продифференцируем формулы (4.4) внешним образом, учитывая (5.2) и (5.3), и получим выражения для

$$\frac{k_r-k_q}{k_r-k_p}\zeta_r=-\Big[\frac{1}{2}\Gamma_{qp}A_p-\frac{1}{2}\Gamma^2_{pq}\Gamma_{rp}-\frac{1}{2}k^2_q\Gamma_{rp}+B_r\Gamma_{rp}-$$

$$-\Gamma^2_{qr}\Gamma_{rp}+\frac{(k_q-k_r)(k_p-k_q)}{k_r-k_p}k_p\Gamma_{[rp]}\Big], \tag{5.8}$$

$$\frac{k_q-k_p}{k_q-k_r}\zeta_q=-\Big[B_q-\Gamma^2_{qp}-\frac{1}{2}\Gamma^2_{rp}-\frac{1}{2}k^2_p\Big]\Gamma_{qr}. \tag{5.9}$$

Сделав теперь нужные подстановки в правые части формул (5.6) и (5.7), можно после необходимых вычислений убедиться, что эти правые части совпадают и согласие с (5.3) достигнуто: из (5.3) новых соотношений не получается.

В итоге система ковариантов (4.5), (4.6) вместе с системой, полученной из нее заменой r на q, приводит лишь к одному пфаффовому уравнению:

$$dB_r=\Big[\frac{1}{2}\Gamma_{qp}B_p+\Big(\frac{1}{2}\Gamma_{pq}+\Gamma_{qp}\Big)B_r+\frac{1}{4}\Gamma^2_{pq}\Gamma_{qp}+$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma_{rp}\Gamma_{pr}\Gamma_{pq}-\frac{3}{4}\Gamma^2_{qr}\Gamma_{qp}+\frac{1}{4}(k_p\Gamma_{pq}-k_r\Gamma_{qp})k_q\Big]\omega^r+$$

$$+\Big[B_r+\frac{1}{2}\Gamma^2_{qp}+\Gamma^2_{rp}+\frac{1}{2}k^2_p\Big]\Gamma_{qr}\omega^p+$$

$$+\Big[\frac{1}{2}\Gamma_{qp}A_p-\frac{1}{2}\Gamma^2_{pq}\Gamma_{rp}-\frac{1}{2}k^2_q\Gamma_{rp}+B_r\Gamma_{rp}-$$

$$-\Gamma^2_{qr}\Gamma_{rp}+\frac{(k_q-k_r)(k_p-k_q)}{k_r-k_p}k_p\Gamma_{[rp]}\Big]\omega^q. \tag{5.10}$$

Если теперь продифференцировать (5.10) внешним образом, то после некоторых вычислений получаем

$$\Gamma_{qp}(\Delta A_p\wedge\omega^q+\Delta B_p\wedge\omega^r)=0. \tag{5.11}$$

Кроме того, мы имеем систему ковариантов, полученную из (4.5) и (4.6) заменой r на p, где p, напомним, имеет фиксированное значение

$$\Delta A_p\wedge\omega^q+\Delta B_p\wedge\omega^r=0, \tag{5.12}$$

$$-\Delta B_p\wedge\omega^q+\frac{k_p-k_r}{k_p-k_q}\Delta A_p\wedge\omega^r=0. \tag{5.13}$$

Как видно, (5.11) удовлетворяется в силу (5.12) и, следовательно, система ковариантов рассматриваемой системы состоит из (5.12) и (5.13). Матрица ее полярной системы имеет вид

$$\begin{array}{cc} \xi^q & \xi^r \\ \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{cc} \xi^q & \xi^r \\ \dfrac{k_p-k_r}{k_p-k_q}\xi^r & -\xi^q \end{array}\right|.$$

Ранг этой матрицы $s_1=2$. Система (5.12), (5.13) содержит две независимые формы, следовательно, $q=2$, $s_2=s_3=0$ и $Q=s_1=2$. Общий интегральный элемент этой системы зависит от двух произвольных параметров, значит $N=2$. Так как $Q=N$, то система находится в инволюции. Мы придем к следующему результату.

Теорема 3. *Конформно-евклидова гиперповерхность* V_3 *класса* $C_3^{(1)}$ *определяется в каноническом репере системой, которая состоит из уравнений* (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) *и* (4.4), *где* p, q, r — *любая четная перестановка из* 1, 2, 3, *при конечных соотношениях* (5.1), (5.2) *и* (5.3), *где* p, q, r — *некоторая конкретная перестановка из* 1, 2, 3 *и из дополнительного дравненя* (5.10), *где* r *взят из этой перестановки. Эта система находится в инволюции и рассматриваемая* V_3 *существует с произволом двух функций одного аргумента.*

6. Пусть для $V_3 \subset C_3$ имеют место равенства

$$\Gamma_{qr}=\Gamma_{rq} \quad \text{и} \quad \Gamma_{rp}=\Gamma_{pr} \tag{6.1}$$

при одной конкретной перестановке индексов 1, 2, 3. Обозначим рассматриваемый класс конформно-евклидовых гиперповерхностей $C_3^{(2)}$. Из уравнений (4.3) и (4.4) непосредственно следует, что

$$A_p=A_q=A_r=0, \tag{6.2}$$

$$B_r+B_p=\frac{1}{2}\left[\Gamma^2_{qr}+k_r k_q-\Gamma_{pq}\Gamma_{qp}-k_p k_q\right], \tag{6.3}$$

$$B_r+B_q=\frac{1}{2}\left[\Gamma_{pq}\Gamma_{qp}+k_p k_q-\Gamma^2_{rp}-k_r k_p\right]. \tag{6.4}$$

Здесь также получим формулы (5.4) и (5.5), причем дополнительно из системы ковариантов (5.12) и (5.13) следует, что

$$\Delta B_p=-\frac{k_p-k_r}{k_p-k_q}\zeta_p\omega^r. \tag{6.5}$$

Как и выше, получим, что (5.4), (5.5) и (6.5) согласуются с (6.3) и (6.4). Система ковариантов (4.5) и (4.6) вместе с теми, которые получаются, если заменить в них r на p и затем r на q, сводится после применения леммы Картана к единственному пфаффовому уравнению (5.10), где следует, конечно, учесть (6.1)—(6.3). Условие (5.11), которое появляется при его внешнем дифференцировании, в силу (6.1) и (4.7) принимает вид

$$\Gamma_{qp}\Delta B_p\wedge\omega^r=0$$

и удовлетворяется в силу (6.5) тождественно. Получается следующий результат.

Теорема 4. *Конформно-евклидова гиперповерхность класса определяется в каноническом репере системой, которая состоит из уравнений* (3.1), (3.12), (3.13), (4.3), (4.4), г*де* p, q, r — *некоторая четная перестановка чисел* 1, 2, 3 *при конечных соотношениях* (6.1)—(6.4), *где* p, q, r — *некоторая конкретная перестановка чисел 1, 2, 3, и из дополнительного уравнения* (5.10), *где* r *взят из этой перестановки. Эта система вполне интегрируема, и рассматриваемая* V_3 *существует с произволом постоянных.*

7. Пусть для $V_3 \subset C_3$ имеет место $\Gamma_{rq}=\Gamma_{qr}$ при четных перестановках p, q, r индексов 1, 2, 3. Класс соответствующих конформно-евклидовых V_3 обозначим через $C_3^{(3)}$. Из уравнений (4.3) и (4.4) получим теперь

$$A_p=A_q=A_r=0.$$

Введем для краткости обозначения $\Gamma_{rq}=\Gamma_{qr}=l_p$. К уравнениям (6.3) и (6.4) прибавляется еще одно и в итоге получается система линейных уравнений

$$B_p+B_q=\frac{1}{2}(l_q^2-l_p^2+k_pk_r-k_qk_r),$$

$$B_q+B_r=\frac{1}{2}(l_r^2-l_q^2+k_qk_p-k_rk_p),$$

$$B_p\qquad+B_r=\frac{1}{2}(l_p^2-l_r^2+k_rk_q-k_pk_q).$$

Отсюда

$$B_q=\frac{1}{2}(l_r^2-l_p^2+k_pk_q-k_rk_q),$$

причем B_p и B_r получаются в результате четных перестановок. Систему уравнений (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) и (4.4) при полученных конечных соотношениях можно переписать следующим образом:

$$\omega^4=0,\quad \omega_p^4=k_p\omega^p,\quad \omega_p^q=l_q\omega^p-l_p\omega^q, \tag{7.1}$$

$$dk_p=l_q(k_p-k_q)\,\omega^q+l_r(k_p-k_r)\,\omega^r, \tag{7.2}$$

$$dl_p=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{3}l_i^2+k_p(k_q+k_r)-k_qk_r\right]\omega^p. \tag{7.3}$$

Нетрудно проверить, что эта система вполне интегрируема.

Теорема 5. *Конформно-евклидова гиперповерхность V_3 класса $C_3^{(3)}$ определяется в каноническом репере вполне интегрируемой системой* (7.1), (7.2) *и* (7.3), *где p, q, r — любая четная перестановка чисел* 1, 2, 3, *и рассматриваемая V_3 существует с произволом постоянных.*

Отметим, что Г. М. Ланкастер [7] выделил именно этот класс конформно-евклидовых гиперповерхностей в E_4.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Лумисте за постановку проблемы и за руководство работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Finzi, A.* Atti Inst. Veneto, **62**, 1049—1062 (1902—1903).
2. *Schouten, J. A.* Math. Z., **11**, 58—88 (1921).
3. *Ведерников В. И.* Изв. ВУЗов. Математика, № 1, 89—97 (1957).
4. *Ведерников В. И.* Изв. ВУЗов. Математика, № 6, 58—72 (1958).
5. *Вербицкий Л. Л.* Тр. семин. по вект. и тензорн. анал., вып. 9, 146—182 (1952).
6. *Вербицкий Л. Л.* Тр. семин. по вект. и тензорн. анал., вып. 12, 339—354 (1963).
7. *Lancaster, G. M.* Duke Math. J., **40**, № 1, 1—8 (1973).
8. *Cecil, T. E., Ryan, P. J.* Can. J. Math., **32**, № 4, 767—782 (1980).
9. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
10. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1964.
11. *Схоутен И. А., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 2. М., ИЛ, 1948.
12. *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М., МГУ, 1962.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
4/IV 1985

M. VÄLJAS

KOLME ERINEVA PEAKÕVERUSEGA KONFORMSELT EUKLEIDILISED HÜPERPINNAD RUUMIS E_4

On tõestatud üldjuhul kolme erineva peakõverusega konformselt eukleidiliste hüperpindade olemasolu eukleidilises ruumis E_4. Esitatakse selliste hüperpindade klassifikatsioon ja näidatakse, et vaadeldavad klassid ei ole tühjad (teoreemid 2, 3, 4, 5).

M. VÄLJAS

CONFORMALLY-FLAT HYPERSURFACES WITH THREE DISTINCT PRINCIPAL CURVATURES IN E_4

The investigation of conformally-flat hypersurfaces V_n in a Euclidean space E_{n+1} was initiated by A. Finzi [1], who considered the case $n=3$ (see Theorem 1). In [2] J. A. Schouten proved the theorem, stating that $n-1$ principal curvatures k_i at each point of such V_n in E_{n+1} are equal if $n>3$. Geometrically these hypersurfaces were characterized in [3–5]. The first example of conformally-flat V_3 in E_4 with three distinct principal curvatures was given by L. L. Verbitski [6] in the special case when one principal curvature is zero. Later G. M. Lancaster [7] found a conformally-flat solution for Gauss and Petersen-Codazzi equations with $k_1k_2k_3\neq 0$ in the case when V_3 is isothermal (i. e. the net of curvature lines of V_3 is isothermal). In general, the existence and geometrical characterization of conformally-flat V_3 in E_4 still remain unknown.

In this paper we prove the existence of conformally-flat hypersurfaces in a general case and in some special cases. The main results are:

T h e o r e m 2. *Conformally-flat hypersurface V_3 in E_4 with three distinct principal curvatures is determined in its canonical moving frame by system of equations* (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) *an* (4.4), *where p, q, r is arbitrary even permutation of* 1, 2, 3. *The system is in involution and its solution depends on six arbitrary functions of one variable.*

The class of hypersurfaces V_3 in E_4 described in this theorem, we denote by C_3. The classes of conformally-flat hypersurfaces with $\Gamma_{[pq]}=0$ for one, two or three pairs of (p, q) are denoted by $C_3^{(1)}$, $C_3^{(2)}$ or $C_3^{(3)}$, respectively.

T h e o r e m 3. *Conformally-flat hypersurface V_3 of class $C_3^{(1)}$ is determined in its canonical moving frame by system of equations* (3.1), (3.12), (3.13), (4.3), (4.4), *where p, q, r is arbitrary even permutation of* 1, 2, 3, *with conditions* (5.1), (5.2), (5.3), *where p, q, r is a fixed permutation of* 1, 2, 3, *and by supplementary equation* (5.10), *where r is taken from this fixed permutation. The system is in involution and its solution depends on two functions of one variable.*

T h e o r e m 4. *Conformally-flat hypersurface V_3 of class $C_3^{(2)}$ is determined in its canonical moving frame by system of equations* (3.1), (3.12), (3.13), (4.3), (4.4), *where p, q, r is arbitrary even permutation of* 1, 2, 3 *with conditions* (6.1)—(6.4), *where p, q, r is a fixed permutation of* 1, 2, 3 *and by supplementary equation* (5.10), *where r is taken from this fixed permutation. The system is totally integrable.*

T h e o r e m 5. *Conformally-flat hypersurface V_3 of class $C_3^{(3)}$ is determined in its canonical moving frame by totally integrable system* (7.1)—(7.3), *where p, q, r is arbitrary even permutation of* 1, 2, 3.

Geometrical description of conformally-flat hypersurfaces of these classes will be given in the next papers.