

УДК 514.745 : 514.752.447

М. ВЯЛЬЯС

КОНФОРМНО-ЕВКЛИДОВЫ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С ТРЕМЯ РАЗЛИЧНЫМИ ГЛАВНЫМИ КРИВИЗНАМИ В E_4

(Представил А. Хумал)

Хотя конформно-евклидовы гиперповерхности V_n в евклидовом пространстве E_{n+1} ($n \geq 3$) привлекают внимание исследователей с начала XX века до наших дней, некоторые задачи остались все же нерешенными. В 1903 г. А. Финци [1] установил, что конформно-евклидовы V_3 в E_4 имеют голономную сеть линий кривизны, в остальном же их строение осталось неисследованным. В 1921 г. Дж. А. Схоутен [2] показал, что при $n > 3$ у таких V_n по крайней мере $n-1$ главных кривизн должны быть равными. В 1950-х гг. появились работы В. И. Ведерникова и Л. Л. Вербицкого [3-5] о геометрическом строении этих V_n в E_{n+1} , $n > 3$. Было выяснено [5], что они представляют собой либо гиперсферы, либо огибающие однопараметрических семейств гиперсфер. Показано также [3], что последние характеризуются (в рамках конформной геометрии) конформной наложимостью на гиперсферу.

Несправедливость утверждения Дж. А. Схоутена при $n=3$ показал впервые Л. Л. Вербицкий [6], построив пример конформно плоской V_3 с тремя различными главными кривизнами в том частном случае, когда одна из них тождественно равна нулю. Оказалось, что в этом случае V_3 есть конус над поверхностью V_2 постоянной кривизны в гиперсфере S_3 с центром на вершине конуса или его предельным цилиндром при бесконечном удалении вершины.

Г. М. Ланкастер [7] классифицировал решения уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци в случае изотермических V_3 в E_4 (т. е. в том частном случае конформно-евклидовых V_3 , когда сеть линий кривизны является изотермической) и обнаружил среди них решение с главными кривизнами k_i , $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$, ни одна из которых не равна нулю, но оставил геометрическое строение соответствующей V_3 еще открытым. Состояние изучения задачи конформно-евклидовых V_3 в E_4 к 1980 г. характеризуется в [8] следующим образом: классификация таких V_3 еще отсутствует и является интригующей проблемой.

В нижеследующей работе изучаются конформно-евклидовы V_3 в E_4 с $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$ методом внешних форм Картана [9], доказываются их существование в общем случае и в некоторых частных случаях, выводится математический аппарат для дальнейшего их исследования. Основные результаты оформлены в виде теорем 2, 3, 4, 5. Изучение геометрического строения рассматриваемых V_n в E_4 будет дано в дальнейшем.

1. Пусть даны два римановых многообразия V_n и \bar{V}_n с метрическими тензорами g и \bar{g} соответственно. Отображение $f: U \rightarrow \bar{V}_n$ области $U \subset V_n$ в \bar{V}_n называется конформным, если существует функция σ на U так, что

$$f^* \bar{g} = e^\sigma g.$$

Риманово многообразие V_n , каждая точка которого обладает окрестностью, конформно отображающейся в евклидово пространство E_n , называется (локально) конформно-евклидовым.

Тензор кривизны конформно-евклидова V_n имеет особое строение (см. [10], с. 610)

$$R_{ij,hl} = g_{ih}S_{jl} - g_{jh}S_{il} - g_{il}S_{jh} + g_{jl}S_{ih}, \quad (1.1)$$

где g_{ij} — метрический тензор на V_n , а S_{jh} — некоторый симметрический тензор на V_n , который выражается через функцию σ следующим образом:

$$S_{jh} = \nabla_j \sigma_h - \sigma_j \sigma_h + \frac{1}{2} g_{jh} g^{lm} \sigma_l \sigma_m. \quad (1.2)$$

Условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1.2) имеют вид

$$\nabla_i S_{jh} - \nabla_j S_{ih} = 0. \quad (1.3)$$

Существование симметрического тензора S_{jh} , удовлетворяющего уравнениям (1.1) и (1.3), является необходимым и достаточным признаком, чтобы V_n было конформно-евклидовым ([10], с. 610).

Для конформно-плоского V_n тензор S_{jh} можно выразить через тензор Риччи R_{jh} и скалярную кривизну R следующим образом:

$$S_{jh} = \frac{1}{n-2} \left(\frac{R g_{jh}}{2(n-1)} - R_{jh} \right). \quad (1.4)$$

Из (1.1) видно, что при $n=3$ тензоры $R_{ij,kl}$ и S_{jh} имеют по шесть существенно различных компонент и (1.1) можно рассматривать как систему линейных уравнений с шестью неизвестными S_{jh} . Исследование этой системы показывает ([11], с. 218), что такие S_{jh} , которые удовлетворяют (1.1) и имеют вид (1.4), можно всегда найти для трехмерного риманова многообразия V_3 . Таким образом, из двух условий остается лишь (1.3), так как (1.1) удовлетворяется тождественно.

При $n > 3$, наоборот, достаточным является уже условие (1.1), так как из тождества Бианки следует, что (1.3) является в этом случае его следствием ([10], с. 613).

2. Пусть дана гиперповерхность V_n в E_{n+1} . Присоединим к ее точке $x \in V_n$ ортонормальный подвижный репер так, что первые n его векторов касательны и идут в главных направлениях, т. е. дают канонический вид второй фундаментальной формы. Этот репер естественно называть каноническим. В формулах его инфинитезимального перемещения

$$dx = e_J \omega^J, \quad de_K = e_J \omega_K^J, \quad J, K = 1, \dots, n+1 \quad (2.1)$$

имеем $\omega_J^K = -\omega_K^J$ и

$$\omega^{n+1} = 0, \quad \omega_p^{n+1} = k_p \omega^p; \quad p = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

(по индексу p не суммировать!), где k_1, \dots, k_n — главные кривизны поверхности V_n .

Тензор кривизны гиперповерхности V_n выражается через ее главные кривизны с помощью формулы

$$R_{ij,kl} = k_i k_j (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.3)$$

а тензор Риччи и скалярная кривизна

$$R_{jh} = -k_j \sum_{i \neq j} k_i \delta_{jh}, \quad R = -2 \sum_{i < j} k_i k_j. \quad (2.4)$$

Из (2.3) следует, что среди $\frac{1}{12}n^2(n-1)$ существенных координат тензора кривизны отличными от нуля являются лишь координаты вида $R_{ij,ij}$.

3. Пусть V_3 является конформно-евклидовой гиперповерхностью в E_4 с тремя различными главными кривизнами, т. е. пусть $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$. Система (2.2) принимает вид

$$\omega^k = 0, \quad \omega_p^k = k_p \omega^p, \quad (3.1)$$

а ее дифференциальное продолжение приводит к

$$\omega_p^q = \Gamma_{rp} \omega^p - \Gamma_{rq} \omega^q + (k_p - k_q)^{-1} \lambda \omega^r, \quad (3.2)$$

$$dk_p = \lambda_p \omega^p + (k_p - k_q) \Gamma_{rp} \omega^q + (k_p - k_r) \Gamma_{qp} \omega^r, \quad (3.3)$$

где p, q, r — любая перестановка из чисел 1, 2, 3.

Из (2.4) следует, что $R_{pq} = 0$ и

$$R_{pp} = k_p(k_p - k_1 - k_2 - k_3), \quad R = -2(k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1).$$

Следовательно, тензор S_{jh} в силу (1.4) имеет диагональный вид, и его ненулевыми компонентами являются

$$S_{pp} = \frac{1}{2}(k_p k_q + k_p k_r - k_q k_r). \quad (3.4)$$

Вычисляя ковариантный дифференциал $\nabla S_{ij} = dS_{ij} - S_{kj} \omega_i^k - S_{ik} \omega_j^k$, получаем в каноническом репере, что

$$dS_{pp} = S_{p,pp} \omega^p + S_{q,pp} \omega^q + S_{r,pp} \omega^r, \quad (3.5)$$

$$-S_{qq} \omega_p^q - S_{pp} \omega_q^p = S_{p,pq} \omega^p + S_{q,pq} \omega^q + S_{r,pq} \omega^r, \quad (3.6)$$

где

$$S_{p,pq} = k_r(k_p - k_q) \Gamma_{rp}, \quad (3.7)$$

$$S_{q,pq} = k_r(k_q - k_p) \Gamma_{rq},$$

$$S_{r,pq} = k_r \lambda. \quad (3.8)$$

являются компонентами тензора $\nabla_i S_{jh}$ в этом репере. В силу (1.3) имеют место

$$S_{p,pq} = S_{q,pp}, \quad (3.9)$$

$$S_{r,pq} = S_{p,rq}. \quad (3.10)$$

Если сделать подстановку из (3.8) в (3.10), то получается $k_r \lambda = k_p \lambda$, откуда в силу $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$ следует, что

$$\lambda = 0. \quad (3.11)$$

Продифференцировав (3.4), находим коэффициенты в правых частях (3.5). Сравнивая полученное для $S_{q,pp}$ выражение с (3.7) и учитывая (3.9), получим после некоторых сокращений следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & k_r(k_p - k_q) \Gamma_{rp} = \\ & = \frac{1}{2} [\lambda_q(k_p - k_r) + \Gamma_{rp}(k_q + k_r)(k_p - k_q) + \Gamma_{pr}(k_p - k_q)(k_r - k_q)]. \end{aligned}$$

Отсюда можно выразить λ_q . Если сделать замену индексов $p \leftrightarrow q$, получим формулу

$$\lambda_p = \frac{(k_p - k_q)(k_r - k_p)}{k_q - k_r} (\Gamma_{qr} - \Gamma_{rq}).$$

Так мы пришли к результатам А. Финци [1].

Теорема 1. Конформно-евклидова гиперповерхность V_3 в E_4 с тремя различными главными кривизнами определяется в каноническом репере системой дифференциальных уравнений, состоящей из (3.1) и

$$\omega_p^q = \Gamma_{rp} \omega^p - \Gamma_{rq} \omega^q, \quad (3.12)$$

$$dk_p = \frac{(k_p - k_q)(k_r - k_p)}{k_q - k_r} (\Gamma_{qr} - \Gamma_{rq}) \omega^p + \\ + (k_p - k_q) \Gamma_{rp} \omega^q + (k_p - k_r) \Gamma_{qp} \omega^r. \quad (3.13)$$

Совместность этой системы А. Финци не установил. Геометрическая характеристика дана им лишь для условия (3.11), причем показано, что это условие равносильно тому, что сеть линии кривизны гиперповерхности V_3 голономна. В самом деле, из (3.1) и (3.2) следует, что уравнение $\omega^q = 0$ вполне интегрируемо в силу

$$d\omega^q = \omega^p \wedge \omega_p^q + \omega^r \wedge \omega_r^q = \omega^p \wedge (-\Gamma_{rq} \omega^q + (k_p - k_q)^{-1} \lambda \omega^r) + \\ + \omega^r \wedge (-\Gamma_{pq} \omega^q + (k_r - k_q)^{-1} \lambda \omega^p)$$

тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$.

В частном случае, когда одна из главных кривизн тождественно равна нулю, совместность системы теоремы 1 следует из работы Л. Л. Вербицкого [6], где установлено указанное во введении строение конформно-евклидовой гиперповерхности V_3 в этом случае.

4. Выясним теперь вопрос о совместности системы теоремы 1 в самом общем случае, применяя метод продолжения системы до инволюции по критерию Картана (см. [9], [12]).

Из (3.12) дифференциальным продолжением получают новые уравнения

$$d\Gamma_{rp} = A_{rpp} \omega^p + \left[A_{rpq} + \frac{1}{2} (2\Gamma_{rp}^2 + \Gamma_{pq} \Gamma_{qp} + k_p k_q) \right] \omega^q + 2\Gamma_{qp} \Gamma_{[rp]} \omega^r, \quad (4.1)$$

где $A_{rpp} = -A_{rqp}$ и $\Gamma_{[rp]} = \frac{1}{2} (\Gamma_{rp} - \Gamma_{pr})$. При этом внешнее дифференцирование уравнений (3.13) приводит лишь к соотношению

$$A_{rpp} = - \frac{4(k_p - k_q) \Gamma_{[qr]} \Gamma_{[rp]} + (k_r - k_q) A_{rqq}}{k_q - k_r}. \quad (4.2)$$

Следовательно, среди коэффициентов, связанных этими соотношениями, существенными являются, например, A_{rpp} , A_{pqq} , A_{qrr} , которые мы в дальнейшем будем обозначать как A_r , A_p и A_q соответственно, считая при этом, что p, q, r — четная перестановка из 1, 2, 3. Для краткости введем еще обозначение $A_{rpp} = B_r$. В этих обозначениях уравнения (4.1) пишутся в виде

$$d\Gamma_{rp} = A_r \omega^p + \left[B_r + \frac{1}{2} (2\Gamma_{rp}^2 + \Gamma_{pq} \Gamma_{qp} + k_p k_q) \right] \omega^q + 2\Gamma_{pq} \Gamma_{[rp]} \omega^r, \quad (4.3)$$

$$d\Gamma_{rq} = -\frac{4(k_p - k_q)\Gamma_{[qr]}\Gamma_{[rp]} + (k_q - k_r)A_r}{k_r - k_p} \omega^q +$$

$$+ \left[-B_r + \frac{1}{2} (2\Gamma_{rq}^2 + \Gamma_{qp}\Gamma_{pq} + k_q k_p) \right] \omega^p + 2\Gamma_{pq}\Gamma_{[rq]}\omega^r. \quad (4.4)$$

Система уравнений (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) и (4.4) оказывается системой в инволюции. Действительно, продифференцировав (4.3) и (4.4) внешним образом, получим после некоторых упрощений для этой системы следующую систему ковариантов:

$$\Delta A_r \wedge \omega^p + \Delta B_r \wedge \omega^q = 0, \quad (4.5)$$

$$-\Delta B_r \wedge \omega^p + \frac{k_r - k_q}{k_r - k_p} \Delta A_r \wedge \omega^q = 0, \quad (4.6)$$

где $\Delta A_r = dA_r - \Theta_r \omega^r + \zeta_r \omega^p$ и $\Delta B_r = dB_r + \psi_r \omega^p - \vartheta_r \omega^r$, а Θ_r , ϑ_r , ψ_r и ζ_r являются некоторыми рациональными функциями из k_p , Γ_{pq} , A_r , B_r ; в частности

$$\Theta_r = 2\Gamma_{qp}A_r - \frac{8(k_r - k_p)\Gamma_{[qr]}\Gamma_{[rp]}\Gamma_{[pq]} + 2(k_p - k_q)A_r\Gamma_{[rp]}}{k_q - k_r}, \quad (4.7)$$

$$\vartheta_r = \frac{1}{2} (\Gamma_{pq}B_q + \Gamma_{qp}B_p) + 2B_r\Gamma_{(pq)} + \frac{3}{4} (\Gamma_{rp}\Gamma_{pr}\Gamma_{pq} - \Gamma_{qr}\Gamma_{rq}\Gamma_{qp}) +$$

$$+ \frac{1}{4} (\Gamma_{pq}k_p - \Gamma_{qp}k_q)k_r, \quad (4.8)$$

$$\psi_r = 3A_r\Gamma_{rp} - B_r\Gamma_{rq} - \frac{1}{2}\Gamma_{rq}\Gamma_{qp}^2 - \Gamma_{rp}^2\Gamma_{rq} -$$

$$- \frac{1}{2}\Gamma_{rq}k_p^2 - 2\frac{k_r - k_p}{k_q - k_r}\Gamma_{[pq]}\Gamma_{[qr]}\Gamma_{pq} +$$

$$+ \frac{(k_p - k_q)(k_r - k_p)}{k_q - k_r}k_q\Gamma_{[qr]} - \frac{1}{2}\frac{k_p - k_q}{k_q - k_r}A_q\Gamma_{pq}. \quad (4.9)$$

Матрица полярной системы для системы ковариантов (4.5) и (4.6) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & 0 & 0 & \xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^3 & 0 & 0 & \xi^1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 \\ \frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_2} \xi^3 & 0 & 0 & -\xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2 - k_1}{k_2 - k_3} \xi^1 & 0 & 0 & -\xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1} \xi^2 & 0 & 0 & -\xi^1 \end{vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы при параметрических ξ^1 , ξ^2 и ξ^3 отличен от нуля, значит, $s_1 = 6$. Так как (4.5) и (4.6) содержат шесть независимых форм ΔA_r , ΔB_r , $r = 1, 2, 3$, то $q = 6$. В силу равенства $q = s_1 + s_2 + s_3$ получим, следовательно, $s_2 = s_3 = 0$ и число Картана $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 6$.

После применения леммы Картана к системе (4.5), (4.6) получим, что интегральный элемент зависит от шести произвольных параметров, т. е. $N=6$. Таким образом, $Q=N$, и рассматриваемая система находится в инволюции. Итог можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Конформно-евклидова гиперповерхность V_3 в E_4 с тремя различными главными кривизнами определяется в каноническом репере системой уравнений (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) и (4.4), где p, q, r — любая четная перестановка из чисел 1, 2, 3. Эта система находится в инволюции и рассматриваемая V_3 существует с произволом шести функций одного аргумента.

Класс гиперповерхностей в E_4 , описываемых в теореме 2 (т. е. конформно-евклидовых V_3 с $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$), обозначим через C_3 .

5. Выделим в классе C_3 некоторые подклассы. Пусть для $V_3 \subset C_3$ имеет место равенство

$$\Gamma_{qr} = \Gamma_{rq} \quad (5.1)$$

при одной паре значений индексов q и r ; индекс p имеет при этом фиксированное значение. Обозначим этот класс гиперповерхностей $C_3^{(1)}$. Из уравнений (4.3) и (4.4), если первое писать для $d\Gamma_{qr}$, следует, что

$$A_q = A_r = 0, \quad (5.2)$$

$$B_q + B_r = \frac{1}{2} [\Gamma_{qp}\Gamma_{pq} + k_q k_p - \Gamma_{rp}\Gamma_{pr} - k_r k_p]. \quad (5.3)$$

Система ковариантов (4.5) и (4.6) в силу (4.7), (4.8) и (4.9) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta B_r \wedge \omega^q &= 0, \\ -\Delta B_r \wedge \omega^p + \frac{k_r - k_q}{k_r - k_p} \zeta_r \omega^p \wedge \omega^q &= 0, \end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$\Delta B_r = -\frac{k_r - k_q}{k_r - k_p} \zeta_r \omega^q, \quad (5.4)$$

или более подробно

$$dB_r = \vartheta_r \omega^r - \psi_r \omega^p - \frac{k_r - k_q}{k_r - k_p} \zeta_r \omega^q.$$

Аналогично для ΔB_q получаем

$$\Delta B_q = -\frac{k_q - k_p}{k_q - k_r} \zeta_q \omega^p, \quad (5.5)$$

и встает вопрос, согласуется ли все это с (5.3). С одной стороны,

$$\Delta B_q + \Delta B_r = -\frac{k_q - k_p}{k_q - k_r} \zeta_q \omega^p - \frac{k_r - k_q}{k_r - k_p} \zeta_r \omega^q, \quad (5.6)$$

а с другой,

$$\Delta B_q + \Delta B_r = d(B_q + B_r) + (\psi_q - \vartheta_r) \omega^r + \psi_r \omega^p - \vartheta_q \omega^q, \quad (5.7)$$

где первое слагаемое в правой части следует вычислить из (5.3).

В общем случае нам не понадобились выражения коэффициентов ζ_r, ζ_q . Теперь они нужны. Чтобы их получить, продифференцируем формулы (4.4) внешним образом, учитывая (5.2) и (5.3), и получим выражения для

$$\frac{k_r - k_q}{k_r - k_p} \zeta_r = - \left[\frac{1}{2} \Gamma_{qp} A_p - \frac{1}{2} \Gamma_{pq}^2 \Gamma_{rp} - \frac{1}{2} k_q^2 \Gamma_{rp} + B_r \Gamma_{rp} - \Gamma_{qr}^2 \Gamma_{rp} + \frac{(k_q - k_r)(k_p - k_q)}{k_r - k_p} k_p \Gamma_{[rp]} \right], \quad (5.8)$$

$$\frac{k_q - k_p}{k_q - k_r} \zeta_q = - \left[B_q - \Gamma_{qp}^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{rp}^2 - \frac{1}{2} k_p^2 \right] \Gamma_{qr}. \quad (5.9)$$

Сделав теперь нужные подстановки в правые части формул (5.6) и (5.7), можно после необходимых вычислений убедиться, что эти правые части совпадают и согласно с (5.3) достигнуто: из (5.3) новых соотношений не получается.

В итоге система ковариантов (4.5), (4.6) вместе с системой, полученной из нее заменой r на q , приводит лишь к одному пфаффовому уравнению:

$$\begin{aligned} dB_r = & \left[\frac{1}{2} \Gamma_{qp} B_p + \left(\frac{1}{2} \Gamma_{pq} + \Gamma_{qp} \right) B_r + \frac{1}{4} \Gamma_{pq}^2 \Gamma_{qp} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \Gamma_{rp} \Gamma_{pr} \Gamma_{pq} - \frac{3}{4} \Gamma_{qr}^2 \Gamma_{qp} + \frac{1}{4} (k_p \Gamma_{pq} - k_r \Gamma_{qp}) k_q \left. \right] \omega^r + \\ & + \left[B_r + \frac{1}{2} \Gamma_{qp}^2 + \Gamma_{rp}^2 + \frac{1}{2} k_p^2 \right] \Gamma_{qr} \omega^p + \\ & + \left[\frac{1}{2} \Gamma_{qp} A_p - \frac{1}{2} \Gamma_{pq}^2 \Gamma_{rp} - \frac{1}{2} k_q^2 \Gamma_{rp} + B_r \Gamma_{rp} - \right. \\ & \left. - \Gamma_{qr}^2 \Gamma_{rp} + \frac{(k_q - k_r)(k_p - k_q)}{k_r - k_p} k_p \Gamma_{[rp]} \right] \omega^q. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Если теперь продифференцировать (5.10) внешним образом, то после некоторых вычислений получаем

$$\Gamma_{qp} (\Delta A_p \wedge \omega^q + \Delta B_p \wedge \omega^r) = 0. \quad (5.11)$$

Кроме того, мы имеем систему ковариантов, полученную из (4.5) и (4.6) заменой r на p , где p , напомним, имеет фиксированное значение

$$\Delta A_p \wedge \omega^q + \Delta B_p \wedge \omega^r = 0, \quad (5.12)$$

$$-\Delta B_p \wedge \omega^q + \frac{k_p - k_r}{k_p - k_q} \Delta A_p \wedge \omega^r = 0. \quad (5.13)$$

Как видно, (5.11) удовлетворяется в силу (5.12) и, следовательно, система ковариантов рассматриваемой системы состоит из (5.12) и (5.13). Матрица ее полярной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \xi^q & \xi^r \\ \frac{k_p - k_r}{k_p - k_q} \xi^r & -\xi^q \end{vmatrix}.$$

Ранг этой матрицы $s_1 = 2$. Система (5.12), (5.13) содержит две независимые формы, следовательно, $q = 2$, $s_2 = s_3 = 0$ и $Q = s_1 = 2$. Общий интегральный элемент этой системы зависит от двух произвольных параметров, значит $N = 2$. Так как $Q = N$, то система находится в инволюции. Мы придем к следующему результату.

Теорема 3. Конформно-евклидова гиперповерхность V_3 класса $C_3^{(1)}$ определяется в каноническом репере системой, которая состоит из уравнений (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) и (4.4), где p, q, r — любая четная перестановка из 1, 2, 3, при конечных соотношениях (5.1), (5.2) и (5.3), где p, q, r — некоторая конкретная перестановка из 1, 2, 3 и из дополнительного уравнения (5.10), где r взят из этой перестановки. Эта система находится в инволюции и рассматриваемая V_3 существует с произволом двух функций одного аргумента.

6. Пусть для $V_3 \subset C_3$ имеют место равенства

$$\Gamma_{qr} = \Gamma_{rq} \quad \text{и} \quad \Gamma_{rp} = \Gamma_{pr} \quad (6.1)$$

при одной конкретной перестановке индексов 1, 2, 3. Обозначим рассматриваемый класс конформно-евклидовых гиперповерхностей $C_3^{(2)}$. Из уравнений (4.3) и (4.4) непосредственно следует, что

$$A_p = A_q = A_r = 0, \quad (6.2)$$

$$B_r + B_p = \frac{1}{2} [\Gamma_{qr}^2 + k_r k_q - \Gamma_{pq} \Gamma_{qp} - k_p k_q], \quad (6.3)$$

$$B_r + B_q = \frac{1}{2} [\Gamma_{pq} \Gamma_{qp} + k_p k_q - \Gamma_{rp}^2 - k_r k_p]. \quad (6.4)$$

Здесь также получим формулы (5.4) и (5.5), причем дополнительно из системы ковариантов (5.12) и (5.13) следует, что

$$\Delta B_p = - \frac{k_p - k_r}{k_p - k_q} \zeta_p \omega^r. \quad (6.5)$$

Как и выше, получим, что (5.4), (5.5) и (6.5) согласуются с (6.3) и (6.4). Система ковариантов (4.5) и (4.6) вместе с теми, которые получаются, если заменить в них r на p и затем r на q , сводится после применения леммы Картана к единственному пфаффовому уравнению (5.10), где следует, конечно, учесть (6.1) — (6.3). Условие (5.11), которое появляется при его внешнем дифференцировании, в силу (6.1) и (4.7) принимает вид

$$\Gamma_{qp} \Delta B_p \wedge \omega^r = 0$$

и удовлетворяется в силу (6.5) тождественно. Получается следующий результат.

Теорема 4. Конформно-евклидова гиперповерхность класса определяется в каноническом репере системой, которая состоит из уравнений (3.1), (3.12), (3.13), (4.3), (4.4), где p, q, r — некоторая четная перестановка чисел 1, 2, 3 при конечных соотношениях (6.1) — (6.4), где p, q, r — некоторая конкретная перестановка чисел 1, 2, 3, и из дополнительного уравнения (5.10), где r взят из этой перестановки. Эта система вполне интегрируема, и рассматриваемая V_3 существует с произволом постоянных.

7. Пусть для $V_3 \subset C_3$ имеет место $\Gamma_{rq} = \Gamma_{qr}$ при четных перестановках p, q, r индексов 1, 2, 3. Класс соответствующих конформно-евклидовых V_3 обозначим через $C_3^{(3)}$. Из уравнений (4.3) и (4.4) получим теперь

$$A_p = A_q = A_r = 0.$$

Введем для краткости обозначения $\Gamma_{rq} = \Gamma_{qr} = l_p$. К уравнениям (6.3) и (6.4) прибавляется еще одно и в итоге получается система линейных уравнений

$$B_p + B_q = \frac{1}{2} (l_q^2 - l_p^2 + k_p k_r - k_q k_r),$$

$$B_q + B_r = \frac{1}{2} (l_r^2 - l_q^2 + k_q k_p - k_r k_p),$$

$$B_p + B_r = \frac{1}{2} (l_p^2 - l_r^2 + k_r k_q - k_p k_q).$$

Отсюда

$$B_q = \frac{1}{2} (l_r^2 - l_p^2 + k_p k_q - k_r k_q),$$

причем B_p и B_r получаются в результате четных перестановок. Систему уравнений (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) и (4.4) при полученных конечных соотношениях можно переписать следующим образом:

$$\omega^k = 0, \quad \omega_p^k = k_p \omega^p, \quad \omega_p^q = l_q \omega^p - l_p \omega^q, \quad (7.1)$$

$$dk_p = l_q (k_p - k_q) \omega^q + l_r (k_p - k_r) \omega^r, \quad (7.2)$$

$$dl_p = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 l_i^2 + k_p (k_q + k_r) - k_q k_r \right] \omega^p. \quad (7.3)$$

Нетрудно проверить, что эта система вполне интегрируема.

Теорема 5. Конформно-евклидова гиперповерхность V_3 класса $C_3^{(3)}$ определяется в каноническом репере вполне интегрируемой системой (7.1), (7.2) и (7.3), где p, q, r — любая четная перестановка чисел 1, 2, 3, и рассматриваемая V_3 существует с произволом постоянных.

Отметим, что Г. М. Ланкастер [7] выделил именно этот класс конформно-евклидовых гиперповерхностей в E_4 .

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Лумисте за постановку проблемы и за руководство работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Finzi, A. Atti Inst. Veneto, **62**, 1049—1062 (1902—1903).
2. Schouten, J. A. Math. Z., **11**, 58—88 (1921).
3. Ведерников В. И. Изв. ВУЗов. Математика, № 1, 89—97 (1957).
4. Ведерников В. И. Изв. ВУЗов. Математика, № 6, 58—72 (1958).
5. Вербицкий Л. Л. Тр. семин. по вект. и тензорн. анал., вып. 9, 146—182 (1952).
6. Вербицкий Л. Л. Тр. семин. по вект. и тензорн. анал., вып. 12, 339—354 (1963).
7. Lancaster, G. M. Duke Math. J., **40**, № 1, 1—8 (1973).
8. Cecil, T. E., Ryan, P. J. Can. J. Math., **32**, № 4, 767—782 (1980).
9. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
10. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1964.
11. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 2. М., ИЛ, 1948.
12. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М., МГУ, 1962.

**KOLME ERINEVA PEAKÖVERUSEGA KONFORMSELT EUKLEIDILISED
HÜPERPINNAD RUUMIS E_4**

On tõestatud üldjuhul kolme erineva peakõverusega konformselt eukleidiliste hüperpindade olemasolu eukleidilises ruumis E_4 . Esitatakse selliste hüperpindade klassifikatsioon ja näidatakse, et vaadeldavad klassid ei ole tühjad (teoreemid 2, 3, 4, 5).

**CONFORMALLY-FLAT HYPERSURFACES WITH THREE DISTINCT
PRINCIPAL CURVATURES IN E_4**

The investigation of conformally-flat hypersurfaces V_n in a Euclidean space E_{n+1} was initiated by A. Finzi [1], who considered the case $n=3$ (see Theorem 1). In [2] J. A. Schouten proved the theorem, stating that $n-1$ principal curvatures k_i at each point of such V_n in E_{n+1} are equal if $n>3$. Geometrically these hypersurfaces were characterized in [3-5]. The first example of conformally-flat V_3 in E_4 with three distinct principal curvatures was given by L. L. Verbitski [6] in the special case when one principal curvature is zero. Later G. M. Lancaster [7] found a conformally-flat solution for Gauss and Petersen-Codazzi equations with $k_1k_2k_3 \neq 0$ in the case when V_3 is isothermal (i. e. the net of curvature lines of V_3 is isothermal). In general, the existence and geometrical characterization of conformally-flat V_3 in E_4 still remain unknown.

In this paper we prove the existence of conformally-flat hypersurfaces in a general case and in some special cases. The main results are:

Theorem 2. *Conformally-flat hypersurface V_3 in E_4 with three distinct principal curvatures is determined in its canonical moving frame by system of equations (3.1), (3.12), (3.13), (4.3) and (4.4), where p, q, r is arbitrary even permutation of 1, 2, 3. The system is in involution and its solution depends on six arbitrary functions of one variable.*

The class of hypersurfaces V_3 in E_4 described in this theorem, we denote by C_3 . The classes of conformally-flat hypersurfaces with $\Gamma_{[pq]}=0$ for one, two or three pairs of (p, q) are denoted by $C_3^{(1)}$, $C_3^{(2)}$ or $C_3^{(3)}$, respectively.

Theorem 3. *Conformally-flat hypersurface V_3 of class $C_3^{(1)}$ is determined in its canonical moving frame by system of equations (3.1), (3.12), (3.13), (4.3), (4.4), where p, q, r is arbitrary even permutation of 1, 2, 3, with conditions (5.1), (5.2), (5.3), where p, q, r is a fixed permutation of 1, 2, 3, and by supplementary equation (5.10), where r is taken from this fixed permutation. The system is in involution and its solution depends on two functions of one variable.*

Theorem 4. *Conformally-flat hypersurface V_3 of class $C_3^{(2)}$ is determined in its canonical moving frame by system of equations (3.1), (3.12), (3.13), (4.3), (4.4), where p, q, r is arbitrary even permutation of 1, 2, 3 with conditions (6.1)–(6.4), where p, q, r is a fixed permutation of 1, 2, 3 and by supplementary equation (5.10), where r is taken from this fixed permutation. The system is totally integrable.*

Theorem 5. *Conformally-flat hypersurface V_3 of class $C_3^{(3)}$ is determined in its canonical moving frame by totally integrable system (7.1)–(7.3), where p, q, r is arbitrary even permutation of 1, 2, 3.*

Geometrical description of conformally-flat hypersurfaces of these classes will be given in the next papers.