https://doi.org/10.3176/phys.math.1985.4.13
EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS
1985, 34, 4

УДК 517.94 : 535.41

| П. КАРД |

НЕСКОЛЬКО НОВЫХ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

| P. KARD. | UUSI ÜHEMÕÕTMELISI LAINEVÕRRANDEID

| P. KARD. | SOME NEW ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATIONS

Приведем несколько новых одномерных волновых уравнений с их решениями, получаемых методом статьи [1] из уравнения

$$d^2y/dG^2+k^2h^2(A^2G^m+B^2G^{-2})y=0, \quad A\neq 0, \quad m\neq -2. \tag{1}$$

При значениях m 1, —1/2, —4, —4/3, —5/2 и —5/3 исключение параметра в новом уравнении требует решения уравнения 3-й степени. Эти уравнения мы и приводим. Во всех уравнениях N — произвольная постоянная, k — волновое число, h — толщина слоя,

$$\xi=z/h \tag{2}$$

— безразмерный аргумент. Z означает везде функцию Бесселя (цилиндрическую функцию).

Уравнения и их решения таковы:

I.

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{81N^2k^2h^2}{16}\cdot\frac{R^2}{R^3+1}\cdot U=0, \tag{3}$$

$$U=R^{-1/2}Z_\nu(NkhR^{3/2})+3NkhRZ'_\nu(NkhR^{3/2}), \tag{4}$$

где

$$R=\sqrt[3]{1+\sqrt{1-\xi^3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1-\xi^3}} \tag{5}$$

и

$$\nu=\sqrt{\frac{1}{9}-N^2k^2h^2}. \tag{6}$$

II.

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{81N^2k^2h^2}{16}\cdot\frac{U}{R(R^3+1)}=0, \tag{7}$$

$$U=RZ_\nu(NkhR^{-3/2})+\frac{3}{2}NkhR^{-1/2}Z'_\nu(NkhR^{-3/2}), \tag{8}$$

где

$$R=\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\xi^3}}-\sqrt[3]{-1+\sqrt{1+\xi^3}} \tag{9}$$

и

$$\nu=\sqrt{\frac{4}{9}-N^2k^2h^2}. \tag{10}$$

III.

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{4N^2k^2h^2}{9}\cdot\frac{U}{R^2(R^2+1)}=0, \tag{11}$$

$$U=R^{1/2}Z_\nu(NkhR)-2NkhR^{3/2}Z_\nu(NkhR), \tag{12}$$

где

$$R=\sqrt[3]{\xi+\sqrt{\xi^2+1}}-\sqrt[3]{-\xi+\sqrt{\xi^2+1}} \tag{13}$$

и

$$\nu=\sqrt{\frac{1}{4}-N^2k^2h^2}. \tag{14}$$

IV.

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{4N^2k^2h^2}{9}\cdot\frac{U}{R^4(R^2+1)}=0, \tag{15}$$

$$U=R^{3/2}Z_\nu(NkhR^{-1})+\frac{2}{3}NkhR^{1/2}Z'_\nu(NkhR^{-1}), \tag{16}$$

где

$$R=\sqrt[3]{\xi+\sqrt{\xi^2+1}}-\sqrt[3]{-\xi+\sqrt{\xi^2+1}} \tag{17}$$

и

$$\nu=\sqrt{\frac{9}{4}-N^2k^2h^2}. \tag{18}$$

V.

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{N^2k^2h^2}{9}\cdot\frac{U}{R^4(R-2)}=0, \tag{19}$$

$$U=RZ_\nu(NkhR^{1/2})-\frac{1}{2}NkhR^{3/2}Z'_\nu(NkhR^{1/2}), \tag{20}$$

где

$$R=\sqrt[3]{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}+\sqrt[3]{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}+1 \tag{21}$$

и

$$\nu=\sqrt{4+2N^2k^2h^2}. \tag{22}$$

VI.

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{N^2k^2h^2}{18}\cdot\frac{U}{R^5(R-2)}=0, \tag{23}$$

$$U=R^{3/2}Z_\nu(iNkhR^{-1/2})+\frac{i}{2}NkhRZ'_\nu(iNkhR^{-1/2}), \tag{24}$$

где

$$R=\sqrt[3]{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}+\sqrt[3]{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}+1 \tag{25}$$

и

$$\nu=\sqrt{9-\frac{N^2k^2h^2}{2}}. \tag{26}$$

Как показано в [2], в каждом одномерном волновом уравнении можно заменить во втором члене

$$\xi\to\frac{a\xi+b}{c\xi+d}, \quad ad-bc=1 \tag{27}$$

с добавлением к этому члену множителя $(c\xi+d)^{-4}$. Решение такого измененного уравнения получается из решения первоначального уравнения путем той же замены (27) с добавлением множителя $c\xi+d$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кард П.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 33, № 4, 401—407 (1984).
2. *Кард П.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 33, № 2, 137—146 (1984).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 25/II 1985