https://doi.org/10.3176/phys.math.1985.4.11

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА

PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1985, 34, 4

УДК 519.855

Эбу ТАММ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА

(Представил Н. Алумяэ)

1. В n-мерном евклидовом пространстве R^n рассматриваются следующие две экстремальные задачи:

$$\min_x \{f(x,p) \mid x \in R^n\} \tag{1}$$

и

$$\min_x \{f(x,p) \mid g(x,p)=0\}, \tag{2}$$

зависящие от s-мерного параметра p, где $f: R^n \times R^s \to R^1$ и $g = (g^1 g_2 \ldots g_m)^{\mathrm{T}}: R^n \times R^s \to R^m$. Предполагается, что при некоторых фиксированных значениях параметра эти задачи разрешимы, т. е. в них существуют точки локального минимума. Имеется много работ, посвященных изучению вопроса устойчивости решения таких задач (см., напр., [1, 2]), однако в большинстве случаев в них ограничиваются лишь качественным установлением устойчивости, а количественных оценок не вычисляют. Целью данной статьи является: 1) нахождение окрестностей этих значений, где разрешимость задачи сохраняется, и 2) определение шара, содержащего все точки локальных минимумов, соответствующие значениям параметра из указанных окрестностей. Для этого использована следующая теорема разрешимости специального вида, зависящего от параметра, причем $(n+s)$-мерный вектор $\begin{pmatrix} z \\ q \end{pmatrix}$ для простоты обозначается через (z,q).

Теорема 1. *Пусть* 1) B — *линейный оператор из* R^n *в* R^n, *имеющий обратный* B^{-1}, $\|B^{-1}\| \leqslant c_1$; 2) A — *линейный оператор из* R^s *в* R^n; 3) $r(z,q)$ — *нелинейный дифференцируемый оператор из* $R^n \times R^s$ *в* R^n, *удовлетворяющий условиям* $r(0,0)=0$ *и* $\|r'(z,q)\| \leqslant c_2 \|(z,q)\|$. *Тогда уравнение относительно* z

$$Bz = a + Aq + r(z,q), \tag{3}$$

зависящее от параметра q, *имеет в шаре* $\|z\| < 1/(c_1c_2) - \|q\|$ *единственное решение* $z(q)$, *если* $(1+c_1\|A\|)\|q\| \leqslant 1/(4c_1c_2) - c_1\|a\|$, *причем*

$$\|z(q)\| \leqslant 2c_1(\|a+Aq\| + c_2\|q\|^2). \tag{4}$$

Доказательство. Построим последовательность (z^n) следующим образом: $z^0=0$, $z^{n+1} = B^{-1}(a+Aq) + B^{-1}r(z^n,q)$. Покажем ограниченность (z^n). Поскольку оператор $r(z,q)$ дифференцируем, то

$$\|r(z^n,q)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|r'(\theta z^n, \theta q)\| \, \|(z^n,q)\| \leqslant c_2 \|(z^n,q)\|^2.$$

Следовательно, $\|z^{n+1}\| \leqslant \|B^{-1}(a+Aq)\| + \|B^{-1}r(z^n,q)\| \leqslant c_1\|a+Aq\| + c_1c_2\|(z^n,q)\|^2 \leqslant c_1\|a+Aq\| + c_1c_2(\|z^n\|^2 + \|q\|^2) \leqslant c_1\|a+Aq\| + c_1c_2(\|z^n\| + \|q\|)^2$, и отсюда непосредственно получим

$$\|z^{n+1}\|+\|q\|\leqslant c_1\|a+Aq\|+c_1c_2(\|z^n\|+\|q\|)^2+\|q\|. \qquad (5)$$

Из условия, наложенного на q, и выбора z^0 следует $\|z^0\|+\|q\|\leqslant \leqslant 1/(4c_1c_2)<1/(2c_1c_2)$. Допустим, что справедливо неравенство $\|z^n\|+\|q\|\leqslant 1/(2c_1c_2)$. В этом случае из (5) получим $\|z^{n+1}\|+\|q\|\leqslant \leqslant c_1\|a+Aq\|+c_1c_2(1/(2c_1c_2))^2+\|q\|$ и, поскольку $\|a+Aq\|$ удовлетворяет условию $\|a+Aq\|\leqslant 1/(4c_1^2c_2)-\|q\|/c_1$, то $\|z^{n+1}\|+\|q\|\leqslant \leqslant 1/(4c_1c_2)-\|q\|+1/(4c_1c_2)+\|q\|=1/(2c_1c_2)$, т. е. последовательность (z^n) ограничена, $\|z^n\|\leqslant 1/(2c_1c_2)-\|q\|$ для всех $n=0, 1, 2, \ldots$.

Оценим теперь величину $\|z^{n+1}-z^n\|$. $\|z^{n+1}-z^n\|=\|B^{-1}r(z^n,q)- -B^{-1}r(z^{n-1},q)\|\leqslant c_1\|r(z^n,q)-r(z^{n-1},q)\|\leqslant c_1c_2 \sup\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\|(\theta z^n+(1-\theta)z^{n-1}, q)\|\,\|(z^n-z^{n-1},0)\|\leqslant c_1c_2\max[\|(z^n,q)\|, \|(z^{n-1},q)\|]\,\|z^n-z^{n-1}\|\leqslant \leqslant c_1c_2\max[\|z^n\|+\|q\|, \|z^{n-1}\|+\|q\|]\,\|z^n-z^{n-1}\|\leqslant c_1c_2\dfrac{1}{2c_1c_2}\|z^n-z^{n-1}\|= =\dfrac{1}{2}\|z^n-z^{n-1}\|$. Отсюда $\|z^n-z^{n-1}\|\leqslant\dfrac{1}{2}\|z^{n-1}-z^{n-2}\|\leqslant\ldots\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}\times \times\|z^1-z^0\|=\dfrac{1}{2^{n-1}}\|z^1\|$. Далее, $\|z^{n+l}-z^n\|\leqslant\|z^{n+l}-z^{n+(l-1)}\|+\|z^{n+(l-1)}- -z^{n+(l-2)}\|+\ldots+\|z^{n+1}-z^n\|\leqslant\sum\limits_{i=0}^{l-1}\|z^1\|/2^{n+i}<\|z^1\|/2^{n-1}$.

Таким образом, последовательность (z^n) фундаментальна и значит имеет предел $z(q)$, причем

$$\|z^n-z(q)\|\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\|z^k-z^{k+1}\|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\|z^1\|/2^{n+i}=\|z\|/2^{n-1}.$$

В частном случае, когда $n=0$, имеем

$$\|z(q)\|=\|z^0-z(q)\|\leqslant 2\|z^1\|\leqslant 2[\|B^{-1}(a+Aq)\|+\|B^{-1}r(0,q)\|]\leqslant$$
$$\leqslant 2(c_1\|a+Aq\|+c_1\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\|r'(0,\theta q)\|\,\|0,q)\|]\leqslant$$
$$\leqslant 2(c_1\|a+Aq\|+c_1c_2\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\|\theta q\|\,\|q\|)=2(c_1\|a+Aq\|+$$
$$+c_1c_2\|q\|^2)=2c_1(\|a+Aq\|+c_2\|q\|^2).$$

Величина $z(q)$ является решением уравнения (3). Действительно, $\|Bz^n-(a+Aq)-r(z^n,q)\|=\|Bz^n-Bz^{n-1}\|\leqslant c_1\|z^n-z^{n+1}\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Наконец покажем, что других решений уравнение (3) в шаре $\|z\|<1/(c_1c_2)-\|q\|$ не имеет. Допустим противное: пусть имеются два решения $z_1(q)$ и $z_2(q)$ такие, что

$$z_1(q)\neq z_2(q);\quad \|z_1(q)\|<1/(c_1c_2)-\|q\|,\quad \|z_2(q)\|<1/(c_1c_2)-\|q\|.$$

Тогда $\|z_1(q)-z_2(q)\|=\|B^{-1}(r(z_1(q),q)-r(z_2(q),q))\|\leqslant \leqslant c_1\sup\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\|r'(\theta z_1(q)+(1-\theta)z_2(q),q)\|\,\|(z_1(q)-z_2(q),0)\|\leqslant \leqslant c_1c_2\max[\|z_1(q)\|+\|q\|, \|z_2(q)\|+\|q\|]\,\|z_1(q)-z_2(q)\|< <c_1c_2\dfrac{1}{c_1c_2}\|z_1(q)-z_2(q)\|=\|z_1(q)-z_2(q)\|$, что невозможно. Теорема доказана.

Замечание. В [3] доказана лемма о разрешимости уравнения

$$Bz = a + r(z),$$

нелинейная часть которого не зависит от параметра. Можно показать, что лемма следует из теоремы 1, если в (3) считать $r(z, q) \equiv r(z, 0)$.

2. На основе теоремы 1, получим следующие две теоремы о разрешимости экстремальных задач, зависящих от параметра.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*

1) *функция $f(x, p)$ дважды дифференцируема по x, $f'_x(x, p)$ дифференцируема по p, причем $f_{xx}''(x, p)$ и $f_{xp}''(x, p)$ удовлетворяют условиям Липшица*

$$\|f''_{xx}(x^1; p^1) - f''_{xx}(x^2, p^2)\| \leqslant K_1 \|(x^1 - x^2,\ p^1 - p^2)\|,$$

$$\|f''_{xp}(x^1, p^1) - f''_{xp}(x^2, p^2)\| \leqslant K_2 \|(x^1 - x^2,\ p^1 - p^2)\|$$

для всех

$$x^1,\ x^2 \in R^n, \quad p^1,\ p^2 \in R^s;$$

2) *в задаче*

$$\min_x \{f(x, p^0) \mid x \in R^n\}; \tag{6}$$

где p^0 — некоторое фиксированное значение параметра p, существует точка локального минимума x^0;

3) *матрица $f''_{xx}(x^0, p^0)$ положительно определена, т. е. $u^{\mathrm{T}} f''_{xx}(x^0, p^0) u \geqslant M \|u\|^2$ для всех $u \in R^n$;*

4) $\|p - p^0\| \leqslant M^2 / [4(K_1 + K_2)(M + \|f''_{xp}(x^0, p^0)\|)]$. (7)

Тогда в задаче (1) *существует точка локального минимума $x(p)$, единственная в шаре $\|x - x^0\| < M/(K_1 + K_2) - \|p - p^0\|$, причем*

$$\|x(p) - x^0\| \leqslant \frac{2}{M} [\|f''_{xp}(x^0, p^0)\| \|p - p^0\| + (K_1 + K_2) \|p - p^0\|^2]. \tag{8}$$

Доказательство. Для того чтобы некоторая точка доставляла локальный минимум в задаче (1), необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$f'_x(x, p) = 0. \tag{9}$$

Представим это уравнение в виде

$$f''_{xx}(x^0, p^0)(x - x^0) = -f''_{xp}(x^0, p^0)(p - p^0) - r(x - x^0,\ p - p^0), \tag{10}$$

где $r(x - x^0;\ p - p^0) = f'_x(x, p) - f''_{xx}(x^0, p^0)(x - x^0) - f''_{xp}(x^0, p^0)(p - p^0)$. Уравнение (10) эквивалентно уравнению (9) и является относительно $x - x^0$ уравнением типа (3), где $q = p - p^0$. Покажем, что (10) удовлетворяет условиям теоремы 1. В данном случае $B = f''_{xx}(x^0, p^0)$, B^{-1} существует в силу предположения 3), $\|B^{-1}\| = 1/M$ и в качестве c_1 можно взять величину $1/M$. Очевидно, что $r(0, 0) = 0$ и $r'(x - x^0,\ p - p^0) = (f''_{xx}(x, p) - f''_{xx}(x^0, p^0),\ f''_{xp}(x, p) - f''_{xp}(x^0, p^0))$, откуда $\|r'(x - x^0,\ p - p^0)\| \leqslant (K_1 + K_2) \|(x - x^0,\ p - p^0)\|$. Положим $c_2 = K_1 + K_2$. Неравенство $\|p - p^0\| \leqslant 1/(4c_1c_2) - c_1 \|f''_{xp}(x^0, p^0)(p - p^0)\|$ выполнено, когда $\|p - p^0\| \leqslant M^2 / [4(K_1 + K_2)(\|f''_{xp}(x^0, p^0)\| + M)]$, что гарантировано требованием (7). Отсюда непосредственно следует, что уравнение (10) имеет решение $x(p) - x^0$, единственное в шаре

$\|x-x\|^0<M/(K_1+K_2)-\|p-p^0\|$ и удовлетворяющее (8). Остается доказать, что в точке $x(p)$ выполнено и достаточное условие локального минимума задачи (1), а именно, $u^{\mathrm{T}}f''_{xx}(x(p),p)u\geqslant 0$. Поскольку $u^{\mathrm{T}}f''_{xx}(x^0,p^0)u\geqslant M\|u\|^2$ по предположению, то достаточно показать, что

$$|u^{\mathrm{T}}f''_{xx}(x(p);p)u-u^{\mathrm{T}}f''_{xx}(x^0,p^0)u|\leqslant M\|u\|^2.$$

Вследствие условия 1) имеем $|u^{\mathrm{T}}(f''_{xx}(x(p),p)-f''_{xx}(x^0,p^0))u|\leqslant$ $\leqslant\|f''_{xx}(x(p),p)-f''_{xx}(x^0,p^0)\|\,\|u\|^2\leqslant K_1\|(x(p)-x^0,\ p-p^0)\|\,\|u\|^2\leqslant$ $\leqslant K_1(\|x(p)-x^0\|+\|p-p^0\|)\|u\|^2$. По определению решения $x(p)-x^0$ справедливо неравенство $\|x(p)-x^0\|\leqslant M/(K_1+K_2)-\|p-p^0\|$ и, следовательно, $|u^{\mathrm{T}}(f''_{xx}(x(p),p)-f''_{xx}(x^0,p^0))u|\leqslant K_1(M/(K_1+K_2)-$ $-\|p-p^0\|+\|p-p^0\|)\|u\|^2=\dfrac{K_1}{K_1+K_2}M\|u\|^2\leqslant M\|u\|^2$. Теорема доказана.

Следствие. При любом $\varepsilon>0$ из неравенства

$$\|p-p^0\|\leqslant[\sqrt{\|f''_{xp}(x^0,p^0)\|^2+2M(K_1+K_2)\varepsilon}-\|f''_{xp}(x^0,p^0)\|]/[2(K_1+K_2)]$$

следует $\|x(p)-x^0\|\leqslant\varepsilon$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия:*

1) *функции $f(x,p)$ и $g(x,p)$ дважды дифференцируемы по x; $f'_x(x,p)$ и $g'_x(x,p)$ дифференцируемы по p, причем $f''_{xx}(x,p)$, $g''_{xx}(x,p)$, $g'_x(x,p)$, $g'_p(x,p)$; $f''_{xp}(x,p)$, $g''_{xp}(x,p)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянными $K_1,\ldots,K_6$ соответственно и, кроме того, $\|g''_{xx}(x,p)\|\leqslant K_7$, $\|g''_{xp}(x,p)\|\leqslant K_8$;*

2) *в задаче*

$$\min_x\{f(x,p^*)\,|\,g(x,p^*)=0\}\tag{11}$$

существует точка локального минимума x^*, причем $\|g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm{T}}v\|\geqslant$ $\geqslant\varrho\|v\|$ для некоторого $\varrho>0$ и всех $v\in R^m$. В этом случае найдется такой ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda^*=(\lambda_1{}^*,\lambda_2{}^*,\ldots,\lambda_m{}^*)^{\mathrm{T}}$, что $f'_x(x^*,p^*)+g'_x(x^*,\lambda^*)^{\mathrm{T}}\lambda^*=0$ [4];

3) *матрица* $L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)=f''_{xx}(x^*,p^*)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda^*g''_{ixx}(x^*,p^*)$ *положительно определена, т. е. существует $\mu>0$ такое, что $u^{\mathrm{T}}L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)u\geqslant\mu\|u\|^2$ для всех $u\in R^n$;*

4) $\|p-p^*\|\leqslant\{4c_1c_2[1+c_1(\|L''_{xp}(x^*,\lambda^*,p^*)\|+\|g'_p(x^*,p^*)\|]\}^{-1}$, (12)

где

$$c_1=\max[\|g'_x(x^*,p^*)\|\,\|L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)\|(\mu^2+1)/\varrho\mu^2,$$

$$\|L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)\|(\|g'_x(x^*,p^*)\|+1)/\varrho],\tag{13}$$

$$c_2=K_1+2K_3+K_4+K_5+K_8+\|\lambda^*\|(K_2+K_6).\tag{14}$$

Тогда в задаче (2) *существует точка локального минимума $x(p)$, единственная в шаре $\|x-x^*\|\leqslant 1/(c_1c_2)-\|p-p^*\|$, причем*

$$\|x(p)-x^*\|\leqslant 2c_1[(\|L''_{xp}(x^*,\lambda^*,p^*)\|+\|g'_p(x^*,p^*)\|)\times$$
$$\times\|p-p^*\|+c_2\|p-p^*\|^2].\tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим относительно (x,λ) систему

$$\begin{cases} f'_x(x,p)+g'_x(x,p)^{\mathrm{T}}\lambda=0\\ g(x,p)=0.\end{cases}\tag{16}$$

Ее можно переписать в виде

$$\left\{\begin{aligned} &L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)(x-x^*)+g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm T}(\lambda-\lambda^*)=\\ &\quad=-L''_{xp}(x^*,\lambda^*,p^*)(p-p^*)-r_1(x-x^*,\lambda-\lambda^*,p-p^*)\\ &g'_x(x^*,p^*)(x-x^*)=-g'_p(x^*,p^*)(p-p^*)-r_2(x-x^*,p-p^*);\end{aligned}\right. \tag{17}$$

где

$$r_1(x-x^*,\lambda-\lambda^*,p-p^*)=f'_x(x,p)+g'_x(x,p)^{\mathrm T}\lambda-$$

$$-L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)(x-x^*)-g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm T}(\lambda-\lambda^*)-L''_{xp}(x^*,\lambda^*,p^*)(p-p^*)$$

и

$$r_2(x-x^*,p-p^*)=g(x,p)-g'_x(x^*,p^*)(x-x^*)-g'_p(x^*,p^*)(p-p^*).$$

Блочная матрица

$$B=\begin{pmatrix} L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*) & g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm T}\\ g'_x(x^*,p^*) & 0\end{pmatrix}$$

имеет обратную

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{12}^{\mathrm T} & B_{22}\end{pmatrix},$$

где

$$B_{11}=L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1}+L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1}g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm T}B_{22}g'_x(x^*,p^*)\times$$

$$\times L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1},$$

$$B_{12}=-L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1}g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm T}B_{22},$$

$$B_{22}=-[g'_x(x^*,p^*)L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1}g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm T}]^{-1},$$

если $L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1}$ и B_{22} существуют [5]. Ввиду условия 3) матрица $L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1}$ существует и $\|L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1}\|\leqslant 1/\mu$. Матрица $g'_x(x^*,p^*)L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1}g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm T}$ положительно определена: для любого $v\in R^m$ выполняется $v^{\mathrm T}g'_x(x^*,p^*)L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)^{-1}\times\times g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm T}v\geqslant\|g'_x(x^*,p^*)^{\mathrm T}v\|^2/\|L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)\|\geqslant(\varrho^2/\|L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)\|\|v\|^2$. Следовательно, B_{22} существует и $\|B_{22}\|\leqslant\|L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)\|/\varrho^2$. Теперь можно получить оценку $\|B^{-1}\|\leqslant\max[\|B_{11}\|,\|B_{22}\|]+\|B_{12}\|\leqslant\leqslant\max[1/\mu+\|g'_x(x^*,p^*)\|\|L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)\|/\mu^2\varrho^2,\|L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)\|/\varrho^2]++\|g'_x(x^*,p^*)\|\ L''_{xx}(x^*,\lambda^*,p^*)\|/\varrho^2$. Непосредственно следует, что $(0,0,0)=0$, а $\|r'(x-x^*,\lambda-\lambda^*,p-p^*)\|\leqslant\|f''_{xx}(x^*,p^*)-f''_{xx}(x,p)\|+$

$$+\left\|\sum_{i=1}^m[\lambda_i g''_{ixx}(x,p)-\lambda_i^* g''_{ixx}(x^*,p^*)]\right\|+2\|g'_x(x,p)+g'_x(x^*,p^*)\|+$$

$$+\|f''_{xp}(x,p)-f''_{xp}(x^*,p^*)\|+\left\|\sum_{i=1}^m[\lambda_i g''_{ixp}(x,p)-\lambda_i^* g''_{ixp}(x^*,p^*)]\right\|+$$

$$+\|g'_p(x,p)-g'_p(x^*,p^*)\|\leqslant[K_1+2K_3+K_4+K_5+K_8+\|\lambda^*\|(K_2+K_6)]\times$$

$$\times\|(x-x^*,\lambda-\lambda^*,p-p^*)\|.$$

Таким образом, система (16) удовлетворяет требованиям теоремы 1. Применяя эту теорему, получим, что для всех таких p, для которых имеет место (12), существует точка $x(p)$, единственная в шаре $\|x-x^*\|<1/(c_1c_2)-\|p-p^*\|$ и удовлетворяющая (15), где выполнены необходимые условия локального минимума задачи (2). Выполнение достаточного условия показывается аналогично теореме 2.

Автор благодарит Т. Мерессоо за обсуждение работы и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bank, B., Guddat, J., Klatte, D., Kummer, B., Tammer, K.* Nonlinear Parametric Optimisation. Berlin, Akademie-Verlag, 1982.
2. *Fiacco, A. V.* Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming. New York—London, Academic Press, 1983.
3. *Поляк Б. Т.* Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 11, № 1, 3—11 (1971).
4. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974.
5. *Graybill, F. A.* Introduction to Matrices with Applications in Statistics. Wadsworth Publishing Company, Inc., 1969.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
17/VIII 1984

Ebu TAMM

PARAMEETRIST SÕLTUVA EKSTREEMUMÜLESANDE LAHENDI STABIILSUSEST

Artiklis on käsitletud s-dimensioonilisest parameetrist sõltuvate ekstreemumülesannete lahenduvust n-dimensioonilises eukleidilises ruumis R^n. On vaadeldud kaht üldist juhtu: 1) vaba miinimumi leidmist ja 2) võrdustega kitsendatud miinimumülesannet. Eeldusel, et parameetri mingi väärtuse korral eksisteerib ülesandel lahend, on mõlema juhu jaoks näidatud ruumis R^s kera, kus ülesande lahenduvus säilib parameetri väärtuste kuulumisel sellesse kerasse. Niisamuti on leitud kera ruumis R^n, kuhu kuuluvad kõik vastavad miinimumkohad.

Ebu TAMM

ON STABILITY OF SOLUTIONS OF EXTREMUM PROBLEMS DEPENDING ON A PARAMETER

In this paper the solvability of extremum problems depending on an s-dimensional parameter p in an n-dimensional Euclidean space is considered. Two general cases are treated: 1) unconstrained minimization problem $\min_x\{f(x,p)\,|\,x\in R^n\}$ and 2) equality constrained problem $\min_x\{f(x,p)\,|\,g(x,p)=0,\ x\in R^n\}$. It is assumed that for some fixed values of the parameter these problems have solutions. For both cases the conditions are presented under which there exists a sphere in R^s such that for every value of p from this sphere the problem is solvable. Besides, in R^n another sphere is found where all the respective minimum-points lie. To obtain these results a theorem on the solvability of a parameter-depending equation $Bz=a+r(z,q)$ is proved, where $B: R^n\rightarrow R^n$ is an invertible linear operator, $a\in R^n$ is a constant and $r(z,q)$ a non-linear operator from $R^n\times R^s$ to R^n.