EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS
1984, 33, 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1984.4.03

УДК 517.98

Эве ОЯ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО ТЕОРЕМЕ ХАНА—БАНАХА

(Представил А. Хумал)

§ 1. Введение

Согласно теореме Хана—Банаха, линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства, может быть продолжен на все пространство с сохранением нормы. Хорошо известно, что продолжение функционала по теореме Хана—Банаха (коротко, продолжение Хана—Банаха), вообще говоря, не однозначно.

В дальнейшем все пространства предполагаются вещественными.

Следуя Р. Р. Фельпсу [1], будем говорить, что подпространство Y нормированного пространства X обладает свойством U, если любой элемент из сопряженного пространства Y^* допускает единственное продолжение Хана—Банаха на все пространство X. Вопрос о единственности продолжения Хана—Банаха рассматривался в [2, 3], где охарактеризованы те нормированные пространства X, все подпространства которых обладают свойством U (это в точности те X, сопряженные пространства X^* к которым строго выпуклы). Затем вопрос изучался Р. Р. Фельпсом [1], который, в частности, обратил внимание на тесную связь единственности продолжения Хана—Банаха с единственностью элементов наилучшего приближения (см. также [4]), доказав, что подпространство Y нормированного пространства X обладает свойством U тогда и только тогда, когда для любого элемента из X^* существует единственный элемент наилучшего приближения в аннуляторе $Y^\perp$ (т. е. $Y^\perp$ является чебышевским подпространством в X^* [5]).

Следуя Дж. Хеннефельду [6], будем говорить, что подпространство Y нормированного пространства X является HB-подпространством в X, если его аннулятор $Y^\perp$ имеет дополнение в X^*, обозначаемое через G, такое, что при всех $f \in X^*$, $f = g + h$, $g \in G$, $h \in Y^\perp$, $h \neq 0$, выполняются неравенства $\|f\| > \|g\|$, $\|f\| \geqslant \|h\|$.

Любое HB-подпространство Y в X обладает свойством U в X (см. [6] или [7]). Дж. Хеннефельд [6] отмечает, что справедливость обратного утверждения далеко не ясна. В настоящей работе на примере будет показано, что, в действительности, обратное утверждение не справедливо: существует банахово пространство с подпространством, которое не является HB-подпространством, но обладает свойством U.

Пусть E и F — нормированные пространства. Обозначим через $L(E, F)$ пространство линейных непрерывных операторов из E в F, наделенное обычной операторной нормой, а через $K(E, F)$ — его подпространство компактных операторов. В [6] был найден класс банаховых пространств E, для которых $K(E, E)$ является HB-подпространством в $L(E, E)$.

Следуя Э. М. Альфсену и Э. Г. Эффросу [8], будем говорить, что подпространство Y нормированного пространства X является M-идеалом в X, если его аннулятор $Y^{\perp}$ имеет дополнение в X^*, обозначаемое через G, такое, что при всех $f \in X^*$ выполняется равенство $\|f\| = \|g\| + \|h\|$, где $f = g + h$, $g \in G$, $h \in Y^{\perp}$.

Ясно, что любой M-идеал является HB-подпространством. Обратное неверно: в [6] указан класс банаховых пространств E, для которых $K(E, E)$ является HB-подпространством в $L(E, E)$, но не M-идеалом.

В [8] M-идеалы охарактеризованы с помощью т. н. «свойства трех шаров»: подпространство Y банахова пространства X является M-идеалом тогда и только тогда, когда $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap Y \neq \varnothing$, если B_1, B_2, B_3 — открытые шары в X, удовлетворяющие условиям $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \neq \varnothing$ и $B_i \cap Y \neq \varnothing$, $i = 1, 2, 3$. Вопрос, когда подпространство Y является M-идеалом в X, изучался многими авторами. При этом свойство быть M-идеалом устанавливалось либо с помощью «свойства трех шаров» (см., напр., [9–11]), либо непосредственно (см., напр., [12–14]).

Настоящая работа посвящена изучению вопроса, когда подпространство Y в нормированном пространстве X обладает свойством U, является HB-подпространством или M-идеалом. С этой целью доказывается общая теорема о разложении сопряженного пространства X^* к нормированному пространству X, имеющему подпространство $Y \subset X$ с двумя сетями линейных непрерывных операторов, сходящимися к единичному оператору в слабой операторной топологии. С помощью этой теоремы устанавливаются эффективные достаточные условия для того, чтобы Y в X обладало свойством U, являлось HB-подпространством или M-идеалом. Полученные результаты применяются в случае, когда $X = Y^{**}$ и Y отождествляется с его каноническим отображением в Y^{**}, а также в случае, когда $X = L(E, F)$ и $Y = K(E, F)$. Оказывается, в частности, что введенный в [6] класс пространств E, для которых $K(E, E)$ является HB-подпространством в $L(E, E)$, можно существенно расширить. Получаются также новые примеры пар E и F с $K(E, F) \neq L(E, F)$, для которых $K(E, F)$ является M-идеалом в $L(E, F)$.

§ 2. Характеризация свойства U

Обозначим через i тождественное отображение из подпространства $Y \subset X$ в нормированное пространство X. Напомним, что сопряженный к i оператор i^* каждому функционалу $f \in X^*$ ставит в соответствие его сужение на Y.

Свойство U можно охарактеризовать в терминах разложения сопряженного пространства следующим образом.

Предложение. *Пусть Y — подпространство нормированного пространства X. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1° *Y обладает свойством U в X.*

2° *Существует изометрический изоморфизм $\varkappa$ из Y^* в X^* такой, что любой функционал $f \in X^*$ представим в виде*

$$f = \varkappa i^* f + h; \quad h \in Y^{\perp}, \tag{1}$$

и выполняется неравенство

$$\|f\| > \|i^* f\|, \tag{2}$$

если $h \neq 0$,

3° *$Y^{\perp}$ имеет дополнение в X^*, обозначаемое через G, такое, что при всех $f \in X^*$, $f = g + h$, $g \in G$, $h \in Y^{\perp}$, $h \neq 0$, выполняется неравенство*

$$\|f\| > \|g\|,$$

4° $G = \{f \in X^* : \|i^*f\| = \|f\|\}$ *является единственным дополнением аннулятора* $Y^\perp$ *в* X^*, *удовлетворяющим условию* 3°,

5° $G = \{f \in X^* : \|i^*f\| = \|f\|\}$ *является алгебраическим дополнением аннулятора* $Y^\perp$ *в* X^*.

Доказательство. $1° \Rightarrow 2°$. Пусть Y обладает свойством U в X. Пусть $\varkappa$ каждому функционалу из Y^* ставит в соответствие его единственное продолжение из X^*, сохраняющее норму. Тогда $\varkappa$ — изометрический изоморфизм из Y^* в X^*. Ясно, что $\varkappa i^*$ — линейный непрерывный проектор в X^* с $\operatorname{Ker}(\varkappa i^*) = Y^\perp$. Поэтому любой $f \in X^*$ представим в виде (1), причем $\|f\| \geqslant \|i^*f\|$. Если теперь $\|f\| = \|i^*f\|$, то $\varkappa i^*f = f$. Следовательно, $h = f - \varkappa i^*f = 0$.

$2° \Rightarrow 3°$. Ввиду разложения (1) ясно, что $\varkappa i^*$ — линейный непрерывный проектор в X^* с $\operatorname{Ker}(\varkappa i^*) = Y^\perp$. Поэтому, в силу (2), $G = \operatorname{Im}(\varkappa i^*)$ будет искомым дополнением $Y^\perp$ в X^*.

$3° \Rightarrow 4°$. Пусть G — дополнение $Y^\perp$ в X^*, существующее согласно условию 3°. Для доказательства достаточно показать, что $G = \{f \in X^* : \|i^*f\| = \|f\|\}$. Последнее равенство проверяется по схеме доказательства леммы 1.3 из [7].

$4° \Rightarrow 5°$. Импликация очевидна.

$5° \Rightarrow 1°$. Рассмотрим $F \in Y^*$. Пусть $F = i^*f_1 = i^*f_2$, где $f_1 \in X^*$, $f_2 \in X^*$, $\|F\| = \|f_1\| = \|f_2\|$. Тогда $f_1 \in G$, $f_2 \in G$ и, значит, $f_1 - f_2 \in G$. Но поскольку $f_1 - f_2 \in Y^\perp$, то $f_1 - f_2 = 0$ и, следовательно, $f_1 = f_2$.

Предложение доказано.

Как уже отмечалось, любое HB-подпространство обладает свойством U (это ясно и из предложения, $3° \Leftrightarrow 1°$), однако обратное неверно. В [6] было показано, что $K(l_1, l_1)$ не является HB-подпространством в $L(l_1, l_1)$. Сейчас, используя пример из [6], с помощью доказанного предложения приведем

Пример 1. *Пространство* $K(l_1, l_1)$ *не обладает в* $L(l_1, l_1)$ *свойством* U.

Допустим, что $K(l_1, l_1)$ обладает свойством U в $L(l_1, l_1)$. Тогда, согласно предложению, $G = \{f \in L(l_1, l_1)^* : \|i^*f\| = \|f\|\}$ является дополнением $K(l_1, l_1)^\perp$ в $L(l_1, l_1)^*$ таким, что при всех $f = g + h$, $g \in G$, $h \in K(l_1, l_1)^\perp$, $h \neq 0$, выполняется неравенство $\|f\| > \|g\|$. В [6] найдены $g_0 \in G$ и $h_0 \in K(l_1, l_1)^\perp$ с $\|g_0\| = \|h_0\| = 1$ такие, что $\|g_0 + h_0\| \leqslant 1$, в противоречие с $\|g_0 + h_0\| > \|g_0\|$.

§ 3. Основная теорема

Пусть X — нормированное пространство. Обозначим через $S_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ замкнутый единичный шар и через I_X — единичный оператор в X.

Имеет место следующая основная

Теорема 1. *Пусть Y — подпространство нормированного пространства X. Пусть существуют сети (U_α) и (V_β) непрерывных линейных операторов из X в X, удовлетворяющие условиям*

1° $\operatorname{Im} U_\alpha \subset Y \ \forall \alpha$, $\lim\limits_{\alpha} g(U_\alpha y) = g(y) \ \forall y \in Y, \ \forall g \in Y^*$,

2° $\operatorname{Im} V_\beta \subset Y \ \forall \beta$, $\lim\limits_{\beta} g(V_\beta y) = g(y) \ \forall y \in Y, \ \forall g \in Y^*$,

3° *Существует число $M > 0$ такое, что при любых $\varepsilon > 0$ и $x \in S_X$ существует число $\lambda > 0$ такое, что при любых α и $y \in S_Y$*

$$\lim_{\beta} \sup \|\lambda V^\beta U^\alpha x + V_\beta U_\alpha y\| \leqslant 1 + M\varepsilon\lambda, \tag{3}$$

где $U^\alpha = I_X - U_\alpha$ *и* $V^\beta = I_X - V_\beta$,

4° $\sup\limits_\beta \|V_\beta\| \leqslant 1$.

Тогда Y *обладает свойством* U *в* X. *Если дополнительно*

5° $\liminf\limits_\beta \|V^\beta\| \leqslant 1$,

то Y *является НВ-подпространством в* X. *Если наряду с* 1°, 2° *и* 4° *выполняется*

6° *Существует число* $M > 0$ *такое, что при любом* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $\lambda > 0$ *такое, что при любых* α, $x \in S_X$ *и* $y \in S_Y$ *справедливо неравенство* (3),

то существует изометрический изоморфизм $\varkappa$ *из* Y^* *в* X^* *такой, что любой функционал* $f \in X^*$ *представим в виде* (1), *причем*

$$\lambda \|h\| + \|i^* f\| \leqslant (1 + M\varepsilon\lambda) \|f\|. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим V_β как элементы из $L(X, X)^{**}$. Согласно 4°, они принадлежат замкнутому шару пространства $L(X, X)^{**}$, который по теореме Алаоглу является w^*-компактным. Следовательно, сеть (V_β) содержит w^*-сходящуюся подсеть. Поскольку подсеть сети (V_β) также удовлетворяет условиям теоремы, то без ограничения общности можно считать, что сеть (V_β) w^*-сходится. Тогда при всех $x \in X$ и $g \in Y^*$ существует $\lim_\beta g(V_\beta x)$, так как функционал $\varphi : A \to f(Ax)$, $A \in L(X, X)$, f — непрерывное линейное продолжение функционала g на X, принадлежит $L(X, X)^*$.

Пусть $g \in Y^*$. Положим

$$(\varkappa g)(x) = \lim_\beta g(V_\beta x); \quad x \in X. \tag{5}$$

Тогда $\varkappa$ будет линейным непрерывным оператором из Y^* в X^* с нормой $\|\varkappa\| \leqslant \sup_\beta \|V_\beta\| \leqslant 1$. В силу 2° имеем

$$i^* \varkappa g = g \quad \forall g \in Y^*. \tag{6}$$

Значит, $\|\varkappa g\| \geqslant \|g\|$ и, следовательно, $\varkappa$ — изометрический изоморфизм.

Теперь ясно, что $\varkappa i^*$ — непрерывный линейный проектор в X^* с $\operatorname{Im}(\varkappa i^*) = \operatorname{Im} \varkappa$ и $\operatorname{Ker}(\varkappa i^*) = Y^\perp$. Поэтому любой функционал $f \in X^*$ представим в виде (1).

Положим $g = i^* f$ и зададим произвольные числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Выберем $x \in S_X$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$h(x) > \|h\| - \varepsilon\delta.$$

Согласно условию 3° (соответственно условию 6°), числу ε и элементу x (соответственно числу ε) выберем число λ.

Пусть $y \in S_Y$ и α (существует в силу 1°) такие, что

$$g(U_\alpha y) > \|g\| - \varepsilon\lambda\delta/2.$$

Поскольку

$$\lim_\beta g(V_\beta U_\alpha y) = g(U_\alpha y)$$

и, согласно (6) и (5),

$$\lim_\beta (\varkappa g)(V^\beta U^\alpha x) = (\varkappa g)(U^\alpha x) - \lim_\beta g(V_\beta U^\alpha x) =$$

$$= (\varkappa g)(U^\alpha x) - (\varkappa g)(U^\alpha x) = 0,$$

то существует индекс β_0 такой, что

$$g(V_\beta U_\alpha y) > \|g\| - \varepsilon\lambda\delta \tag{7}$$

и

$$|(\varkappa g)(V^\beta U^\alpha x)| < \varepsilon\delta \tag{8}$$

при $\beta \geqslant \beta_0$. Далее, поскольку $h(x) = h(V^\beta U^\alpha x)$, то

$$h(V^\beta U^\alpha x) > \|h\| - \varepsilon\delta \tag{9}$$

при $\beta \geqslant \beta_0$.

Ввиду 3° (соответственно 6°) для любого $\gamma > 0$ существует индекс $\beta \geqslant \beta_0$ такой, что

$$\|\lambda V^\beta U^\alpha x + V_\beta U_\alpha y\| \leqslant 1 + M\varepsilon\lambda + \gamma,$$

и поэтому

$$\begin{aligned}(1+M\varepsilon\lambda+\gamma)\|f\| \geqslant f(\lambda V^\beta U^\alpha x + V_\beta U_\alpha y) = \\ = \lambda(\varkappa g)(V^\beta U^\alpha x) + g(V_\beta U_\alpha y) + \lambda h(V^\beta U^\alpha x) > \\ > \|g\| + \lambda\|h\| - 3\varepsilon\lambda\delta,\end{aligned}$$

согласно (7)—(9). Значит, выполняется неравенство

$$(1+M\varepsilon\lambda)\|f\| \geqslant \|g\| + \lambda\|h\| - 3\varepsilon\lambda\delta. \tag{10}$$

Если теперь выполняется условие 6°, то λ не зависит от δ, и из (10) сразу вытекает (4).

Пусть выполняется условие 3°. Допустим, что $\|f\| = \|g\|$. Тогда из (10) получим, что

$$3\varepsilon\delta + M\varepsilon\|f\| \geqslant \|h\|,$$

откуда вытекает, что $\|h\| = 0$. Следовательно, условие (2) выполняется. В силу предложения, Y обладает свойством U в X.

Покажем, наконец, что в предположениях 1°—5° Y является HB-подпространством в X. Согласно вышедоказанному, остается проверить неравенство $\|f\| \geqslant \|h\|$. Поскольку, согласно (6) и (5), при всех $x \in X$

$$\lim_\beta (\varkappa g)(V^\beta x) = (\varkappa g)(x) - (\varkappa g)(x) = 0,$$

и при всех $x \in X$ и β

$$h(x) = h(V^\beta x) = f(V^\beta x) - (\varkappa g)(V^\beta x),$$

то

$$h(x) = \lim_\beta f(V^\beta x) \quad \forall x \in X,$$

откуда с помощью 5° вытекает неравенство $\|h\| \leqslant \|f\|$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 ясно, что ее утверждения имеют место и без предположения 4°, если при всех $x \in X$, $g \in Y^*$ существует предел (5), а отображение $\varkappa$, определенное соотношением (5), будет линейным непрерывным оператором из Y^* в X^* с нормой $\|\varkappa\| \leqslant 1$.

Замечание 2. Условие 6° (следовательно и 3°) выполняется, если существуют $M > 0$ и $p > 1$ такие, что при любых α, β, $x \in S_X$ и $y \in S_Y$

$$\|V^\beta U^\alpha x+V_\beta U_\alpha y\|^p\leqslant M\|V^\beta U^\alpha x\|^p+\|V_\beta U_\alpha y\|^p,$$

а

$$\sup_\alpha\|U_\alpha\|\leqslant 1,\qquad \sup_\beta\|V_\beta\|\leqslant 1.$$

Действительно, поскольку при $\lambda\in(0,1]$

$$\|\lambda V^\beta U^\alpha x+V_\beta U_\alpha y\|\leqslant\max\{1,\ \|\lambda V^\beta U^\alpha x+V_\beta U_\alpha y\|^p\}\leqslant$$
$$\leqslant\max\{1,\ M\lambda^p\|V^\beta U^\alpha x\|^p+\|V_\beta U_\alpha y\|^p\}\leqslant$$
$$\leqslant 1+4^pM\lambda^p,$$

то 6° выполняется, если для выбранного $\varepsilon>0$ положить $\lambda=\min\{1,\ \varepsilon^{1/(p-1)}\}$.

Отметим, что, в силу замечания 2, из теоремы 1 сразу вытекает тот известный факт, что любое подпространство Y гильбертова пространства X является HB-подпространством. Для этого в качестве сетей (U_α) и (V_β) нужно взять постоянные сети с $U_\alpha=P$, $V_\beta=P$, где P — ортопроектор в X, проектирующий на Y.

Замечание 3. Требование 5° существенно: существуют пространства $Y\subset X$ с $\lim\inf_\beta\|V^\beta\|>1$, удовлетворяющие условиям 1°—4° и 6° такие, что Y не является HB-подпространством в X (см. пример 2).

Следствие 1. *Пусть Y — подпространство нормированного пространства X. Пусть существуют сети (U_α) и (V_β) непрерывных линейных операторов из X в X, удовлетворяющие условиям* 1°, 2° *и* 4° *теоремы* 1, *и пусть существует число $\lambda\in(0,1]$ такое, что при любых α, $x\in S_X$ и $y\in S_Y$*

$$\lim_\beta\sup\|\lambda V^\beta U^\alpha x+V_\beta U_\alpha y\|\leqslant 1.$$

Тогда существует изометрический изоморфизм $\varkappa$ из Y^* в X^* такой, что любой функционал $f\in X^*$ представим в виде (1), *причем*

$$\lambda\|h\|+\|i^*f\|\leqslant\|f\|.\tag{11}$$

Доказательство очевидно, поскольку здесь (4) выполняется при постоянном λ и при произвольных $M>0$ и $\varepsilon>0$.

Замечание 4. Если в следствии 1 $\lambda=1$, то Y является M-идеалом.

Приведем пример банахова пространства, содержащего при любом n подпространство Y с $\dim Y=n$, которое обладает свойством U, но не является HB-подпространством.

Пример 2. *Пусть c_A — поле суммируемости метода арифметических средних A. Пусть $U_n(\xi_1,\xi_2,\ldots)=(\xi_1,\ldots,\xi_n,0,0,\ldots)$, $(\xi_1,\xi_2\ldots)\in c_A$. Тогда $\operatorname{Im}U_n$, $n=1,2,\ldots$, обладает свойством U, но не является HB-подпространством в c_A.*

Пусть $X=c_A=\{(\xi_1,\xi_2,\ldots):\ \exists\lim_m(\sum_{k=1}^m\xi_k)/m\}$ — банахово пространство с нормой

$$\|(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots)\|=\sup_m\Bigl(\Bigl|\sum_{k=1}^m\xi_k\Bigr|/m\Bigr)$$

(см., напр., [15]). Зафиксируем $n=1,2,\ldots$ и рассмотрим $Y=\operatorname{Im}U_n\subset X$. Если в качестве сетей (U_α) и (V_β) в следствии 1 взять постоянные сети с $U_\alpha=U_n$, $V_\beta=U_n$, то все предположения следствия 1 (значит, и условия 1°—4° и 6° теоремы 1) выполнены. Действительно, условия 1°, 2° и 4° теоремы 1 очевидным образом удовлетворяются. И если взять $2\lambda=1/(n+1)$, то при любых $x\in S_X$, $y\in S_Y$, α и β

$$\|\lambda V^\beta U^\alpha x + V_\beta U_\alpha y\| = \|\lambda U^n x + U_n y\| \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\|U_n y\|,\ n\|U_n y\|/(n+1) + \lambda\|U^n x\|\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{1,\ n/(n+1) + 2\lambda\} = 1,$$

где $U^n = I_X - U_n$. Следовательно, Y обладает свойством U в X, причем неравенство (11) выполняется в виде

$$\frac{\|h\|}{2(n+1)} + \|i^* f\| \leqslant \|f\|.$$

Отметим, что условие 5° теоремы 1 не удовлетворено, поскольку при $x_0 = (\xi_k)$ с $\xi_n = -n$, $\xi_{n+1} = 2n+1$, $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = \xi_{n+2} = \ldots = 0$, имеем $\|x_0\| = 1$, а $\|U^n x_0\| = 1 + n/(n+1)$.

Покажем, что Y не является HB-подпространством в X. Допустим, что Y — HB-подпространство. Пусть G — дополнение $Y^\perp$ в X^* такое, что при всех $f \in X^*$, $f = g + h$, $g \in G$, $h \in Y^\perp$, $h \neq 0$, выполняются неравенства $\|f\| > \|g\|$ и $\|f\| \geqslant \|h\|$. Тогда, согласно предложению, $G = \{f \in X^* : \|i^* f\| = \|f\|\}$. Определим g_0, $h_0 \in X^*$ формулами (общий вид линейных непрерывных функционалов в c_A см. в [15])

$$g_0(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad h_0(x) = \frac{\xi_{n+1}}{n+1}, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in X.$$

Тогда $g_0 \in G$, так как $\|i^* g_0\| = \|g_0\|$, и $h_0 \in Y^\perp$. Рассмотрим $f_0 = g_0 + h_0$. Очевидно, что $\|f_0\| \leqslant 1$. Поскольку $h_0(x_0) = (2n+1)/(n+1)$, то $\|h_0\| > 1$, в противоречие с $\|f_0\| \geqslant \|h_0\|$.

Введя понятие свойства U, Р. Р. Фельпс [1] доказал, что замкнутые идеалы в банаховой алгебре $C(T)$ всех непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве T обладают свойством U. Позже из основополагающей работы о M-идеалах [8, 9] (см. также [16]) выяснилось, что замкнутые идеалы в $C(T)$ являются даже M-идеалами. Приведем здесь простое доказательство немного более общего факта, основывающееся на теореме 1.

Пример 3. *Пусть T — нормальное топологическое пространство и $C(T)$ — банахово пространство всех ограниченных непрерывных функций на T. Пусть A — замкнутое подмножество пространства T и $Y = \{x \in C(T) : x(t) = 0\ \forall t \in A\}$. Тогда Y является M-идеалом в $C(T)$.*

Рассмотрим направленное множество всех открытых покрытий α пространства T, где $\alpha' \geqslant \alpha$ тогда и только тогда, когда для любого $G' \in \alpha'$ существует $G \in \alpha$ такое, что $G' \subset G$. Пусть $G_\alpha = \bigcup\{G \in \alpha : G \cap A \neq \varnothing\}$ и z_α — непрерывная функция на T со значениями в $[0, 1]$, равная нулю на A и единице на $T \setminus G_\alpha$. Определим $U_\alpha : C(T) \to C(T)$ формулой $U_\alpha x = x z_\alpha$. Покажем, что $U_\alpha y \to y$ при всех $y \in Y$. В силу непрерывности y, для любого $\varepsilon > 0$ существует α такое, что если $G \in \alpha$ и $s, t \in G$, то $|y(s) - y(t)| < \varepsilon$. Если теперь $\alpha' \geqslant \alpha$, то $\|y - U_{\alpha'} y\| \leqslant \varepsilon$. Пусть сеть (V_β) та же самая, что и сеть (U_α). Тогда условия 1°, 2° и 4° теоремы 1 выполнены. И поскольку $\|V^\beta U^\alpha x + V_\beta U_\alpha y\| \leqslant 1$ при любых α, β и $x, y \in S_{C(T)}$, то, согласно следствию 1 и замечанию 4, Y является M-идеалом в $C(T)$.

В нижеследующих параграфах теорема 1 и следствие 1 применяются в случаях $X = Y^{**}$, Y — нормированное пространство, и $X = L(E, F)$, $Y = K(E, F)$.

§ 4. Продолжение функционалов с Y на Y^{**}

Пусть Y — нормированное пространство. Пусть i обозначает каноническое вложение пространства Y в Y^{**}, а Y отождествляется с $\operatorname{Im} i$.

Через j обозначим каноническое вложение Y^* в Y^{***}. Отметим, что для любого функционала $f \in Y^{***}$ имеет место разложение

$$f = ji^*f + h, \quad h \in Y^\perp, \tag{12}$$

так как ji^* является проектором в Y^{***} с $\operatorname{Ker}(ji^*) = Y^\perp$. Применяя теорему 1, получим следующий результат.

Теорема 2. *Если существуют сети (u_α) и (v_β) непрерывных линейных операторов из Y в Y, удовлетворяющие условиям*

1° $\operatorname{Im} u^{**}_\alpha \subset Y \quad \forall \alpha, \quad \lim\limits_\alpha u_\alpha y = y \quad \forall y \in Y,$

2° $\operatorname{Im} v^{**}_\beta \subset Y \quad \forall \beta, \quad \lim\limits_\beta v^*_\beta g = g \quad \forall g \in Y^*,$

3° *Существует $M > 0$ такое, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda > 0$ такое, что при любых α, β и $x, y \in S_Y$*

$$\|\lambda v^\beta u^\alpha x + v_\beta u_\alpha y\| \leqslant 1 + M\varepsilon\lambda,$$

где $u^\alpha = I_Y - u_\alpha$, $v^\beta = I_Y - v_\beta$,
то Y обладает свойством U в Y^{**}, причем для любого функционала $f \in Y^{***}$, имея в виду разложение (12), *справедливо неравенство* (4). *Если дополнительно*

$$\liminf_\beta \|v^\beta\| \leqslant 1,$$

то Y является НВ-подпространством в Y^{**}.

Доказательство. Если положить $X = Y^{**}$, $U_\alpha = u_\alpha{}^{**}$ и $V_\beta = v_\beta{}^{**}$, то условия 1° и 2° теоремы 1 очевидным образом выполняются. Условие 6° теоремы 1 также выполнено. Действительно, в противном случае существовало бы $\varepsilon > 0$ так, что при любом $\lambda > 0$ существовали $\alpha, \beta, y \in S_Y$, $G \in S_{Y^{**}}$, число $\delta > 0$ и $g \in S_{Y^*}$ такие, что

$$\lambda [(v^\beta)^{**} (u^\alpha)^{**} G](g) + g(v_\beta u_\alpha y) \geqslant 1 + M\varepsilon\lambda + 2\delta.$$

Поскольку при линейном непрерывном операторе $T = v^\beta u^\alpha$ образ $T(S_Y)$ w^*-плотен в $T^{**}(S_{Y^{**}})$, то существует $x \in S_Y$ такой, что

$$|[(v^\beta)^{**}(u^\alpha)^{**}G](g) - g(v^\beta u^\alpha x)| \leqslant \delta/\lambda.$$

Следовательно,

$$\|\lambda v^\beta u^\alpha x + v_\beta u_\alpha y\| \geqslant \lambda g(v^\beta u^\alpha x) + g(v_\beta u_\alpha y) \geqslant$$
$$\geqslant -\delta + 1 + M\varepsilon\lambda + 2\delta = 1 + M\varepsilon\lambda + \delta,$$

что невозможно.

В силу 2° при всех $g \in Y^*$, $G \in Y^{**}$ имеем

$$(jg)(G) = G(g) = \lim_\beta G(v^*_\beta g) = \lim_\beta g(v^{**}_\beta G),$$

так что в нашем случае $\varkappa = j$ (см. (5)). Для завершения доказательства применим замечание 1.

Замечание 5. Из доказательства теоремы 2 ясно, что в случае, когда (u_α) и (v_β) являются соответственно последовательностями (u_n) и (v_n), условие 3° в теореме 2 можно заменить, например, следующим условием: существует $M > 0$ такое, что при любом $\varepsilon > 0$ найдутся $\lambda > 0$ и $k \in \{1, 2, \ldots\}$ такие, что при любых $m \geqslant kn$ и $x, y \in S_Y$

$$\|\lambda v^m u^n x + v_m u_n y\| \leqslant 1 + M\varepsilon\lambda, \tag{13}$$

где $u^n = I_Y - u_n$, $v^m = I_Y - v_m$.

Как и в случае теоремы 1, получается следующее

Следствие 2. *Если в теореме 2 вместо 3° выполняется условие: существует число $\lambda \in (0, 1]$ такое, что при любых α, β и $x, y \in S_Y$*

$$\|\lambda v^\beta u^\alpha x + v_\beta u_\alpha y\| \leqslant 1,$$

то для любого функционала $f \in Y^{***}$, имея в виду разложение (12), *справедливо неравенство* (11).

Из следствия 2 легко вытекает известный факт (см., напр., [10]), что $c_0(\Gamma)$ является M-идеалом в $m(\Gamma) = c_0(\Gamma)^{**}$, где Γ — произвольное множество индексов. В самом деле, пусть Σ — система всех конечных подмножеств множества Γ, направленная по включению, и пусть u_α, $\alpha \in \Sigma$, конечномерный проектор в $c_0(\Gamma)$, соответствующий α (т. е. определенный условием $(u_\alpha y)(\gamma) = y(\gamma)$, если $\gamma \in \alpha$, и $(u_\alpha y)(\gamma) = 0$, если $\gamma \notin \alpha$). Если сеть (v_β) та же самая, что и сеть (u_α), то условия следствия 2 очевидным образом удовлетворяются, причем $\lambda = 1$. Следовательно, $c_0(\Gamma)$ есть M-идеал в $m(\Gamma)$.

Пусть теперь Y — банахово пространство с базисом $(e_i)_{i=1,2,\ldots}$. Пусть

$$u_n x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in Y, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и $u^n = I_Y - u_n$. Все необходимые нам факты о базисах можно найти, например, в [17] или [18]. Из теоремы 2 и замечания 5 вытекает

Следствие 3. *Пусть Y — банахово пространство с натягивающим базисом. Если существует $M > 0$ такое, что при любом $\varepsilon > 0$ найдутся $\lambda > 0$ и $k \in \{1, 2, \ldots\}$ такие, что при любых $m \geqslant kn$ и $x, y \in S_Y$*

$$\|\lambda u^m x + u_n y\| \leqslant 1 + M\varepsilon\lambda, \tag{14}$$

то Y обладает свойством U в Y^{**}, причем для любого функционала $f \in Y^{***}$, имея в виду разложение (12), *справедливо неравенство* (4).

Доказательство. Если в качестве сетей (u_α) и (v_β) в теореме 2 взять последовательность (u_n), то условия 1° и 2° теоремы 2 выполняются, поскольку базис натягивающий и, ввиду конечномерности операторов u_n, $\operatorname{Im} u_n^{**} \subset Y$. И так как неравенство (13) примет вид (14), то остается использовать замечание 5.

Пример 4. *Пусть Y — замыкание множества всех последовательностей, сходящихся к нулю, в c_A, где A — метод арифметических средних (см. пример 2). Тогда Y обладает свойством U в Y^{**}, причем для любого $f \in Y^{***}$, имея в виду разложение* (12), *выполняется* (11) *с $\lambda = 1/2$.*

В Y совокупность $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, ... образует базис, который не является ограниченно полным, поскольку $\|\sum_{i=1}^{n} e_i\| = 1$ при всех n, но ряд $\sum_{i=1}^{\infty} e_i$ не сходится. Следовательно, пространство Y не рефлексивно. Так как $\lim_m (\sum_{k=1}^{m} \xi_k)/m = 0$ при всех $(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in Y$, то из общего вида линейных непрерывных функционалов в c_A (см. [15]) легко вытекает натягиваемость базиса (e_i). Зафиксируем произвольное $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Пусть $\lambda = (1 - 1/k)/2$. Тогда при любых $m \geqslant kn$ и $x, y \in S_Y$

$$\begin{aligned} \|\lambda u^m x + u_n y\| &\leqslant \max\{\|u_n y\|,\ n\|u_n y\|/(m+1) + \lambda\|u^m x\|\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{1,\ n/m + 2\lambda\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{1,\ 1/k + 2\lambda\} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно следствию 3, Y обладает свойством U в Y^{**}, причем (4) выполняется при заданном λ и произвольном $\varepsilon > 0$. Значит, имеет место неравенство (11) с $\lambda = (1-1/k)/2$. В силу произвольности k выполняется (11) и с $\lambda = 1/2$.

§ 5. Продолжение функционалов с $K(E, F)$ на $L(E, F)$

В этом параграфе теорема 1 применяется в случае, когда $X = L(E, F)$ и $Y = K(E, F)$, где E и F — бесконечномерные нормированные пространства.

Введя понятие HB-подпространства, Дж. Хеннефельд [6] доказал, что $K(E, E)$ является HB-подпространством в $L(E, E)$, если E — банахово пространство с безусловно монотонным и равномерно гладким базисом, в частности, если E — лоренцово пространство последовательностей $d(w, p)$ с $1 < p < \infty$. Нижеследующая теорема 3 показывает, что $K(E, F)$ является HB-подпространством в $L(E, F)$ при произвольном E, если F принадлежит классу пространств, который существенно шире, чем пространства с безусловно монотонными и равномерно гладкими базисами.

Теорема 3. *Пусть E — произвольное нормированное пространство и пусть нормированное пространство F такое, что существует сеть (B_β), $B_\beta \in K(F, F)$, удовлетворяющая условиям*

1° $\lim\limits_{\beta} B_\beta y = y \quad \forall y \in F$,

2° $\sup\limits_{\beta} \|B_\beta\| \leqslant 1$,

3° *Существует число $N > 0$ такое, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\mu > 0$ такое, что при любых β и $y, z \in S_F$*

$$\|B_\beta y + \mu B^\beta z\| \leqslant 1 + N\varepsilon\mu,$$

где $B^\beta = I_F - B_\beta$.

Тогда существует изометрический изоморфизм $\varkappa$ из $K(E, F)^*$ в $L(E, F)^*$ такой, что любой функционал $f \in L(E, F)^*$ представим в виде (1), *причем справедливо* (4) *с $\lambda = \mu\nu_0$ и $M = N/\nu_0$, где $\nu_0 = \sup\{\nu : \nu\|B^\beta\| \leqslant 1 \ \forall\beta\}$. Если дополнительно*

$$\liminf_{\beta} \|B^\beta\| \leqslant 1,$$

то $K(E, F)$ является HB-подпространством в $L(E, F)$.

Доказательство. Пусть $S \in L(E, F)$. Положим $V_\beta(S) = B_\beta S$. Тогда $\operatorname{Im} V_\beta \subset K(E, F)$. Ввиду 1° и 2° сеть (B_β) сходится к I_F равномерно на относительно компактных множествах в F. Следовательно, $\lim_\beta V_\beta(T) = T$ при всех $T \in K(E, F)$. Пусть сеть (U_α) та же самая, что и сеть (V_β). Тогда условия 1° и 2° теоремы 1 выполнены. Поскольку $\|V_\beta\| \leqslant \|B_\beta\|$, то и условие 4° теоремы 1 выполнено. Покажем справедливость условия 6° теоремы 1. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу 3° существует $\mu > 0$ такое, что при любых α, β и $S, T \in S_{L(E,F)}$ и при любом $x \in S_E$

$$\begin{aligned} &\|[\lambda(V^\beta U^\alpha)(S) + (V_\beta U_\alpha)(T)](x)\| = \\ &= \|\mu B^\beta(\nu_0 B^\alpha S x) + B_\beta(B_\alpha T x)\| \leqslant \\ &\leqslant 1 + N\varepsilon\mu = 1 + M\varepsilon\lambda, \end{aligned}$$

так что 6° выполняется. Наконец, отметим, что $\|V^\beta\| \leqslant \|B^\beta\|$, и, таким образом, остается использовать теорему 1.

Из теоремы 3 вытекает, что $K(E, F)$ обладает свойством U в $L(E, F)$, если E — произвольное нормированное пространство, а F обладает монотонным и равномерно гладким базисом (определение равномерно гладкого базиса см. в [7]).

Замечание 6. Аналогично замечанию 2 можно показать, что условие 3° теоремы 3 выполняется, если существуют числа $M > 0$ и $p > 1$ такие, что при любых β и $y, z \in S_F$

$$\|B_\beta y + B^\beta z\|^p \leqslant \|B_\beta y\|^p + M\|B^\beta z\|^p, \quad \|B_\beta\| \leqslant 1.$$

В силу замечания 6 из теоремы 3 сразу следует, что $K(E, F)$ является HB-подпространством в $L(E, F)$ при произвольном E, если $F = l_p(\Gamma)$ или $F = d(w, p)$ (о лоренцовом пространстве последовательностей $d(w, p)$ см. в [18]), где $1 < p < \infty$ и Γ — произвольное множество индексов.

Как и в случае теоремы 1 получается

Следствие 4. *Если в теореме 3 вместо 3° выполняется условие: существует $\mu > 0$ такое, что при любых β и $y, z \in S_F$*

$$\|B_\beta y + \mu B^\beta z\| \leqslant 1,$$

то имеет место утверждение теоремы 3, причем вместо (4) выполняется (11) с $\lambda = \min\{1, \mu\nu_0\}$.

Из следствия 4 легко вытекает известный факт (см., напр., [11, 14]), что $K(E, c_0(\Gamma))$ является M-идеалом в $L(E, c_0(\Gamma))$.

В некотором смысле симметрическим теореме 3 является

Теорема 4. *Пусть F — произвольное нормированное пространство и пусть нормированное пространство E такое, что существует сеть (A_α), $A_\alpha \in K(E, E)$, удовлетворяющая условиям*

1° $\lim\limits_\alpha A_\alpha^* x^* = x^* \quad \forall x^* \in E^*$,

2° $\sup\limits_\alpha \|A_\alpha\| \leqslant 1$,

3° *Существует число $N > 0$ такое, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\mu > 0$ такое, что при любых α и $x^*, y^* \in S_{E^*}$*

$$\|A_\alpha^* x^* + \mu (A^\alpha)^* y^*\| \leqslant 1 + N\varepsilon\mu,$$

где $A^\alpha = I_E - A_\alpha$.
Тогда существует изометрический изоморфизм $\varkappa$ из $K(E, F)^*$ в $L(E, F)^*$ такой, что любой функционал $f \in L(E, F)^*$ представим в виде (1), причем справедливо (4) с $\lambda = \mu\nu_0$ и $M = N/\nu_0$, где $\nu_0 = \sup\{\nu : \nu\|A^\alpha\| \leqslant 1 \ \forall\alpha\}$. Если дополнительно

$$\liminf_\alpha \|A^\alpha\| \leqslant 1,$$

то $K(E, F)$ является HB-подпространством в $L(E, F)$.

Доказательство. Введем сеть (U_α) по формуле $U_\alpha(S) = SA_\alpha$, $S \in L(E, F)$. Тогда $\operatorname{Im} U_\alpha \subset K(E, F)$. Ввиду 1° и 2° сеть (A_α^*) сходится к I_{E^*} равномерно на относительно компактных множествах в E^*. Следовательно, при всех $T \in K(E, F)$

$$\lim_\alpha \|U_\alpha(T) - T\| = \lim_\alpha \|A_\alpha^* T^* - T^*\| = 0,$$

поскольку $T^* \in K(F^*, E^*)$. Пусть сеть (V_β) та же самая, что и сеть (U_α). Тогда условия 1° и 2° теоремы 1 выполнены. Остальные предположения теоремы 1 проверяются аналогично доказательству теоремы 3, учитывая равенство

$$\|\lambda(V^\beta U^\alpha)(S)+(V_\beta U_\alpha)(T)\|=\|[\lambda(V^\beta U^\alpha)(S)+(V_\beta U_\alpha)(T)]^*\|$$

при проверке условия 6° теоремы 1. Таким образом, остается использовать теорему 1.

Как и в случае теоремы 3, сделаем

Замечание 7. Условие 3° теоремы 4 выполняется, если существуют числа $M>0$ и $p>1$ такие, что при любых α и x^*, $y^*\in S_{E^*}$

$$\|A_\alpha^* x^*+(A^\alpha)^* y^*\|^p\leqslant\|A_\alpha^* x^*\|^p+M\|(A^\alpha)^* y^*\|^p, \quad \|A_\alpha\|\leqslant 1.$$

В силу замечания 7 из теоремы 4 следует, что $K(E,F)$ является HB-подпространством в $L(E,F)$ при произвольном F, если, например, $E=l_p(\Gamma)$, где $1<p<\infty$ и Γ — произвольное множество индексов.

Следующей теоремой 5 воспользуемся для получения новых примеров пар E и F с $K(E,F)\neq L(E,F)$, для которых $K(E,F)$ является M-идеалом в $L(E,F)$. Кроме пары E и F, где E — произвольное нормированное пространство и $F=c_0(\Gamma)$ (в [11] предложен несколько более общий вариант для F), единственными примерами таких пар, известными до сих пор, были $E=l_p(\Gamma_1)$ и $F=l_q(\Gamma_2)$, где $1<p\leqslant q<\infty$ и Γ_1, Γ_2 — бесконечные множества индексов (см. [14]). Отметим, в частности, что и этот последний пример получается из теоремы 5.

Теорема 5. *Пусть нормированные пространства E и F такие, что существуют сети (A_α), $A_\alpha\in K(E,E)$, и (B_β), $B_\beta\in K(F,F)$, удовлетворяющие условиям 1° и 2° теоремы 3 и 1° теоремы 4, и существуют функции N_E и N_F на $[0,\infty)\times[0,\infty)$ такие, что при любых $x\in S_E$, $y,z\in F$, α, β и $a,b,c,d\in[0,\infty)$, где $a\leqslant c$ и $b\leqslant d$, выполняются неравенства*

$$N_E(\|A_\alpha x\|,\ \|A^\alpha x\|)\leqslant 1,$$

$$\|B_\beta y+B^\beta z\|\leqslant N_F(\|B_\beta y\|,\ \|B^\beta z\|), \tag{15}$$

где $A^\alpha=I_E-A_\alpha$, $B^\beta=I_F-B_\beta$,

$$N_F(a,b)\leqslant N_F(c,d), \tag{16}$$

$$N_F(a,b)\leqslant N_E(a,b).$$

Тогда имеет место утверждение следствия 1 *с* $X=L(E,F)$, $Y=K(E,F)$ и $\lambda=\sup\{\mu\in[1/2,1]:\ \mu\|B^\beta\|\leqslant 1\ \ \forall\beta\}$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что выполняется и условие 2° теоремы 4. Действительно, для $A_\alpha x$, где $x\in S_E$ существуют β и $y\in F$ такие, что $\|A_\alpha x\|=\|B_\beta y\|$. Но тогда

$$\|A_\alpha x\|=\|B_\beta y\|\leqslant N_F(\|B_\beta y\|,0)\leqslant N_F(\|B_\beta y\|,\ \|A^\alpha x\|)\leqslant$$
$$\leqslant N_E(\|A_\alpha x\|,\ \|A^\alpha x\|)\leqslant 1.$$

Сеть (U_α) определим как в доказательстве теоремы 4, а сеть (V_β) — как в доказательстве теоремы 3. Тогда условия 1°, 2° и 4° теоремы 1 выполнены. Кроме того, при любых α, β и $S,T\in S_{L(E,F)}$ и при любом $x\in S_E$ имеем

$$\|[\lambda(V^\beta U^\alpha)(S)+(V_\beta U_\alpha)(T)](x)\|=\|\lambda B^\beta SA^\alpha x+B_\beta TA_\alpha x\|\leqslant$$
$$\leqslant N_F(\|B_\beta TA_\alpha x\|,\ \|B^\beta(\lambda SA^\alpha x)\|\leqslant N_F(\|A_\alpha x\|,\ \|A^\alpha x\|)\leqslant$$
$$\leqslant N_E(\|A_\alpha x\|,\ \|A^\alpha x\|)\leqslant 1,$$

так что остается применить следствие 1.

Замечание 8. Если в теореме 5 вместо (15) выполняется равенство

$$\|B_\beta y + B^\beta z\| = N_F(\|B_\beta y\|,\ \|B^\beta z\|)$$

при любых $y, z \in F$ и β, то выполняется также предположение 2° из теоремы 3. Кроме того, $\lambda = 1$, так что $K(E, F)$ является M-идеалом в $L(E, F)$.

В самом деле, если $y \in S_F$, то

$$\|B_\beta y\| = N_F(\|B_\beta y\|,\ 0) \leqslant N_F(\|B_\beta y\|,\ \|B^\beta y\|) = \|y\| \leqslant 1,$$

так что 2° из теоремы 3 выполняется. Аналогично проверяется, что $\sup_\beta \|B^\beta\| \leqslant 1$, откуда следует, что $\lambda = 1$.

Замечание 9. Частный случай теоремы 5, где $E = F$ является банаховым пространством, имеющим безусловный натягивающий базис, был доказан Дж. Хеннефельдом (см. [12], теорема 2.1). Результат Дж. Хеннефельда был обобщен Дж. Джонсоном (см. [13], теорема 1) на случай, когда $E = F$ обладает сетью конечномерных операторов (B_β), удовлетворяющей условиям 1° и 2° теоремы 3, $\lim_\beta B_\beta^* x^* = x^*$ при всех $x^* \in E^*$, $\|B_\beta y + B^\gamma z\| = N_F(\|B_\beta y\|,\ \|B^\gamma z\|)$ при всех $y,\ z \in E = F$ и $\gamma \geqslant \beta$, где функция N_F на $[0, \infty) \times [0, \infty)$ удовлетворяет еще условию (16). Теорема 5 обобщает и улучшает результат Дж. Джонсона. Согласно замечанию 8, в предположениях теоремы Джонсона (и даже в более общих условиях) имеет место равенство $\|f\| = \|h\| + \|i^* f\|$ (вместо (11) с $\lambda = 1/2$ у Дж. Джонсона).

Полагая $N_E(a, b) = (a^p + b^p)^{1/p}$ и $N_F(a, b) = (a^q + b^q)^{1/q}$, из теоремы 5 в силу замечания 8 вытекает, что $K(l_p(\Gamma_1),\ l_q(\Gamma_2))$ является M-идеалом в $L(l_p(\Gamma_1),\ l_q(\Gamma_2))$ при $1 < p \leqslant q < \infty$. Те же самые N_E и N_F нужно взять, чтобы с помощью теоремы 5 обосновать следующий

Пример 5. *Если $1 < p \leqslant q < \infty$ и Γ — бесконечное множество индексов, то $K(l_p(\Gamma),\ d(w, q))$ является M-идеалом в $L(l_p(\Gamma),\ d(w, q))$, при этом $K(l_p(\Gamma),\ d(w, q))$ не имеет дополнения в $L(l_p(\Gamma),\ d(w, q))$.*

Остается доказать последнее утверждение в примере 5. Для этого воспользуемся следующим результатом из [19]: если подпространства E_0 и F_0 дополняемы соответственно в E и F, а $K(E_0, F_0)$ не дополняемо в $L(E_0, F_0)$, то $K(E, F)$ не дополняемо в $L(E, F)$. Отметим, что $d(w, q)$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное l_q (см. [18], с. 177), но $K(l_p(\Gamma), l_q)$ не дополняемо в $L(l_p(\Gamma), l_q)$ (см. [20]).

В связи с примером 5 отметим, что $K(d(w, q),\ d(w, q))$ не является M-идеалом в $L(d(w, q),\ d(w, q))$, $1 < q < \infty$ (см. [6]).

В заключение рассмотрим пространство $L(l_1, F)$, где F — произвольное нормированное пространство. Известно [21], что $K(l_1, F)$ не дополняемо в $L(l_1, F)$, если F бесконечномерно. Мы видели, что $K(l_1, c_0)$ является M-идеалом в $L(l_1, c_0)$, но $K(l_1, l_1)$ даже не обладает в $L(l_1, l_1)$ свойством U (см. пример 1). Мы покажем, что $c_0 \otimes F$, которое канонически отождествляется с подпространством в $L(l_1, F)$, является M-идеалом в $L(l_1, F)$, когда F — произвольное нормированное пространство. Это следует из нижеследующей теоремы, где $c_0(\Gamma) \otimes F$ ввиду канонического алгебраического изоморфизма рассматривается как подпространство в $L(l_1(\Gamma), F)$.

Теорема 6. *Если F — произвольное нормированное пространство и Γ — произвольное множество индексов, то $c_0(\Gamma) \otimes F$ является M-идеалом в $L(l_1(\Gamma), F)$.*

Доказательство. Будем применять следствие 1 и замечание 4 в случае $X = L(l_1(\Gamma), F)$ и $Y = c_0(\Gamma) \otimes F$.

Пусть Σ — система всех конечных подмножеств множества Γ, направленная по включению, и пусть A_α, $\alpha \in \Sigma$, конечномерный проектор в $c_0(\Gamma)$, соответствующий α. Канонически отождествляя $c_0(\Gamma)^*$ с $l_1(\Gamma)$, положим $U_\alpha(S) = SA_\alpha^*$, где $S \in X$.

Покажем, что $\operatorname{Im} U_\alpha \subset Y$. Поскольку $U_\alpha(S)$ — конечномерный оператор, то, канонически отождествляя $l_1(\Gamma)^* \otimes F$ с подпространством в X и $l_1(\Gamma)^*$ с $m(\Gamma)$, имеем $U_\alpha(S) \in m(\Gamma) \otimes F$ при всех $S \in X$. Так как $U_\alpha(S) = U_\alpha(U_\alpha(S))$, то остается показать, что $U_\alpha(T) \in Y$, если $T \in m(\Gamma) \otimes F$. Для этого достаточно рассматривать $T = \Phi \otimes y$, $\Phi \in m(\Gamma)$, $y \in F$. При любом $\varphi \in l_1(\Gamma)$ имеем

$$(U_\alpha(T))(\varphi) = T(A_\alpha^*\varphi) = \Phi(A_\alpha^*\varphi)y = $$
$$= (A_\alpha^{**}\Phi)(\varphi)y = (A_\alpha^{**}\Phi \otimes y)(\varphi),$$

так что

$$U_\alpha(T) = A_\alpha^{**}\Phi \otimes y \in Y,$$

поскольку, в силу сделанных канонических отождествлений, $\operatorname{Im} A_\alpha^{**} \subset \subset c_0(\Gamma)$.

Покажем, что $\lim_\alpha U_\alpha(S) = S$ в Y при всех $S \in Y$. Рассматривая $S = x \otimes y \in Y$, имеем, согласно вышедоказанному, $U_\alpha(S) = A_\alpha x \otimes y$. Следовательно,

$$\|U_\alpha(S) - S\| = \|(A_\alpha x - x) \otimes y\| =$$
$$= \|A_\alpha x - x\| \, \|y\| \xrightarrow[\alpha]{} 0,$$

откуда вытекает наше утверждение.

Пусть сеть (V_β) та же самая, что и сеть (U_α). Тогда условия 1° и 2° теоремы 1 выполнены. Так как $\|U_\alpha\| \leqslant \|A_\alpha^*\| \leqslant 1$, то и условие 4° теоремы 1 выполнено. Наконец, при любых $S, T \in S_X$, $\beta \supset \alpha$ и при любом $x \in S_{l_1(\Gamma)}$ имеем

$$\|[U^\beta(U^\alpha(S)) + U_\beta(U_\alpha(T))](x)\| = \|S((I_{l_1(\Gamma)} - A_\beta^*)x) + T(A_\alpha^* x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(I_{l_1(\Gamma)} - A_\beta^*)x\| + \|A_\alpha^* x\| \leqslant \|x\| \leqslant 1,$$

так что остается применить следствие 1 и замечание 4.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Phelps, R. R.* Trans. Amer. Math. Soc., **95**, 238—255 (1960).
2. *Taylor, A. E.* Duke Math. J., **5**, 538—547 (1939).
3. *Foguel, S. R.* Proc. Amer. Math. Soc., **9**, 325 (1958).
4. *Singer, I.* Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Bucharest, Berlin—Heidelberg—New York, Acad. R. S. România, Springer-Verlag, 1970.
5. **Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Докл. АН СССР, 118, 17—19 (1958).**
6. *Hennefeld, J.* Indiana Univ. Math. J., **28**, 927—934 (1979).
7. *Hennefeld, J.* Proc. Amer. Math. Soc., **78**, 89—92 (1980).
8. *Alfsen, E. M., Effros, E. G.* Ann. Math., **96**, 98—128 (1972).
9. *Alfsen, E. M., Effros, E. G.* Ann. Math., **96**, 129—173 (1972).
10. *Lima, Å.* Math. Scand., **44**, 207—217 (1979).
11. *Mach, J., Ward, J. D.* J. Approxim. Theory, **23**, 274—286 (1978).
12. *Hennefeld, J.* Pacific J. Math., **46**, 197—199 (1973).
13. *Johnson, J.* J. Funct. Anal., **32**, 304—311 (1979).
14. *Saatkamp, K.* Math. Z., **158**, 253—263 (1978).
15. *Zeller, K.* Math. Z., **53**, 463—487 (1951).
16. *Smith, R. R., Ward, J. D.* J. Funct. Anal., **27**, 337—349 (1978).
17. **Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., ИЛ, 1961.**
18. *Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.* Classical Banach Spaces, 1. Sequence Spaces. Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1977.
19. *Kuo, T.* Pacific J. Math., **52**, 475—480 (1974).

20. *Thorp, E. O.* Pacific J. Math., **10**, 693—696 (1960).
21. *Kalton, N. J.* Math. Ann., **208**, 267—278 (1974).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 11/VII 1983

Eve OJA

PIDEVATE LINEAARSETE FUNKTSIONAALIDE JÄTKU ÜHESUSEST HAHN-BANACHI TEOREEMIS

On uuritud, millal reaalse normeeritud ruumi alamruum on U-omadusega, osutub HB-alamruumiks või M-ideaaliks. Saadud tulemusi on rakendatud operaatorite ruumidele.

Eve OJA

ON THE UNIQUENESS OF THE NORM-PRESERVING EXTENSION OF A LINEAR FUNCTIONAL IN THE HAHN-BANACH THEOREM

It is investigated when a subspace Y of a real normed linear space X has the property U [1], is an HB-subspace [6] or is an M-ideal [8]. Let $S_X=\{x\in X\colon \|x\|\leqslant 1\}$, and let I and i denote, respectively, the identity map on X and the identity map from Y into X. The main results are:

Theorem 1. *Let (U_α) and (V_β) be two nets of bounded linear operators on X, satisfying the following conditions:*

1° $\operatorname{Im} U_\alpha \subset Y \quad \forall\alpha,\quad \lim\limits_\alpha g(U_\alpha y)=g(y) \quad \forall y\in Y,\quad \forall g\in Y^*$,

2° $\operatorname{Im} V_\beta \subset Y \quad \forall\beta,\quad \lim\limits_\beta g(V_\beta y)=g(y) \quad \forall y\in Y,\quad \forall g\in Y^*$,

3° *There is an $M>0$ such that for all $\varepsilon>0$ and $x\in S_X$ there is a $\lambda>0$ such that for all α and $y\in S_Y$*

$$\limsup_\beta \|\lambda V^\beta U^\alpha x+V_\beta U_\alpha y\|\leqslant 1+M\varepsilon\lambda, \tag{*}$$

where $U^\alpha=I-U_\alpha$ and $V^\beta=I-V_\beta$,

4° $\sup\limits_\beta \|V_\beta\|\leqslant 1$.

Then Y has the property U in X. Moreover, if

$$\liminf_\beta \|V^\beta\|\leqslant 1,$$

then Y is an HB-subspace of X. If the conditions 1°, 2°, 4° are satisfied and there is an $M>0$ such that for all $\varepsilon>0$ there is a $\lambda>0$ such that (*) is satisfied for all α, $x\in S_X$ and $y\in S_Y$, then there is an isometrical isomorphism $\varkappa$ from Y^* into X^* such that each $f\in X^*$ has a representation

$$f=\varkappa i^*f+h,\quad h\in Y^\perp, \tag{**}$$

and $\lambda\|h\|+\|i^*f\|\leqslant(1+M\varepsilon\lambda)\|f\|$.

Corollary 1. *Let (U_α) and (V_β) be two nets of bounded linear operators on X satisfying the conditions 1°, 2° and 4° of Theorem 1. If there is a $\lambda\in(0,1]$ such that for all α, $x\in S_X$ and $y\in S_Y$*

$$\limsup_\beta \|\lambda V^\beta U^\alpha x+V_\beta U_\alpha y\|\leqslant 1,$$

then there is an isometrical isomorphism $\varkappa$ from Y^* into X^* such that each $f\in X^*$ has a representation (**), and $\lambda\|h\|+\|i^*f\|\leqslant\|f\|$.

If $\lambda=1$ in corollary 1, then Y is an M-ideal in X.

The results above are used to give an example of a Banach space having a subspace with the property U which is not an HB-subspace (this answers a question of [6]). They are also applied to study the cases of $X=Y^{**}$, Y — a normed space and $X=L(E,F)$, $Y=K(E,F)$ ($L(E,F)$ and $K(E,F)$ denote, respectively, the bounded and compact linear operators from E into F). As application, it is shown that $K(E,l_p(\Gamma))$, $K(E,d(w,p))$, $K(l_p(\Gamma),E)$ are HB-subspaces and $K(l_p(\Gamma),d(w,q))$ is an M-ideal in the corresponding spaces of bounded operators for an arbitrary normed space E and $1<p\leqslant q<\infty$ ($d(w,p)$ denoting the Lorentz sequence space).