EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 32. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1983, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 32
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1983, № 4

УДК 62—501.14

Ю. НУРГЕС

МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ОДНОГО КЛАССА БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ü. NURGES. BILINEAARSETE SÜSTEEMIDE KLASSI AUTOREGRESSIOONMUDEL

Ü. NURGES. AUTOREGRESSIVE MODEL OF OUTPUT BILINEAR SYSTEMS

(Представил Н. Алумяэ)

Введение. Рассмотрим многомерную билинейную систему

$$x(t+1)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)D_ix(t)+Bu(t), \tag{1}$$

$$y(t)=Cx(t), \tag{2}$$

где x n-вектор состояния, u — m-вектор управляющих воздействий, u_i — i-й компонент вектора u, y — p-вектор выходных переменных системы. Матрицы A и D_i, $i=1, \ldots, m$ имеют размерность $n\times n$, а матрицы B и C — $n\times m$ и $p\times n$ соответственно.

Для идентификации системы необходимы соотношения между управляющими воздействиями и выходными переменными, т. е. надо элиминировать состояние $x(t)$ из уравнений (1) и (2). Ввиду билинейности относительно состояния вход-выход модели билинейных систем оказываются громоздкими [1, 2]. Более приемлемые результаты получены для одномерных систем со специальной структурой матрицы D ($\operatorname{rank} D=1$) [3].

В данной работе выводится вход-выход соотношение типа авторегрессии для систем, билинейных относительно выхода, т. е. для систем, удовлетворяющих требованиям

$$R(D_i)\subset R(C), \quad i=1, \ldots, m, \tag{3}$$

где $R(D_i)$ — векторное пространство, порожденное строками матрицы D_i.

Вывод уравнения авторегрессии. При ограничении (3) найдутся матрицы E_i, $i=1, \ldots, m$ размерности $n\times p$ такие, что

$$D_i=E_iC,$$

и мы можем переписать уравнение состояния (1) следующим образом:

$$x(t+1)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)E_iy(t)+Bu(t). \tag{4}$$

Рассмотрим итерацию уравнений состояния (4) и выхода (2)

$$y(t)=Cx(t),$$

$$y(t+1)=CAx(t)+C\sum_{i=1}^{m}u_i(t)E_iy(t)+CBu(t),$$

$$\vdots$$

$$y(t+n-p)=CA^{n-p}x(t)+\sum_{j=0}^{n-p-1}CA^{n-p-j-1}\sum_{i=1}^{m}u_i(t+j)E_iy(t+j)+$$
$$+\sum_{j=0}^{n-p-1}CA^{n-p-j-1}Bu(t+j),$$

которую можно переписать в матричной форме

$$P(u)\bar{y}(t)=\mathrm{O}x(t)+R\bar{u}(t), \tag{5}$$

где $[\bar{y}(t)]^{\mathrm{T}}=[y^{\mathrm{T}}(t),\ \ldots,\ y^{\mathrm{T}}(t+n-p)]$,

$[\bar{u}(t)]^{\mathrm{T}}=[u^{\mathrm{T}}(t),\ \ldots,\ u^{\mathrm{T}}(t+n-p)]$,

$$\mathrm{O}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-p} \end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ CB & 0 & \ldots & 0 \\ CAB & CB & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{n-p-1}B & \ldots & CB & 0 \end{bmatrix};$$

$$P(u)=\begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ S_0(t) & I_p & 0 & \ldots & 0 \\ S_1(t) & S_0(t+1) & I_p & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{n-p-1}(t) & S_{n-p-2}(t+1) & \ldots & & I_p \end{bmatrix}.$$

I_p — единичная матрица порядка $p\times p$, $S_j(t)=-CA^j\sum_i u_i(t)E_i$.

Для наблюдаемой пары (A, C) $\operatorname{rank}\mathrm{O}=n$ и

$$\mathrm{O}^{+}=(\mathrm{O}^{\mathrm{T}}\mathrm{O})^{-1}\mathrm{O}^{\mathrm{T}}.$$

Умножив обе стороны уравнения (5) на O^{+}, получим выражение для $x(t)$

$$x(t)=\mathrm{O}^{+}P(u)\bar{y}(t)-\mathrm{O}^{+}R\bar{u}(t).$$

Следующий шаг итерации дает

$$y(t+n-p+1)=CA^{n-p+1}O^{+}[P(u)\bar{y}(t)-R\bar{u}(t)]+$$
$$+\sum_{j=0}^{n-p}CA^{n-p-j}[\sum_{i=1}^{m}u_i(t+j)E_iy(t+j)+Bu(t+j)]$$

или

$$y(t+n-p+1)=\bar{P}(u)\bar{y}(t)+\bar{R}\bar{u}(t), \tag{6}$$

где

$$\bar{P}(u)=CA^{n-p+1}O^{+}P(u)+[CA^{n-p}\sum_i u_i(t)E_i\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,C\sum_i u_i(t+n-p)E_i],$$
$$\bar{R}=-CA^{n-p+1}O^{+}R+[CA^{n-p}B\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,CB].$$

Уравнение (6) представляет собой авторегрессионную модель систем, билинейных относительно выхода. Число составляющих в модели (6) $N\leqslant(m+2)(n-p+1)+1$. Это гораздо меньше, чем в соответствующей модели для систем, билинейных относительно состояния. Например, для $n=3$, $m=p=1$ $N=10$, в то время как модель авторегрессии систем, билинейных относительно состояния, включает 88 составляющих [1].

Модель авторегрессии систем, билинейных относительно выхода, с одним входом и одним выходом. Пусть $m=p=1$. Ввиду наблюдаемости пары (A,c) система (1), (2) приводима к канонической форме

$$A=\left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{n-1} \\ \hdashline a_1 \;\ldots & a_n \end{array}\right],\qquad b=\begin{bmatrix} b_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_n\end{bmatrix},\qquad e=\begin{bmatrix} e_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ e_n\end{bmatrix},$$
$$c^{\mathrm{T}}=[1\;0\;\ldots\;0].$$

Тогда

$$\bar{P}(u)=a^{\mathrm{T}}[I_n-P\cdot\operatorname{diag}\bar{u}(t)]+e^{\mathrm{T}}J\operatorname{diag}\bar{u}(t).$$
$$\bar{R}=-a^{\mathrm{T}}R+b^{\mathrm{T}}J,$$

где

$$J=\begin{bmatrix} 0 & & 1\\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0\end{bmatrix},\qquad \operatorname{diag}\bar{u}(t)=\begin{bmatrix} u(t) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & u(t+n-1)\end{bmatrix},$$

$$P=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ e_1 & \cdot & & 0\\ \cdot & \cdot & \ddots & \\ \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \vdots\\ e_{n-1} & \ldots & e_1 & 0\end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ b_1 & \cdot & & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \vdots\\ b_{n-1} & \ldots & b_1 & 0\end{bmatrix}$$

и

$$
\begin{aligned}
y(t+n) = {} & a_1 y(t) + a_2 y(t+1) + \ldots + a_n y(t+n-1) + \\
& + (e_n - a_n e_{n-1} - a_{n-1} e_{n-2} - \ldots - a_2 e_1) u(t) y(t) + \\
& + (e_{n-1} - a_n e_{n-2} - a_{n-1} e_{n-3} - \ldots - a_3 e_1) u(t+1) y(t+1) + \\
& + \ldots + (e_2 - a_n e_1) u(t+n-2) y(t+n-2) + \\
& + e_1 u(t+n-1) y(t+n-1) + \\
& + (b_n - a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_{n-2} - \ldots - a_2 b_1) u(t) + \\
& + (b_{n-1} - a_n b_{n-2} - a_{n-1} b_{n-3} - \ldots - a_3 b_1) u(t+1) + \\
& + \ldots + (b_2 - a_n b_1) u(t+n-2) + b_1 u(t+n-1).
\end{aligned}
$$

Заключение. Системы, билинейные относительно выхода, заслуживают тщательного изучения, так как по наблюдаемости и идентифицируемости они весьма близки к линейным. Их модель авторегрессии включает небольшое количество составляющих и тем самым подходит для решения задач идентификации и моделирования систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beghelli, S., Guidorzi, R.* In: Identification and System Parameter Estimation, IV IFAC Symposium. Tbilisi, 1976, 360—370.
2. *Inagaki, M.* IEEE Trans. Automat. Contr., AC-27, № 4, 984—986 (1982).
3. *Baheti, R. S., Mohler, R. R., Spang, H. A.* IEEE Trans. Automat. Contr., AC-25, № 6, 1141—1146 (1980).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
15/II 1983