EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 32. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1983, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 32
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1983, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1983.4.09

УДК 531.011

О. СИЛЬДЕ, Х. РЕЛЬВИК

УРАВНЕНИЕ ВОЗМОЖНОЙ МОЩНОСТИ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

*(Представил Н. Алумяэ *)*

В настоящее время проблема построения дифференциальных принципов аналитической механики достаточно полно изложена, например, в монографии А. И. Лурье [1], в работах В. В. Румянцева [2] и Н. Н. Поляхова [3, 4].

В данной статье сжато изложены результаты, полученные в Таллинском политехническом институте по выводу и применению уравнения возможной мощности [5–15]. Точнее, описан вывод дифференциальных уравнений движения механической системы, названный уравнением возможной мощности (УВМ), где основными исходными параметрами являются не обобщенные координаты, а независимые параметры скорости, число которых равно числу степеней свободы системы. По внешнему виду УВМ напоминает общее уравнение динамики, принцип Журдена, принцип Гаусса и принцип Манжерона-Делеану и объединяет эти принципы, заменяя вариации $\delta\mathbf{r}_i$, $\delta\mathbf{v}_i$, $\delta\dot{\mathbf{v}}_i$ и т. д. одним понятием возможной скорости $\{\mathbf{v}_i\}$, т. е. возможными значениями истинной скорости, которые может получить механическая система. Такой подход с применением векторного исчисления ведет к упрощению решений задач механики.

1. Обобщенные координаты q^p $(p=1, 2, \ldots, n)$ дают минимальное число параметров, с помощью которых можно определить положение каждой материальной точки механической системы

$$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q^0, q^p),$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-й материальной точки в некоторой инерциальной системе, q^0 — заданная функция времени, вводимая в случае нестационарной механической системы.

В неголономных системах обобщенные координаты подчиняются уравнениям связей. Сперва предположим, что уравнения связей линейны относительно производных от обобщенных координат по времени

$$a^{\alpha}_{r}(q^0, q^p)\dot{q}^r=0 \qquad (r=0, 1, \ldots, n; \quad \alpha=1, 2, \ldots, l).$$

В этом случае всегда можно выбрать независимые параметры скорости v^g $(g=1, 2, \ldots, s)$, число которых равно числу степеней свободы системы $(s=n-l)$ так, чтобы обобщенные скорости выражались через параметры скорости линейно

$$\dot{q}^r=A^r_j(q^0, q^p)v^j \qquad (j=0, 1, \ldots, s).$$

* Авторы и представляющий весьма благодарны В. В. Румянцеву, который просмотрел вариант настоящей статьи, отметил методическую ценность ее результатов, а также отклонил мнение, что предлагаемое уравнение возможной мощности является принципом механики. Не настаивая на этом, нам кажется, что дискуссия по этому вопросу не заслуживает такого внимания как подход авторов к решению задач аналитической механики.

Здесь v^0 — заданная функция времени, вводимая в случае нестационарной системы.

Вектор скорости любой точки механической системы можно выразить через параметры скорости v^j и соответствующие им базисные векторы $\mathbf{u}_{ij}$

$$\mathbf{v}_i = v^j \mathbf{u}_{ij}. \tag{1.1}$$

Часть параметров скорости v^g можно определить обобщенными $\dot{q}^p$, а остальные — квазискоростями, т. е. $v^g = \dot{\pi}^g$. Квазикоординаты π^g в явном виде в выражениях не встречаются, но соответствующие им частные производные имеют вид

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \pi^j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^r} A^r_j.$$

Введем понятие возможной скорости материальной точки механической системы

$$\{\mathbf{v}_i\} = \{v^j\} \mathbf{u}_{ij} = v^0 \mathbf{u}_{i0} + \{v^g\} \mathbf{u}_{ig}, \tag{1.2}$$

где $\{v^g\}$ — произвольные числа. Возможная скорость i-й точки есть любая из совокупности скоростей, которые она могла бы иметь в данный момент времени при учете всех наложенных на систему связей. Истинная скорость является одной из совокупности возможных скоростей.

Уравнение мощности получается из основного закона динамики ($\mathbf{F}_i$ — сумма всех активных сил и реакций связей, действующих на i-ю точку; $\mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{v}}_i$)

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad \text{или} \quad \sum (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \mathbf{v}_i = 0. \tag{1.3}$$

Учитывая разложение (1.1) запишем выражение (1.3) в виде

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} v^j = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} v^j. \tag{1.4}$$

Заменяя $E_j = \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}$ и $Q_j = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}$, получим:

$$E_j v^j = Q_j v^j. \tag{1.5}$$

Левая сторона уравнений (1.4) и (1.5) есть производная по времени от кинетической энергии системы T, а правая — суммарная мощность всех активных сил и реакций связей, действующих на систему, т. е.

$$\dot{T} = E_j v^j; \quad N = Q_j v^j; \quad \dot{T} = N.$$

2. Заменим в уравнении (1.3) вектор скорости i-й точки $\mathbf{v}_i$ на вектор возможной скорости $\{\mathbf{v}_i\}$, а в уравнениях (1.4) и (1.5) параметр скорости v^j на $\{v^j\}$. Тогда будем иметь уравнение возможной мощности $\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\} = \sum \mathbf{F}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\}$,

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} \{v^j\} = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} \{v^j\} \tag{2.1}$$

и эквивалентное

$$E_j \{v^j\} = Q_j \{v^j\}; \quad \{\dot{T}\} = \{N\}. \tag{2.2}$$

Вследствие независимости параметров $\{v^g\}$ из уравнений (2.1) или (2.2) получаем дифференциальные уравнения движения механической системы

$$E_g - Q_g = 0, \tag{2.3}$$

которые в случае нестационарной системы дополняются уравнением

$$E_0 - Q'_0 = R_0; \quad Q_0 = Q'_0 + R_0, \tag{2.4}$$

где R_0 — реакция нестационарной связи.

Здесь уравнения (2.3) и (2.4) получены с помощью УВМ из основного закона динамики, из которого они также выводятся непосредственно.

Уравнение (2.4) необходимо, если требуется определить реакцию нестационарной связи R_0. Иначе в разложении (1.2) не учитывается первый член и возможная скорость $\{\mathbf{v}_i\}$ заменяется виртуальной скоростью $\{\mathbf{v}_i\}^*$

$$\{\mathbf{v}_i\}^* = \{v^g\}^* \mathbf{u}_{ig} \quad \text{или} \quad \{\mathbf{v}_i\}^* = \{\mathbf{v}_i\} - \mathbf{v}_i, \tag{2.5}$$

где $\{v^g\}^*$ — произвольные числа. В этом случае уравнения (2.1) и (2.2) получают вид

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ig} \{v^g\}^* = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_{ig} \{v^g\}^* \tag{2.6}$$

и

$$E_g \{v^g\}^* = Q_g \{v^g\}^*$$

и называются уравнением виртуальной мощности.

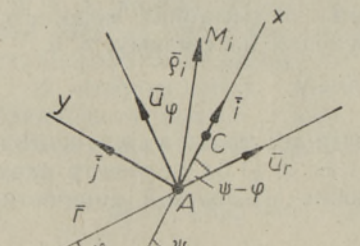
3. УВМ можно рассматривать как общий метод динамики, с помощью которого выводятся дифференциальные уравнения движения для большого класса задач, в единой форме для голономных и неголономных систем.

Следует, однако, учитывать, что все функции и выражения в предлагаемой теории должны быть достаточно гладкими, т. е. должны иметь непрерывные производные нужного порядка.

Параметры скорости v^j и базисные векторы $\mathbf{u}_{ij}$ определяются непосредственно из условий данной задачи. Их выбор всегда возможен и для неголономных систем, если уравнения связей линейны относительно обобщенных скоростей.

4. *Пример.* Рассмотрим известную задачу Чаплыгина на вращающейся карусели.

Тело с центром масс в точке C имеет в точке A короткое лезвие, позволяющее точке A двигаться только вдоль линии AC (рисунок). Одновременно тело может вращаться вокруг точки A, т. е. относительно оси Az.



Найдем дифференциальные уравнения движения тела.

Координаты r и φ определяют положение точки A; угол ψ учитывает положение тела во вращательном движении вокруг точки A. Система определяется тремя обобщенными координатами r, φ, ψ. С телом неизменно связана координатная система $Axyz$ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Пусть угловые скорости системы $\omega = \dot{\psi}$ и $\omega' = \dot{\varphi}$. Положение произвольной точки тела M_i определяется радиусом-вектором ϱ_i из точки A. Скорость $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ точки A по линии AC, где v есть квазискорость.

Скорость произвольной точки тела M_i будет

$$\mathbf{v}_i = r\omega_0 \mathbf{u}_\varphi + v\mathbf{i} + \omega(\mathbf{k} \times \varrho_i); \tag{4.1}$$

здесь ω_0 угловая скорость вращения карусели. Учтем параметры скорости и базисные векторы

$$v^1=v;\quad v^2=\omega;\quad v^0=\omega_0;\quad \mathbf{u}_{i1}=\mathbf{i};\quad \mathbf{u}_{i2}=\mathbf{k}\times\varrho_i;\quad \mathbf{u}_{i0}=r\mathbf{u}_\varphi.$$

Принимаем за независимые параметры скорость v и угловую скорость ω. Угловую скорость ω_0 будем считать постоянной.

Возможная скорость i-й точки будет

$$\{\mathbf{v}_i\}=r\omega_0\mathbf{u}_\varphi+\{v\}\mathbf{i}+\{\omega\}(\mathbf{k}\times\varrho_i) \tag{4.2}$$

и виртуальная скорость

$$\{\mathbf{v}_i\}^*=\{v\}^*\mathbf{i}+\{\omega\}^*(\mathbf{k}\times\varrho_i).$$

Связь считаем идеальной; виртуальная мощность реакции связи равна нулю. Поэтому для нахождения движения тела полезно пользоваться виртуальной скоростью.

Вычисляем ускорение i-й точки исходя из выражения (4.1)

$$\mathbf{a}_i=\dot{\mathbf{v}}_i=\dot r\omega_0\mathbf{u}_\varphi+r\omega_0\dot{\mathbf{u}}_\varphi+\dot v\mathbf{i}+v\dot{\mathbf{i}}+\dot\omega(\mathbf{k}\times\varrho_i)+\omega(\mathbf{k}\times\dot\varrho_i);$$

здесь

$$\dot{\mathbf{u}}_\varphi=-\omega'\mathbf{u}_r;\qquad \dot{\mathbf{i}}=\omega\mathbf{j};\qquad \varrho_i=x_i\mathbf{i}+y_i\mathbf{j}+z_i\mathbf{k};$$

$$\mathbf{k}\times\varrho_i=x_i\mathbf{j}-y_i\mathbf{i};\qquad \mathbf{k}\times\dot\varrho_i=\omega(-x_i\mathbf{i}-y_i\mathbf{j}).$$

Записываем левую часть уравнения виртуальной мощности

$$\{\mathcal{T}\}^*=\sum m_i\mathbf{a}_i\cdot\{\mathbf{v}_i\}^*=\sum m_i\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{i}\{v\}^*+\sum m_i\mathbf{a}_i\cdot(\mathbf{k}\times\varrho_i)\{\omega\}^*=$$

$$=M(\dot r\omega_0\sin(\psi-\varphi)-r\omega_0\omega'\cos(\psi-\varphi)+\dot v-\omega^2x_C)\{v\}^*+ \tag{4.3}$$

$$+[M(\dot r\omega_0x_C\cos(\psi-\varphi)+r\omega_0\omega'x_C\sin(\psi-\varphi)+v\omega x_C)+I_z\dot\omega]\{\omega\}^*;$$

здесь

$$\mathbf{u}_\varphi\cdot\mathbf{i}=\sin(\psi-\varphi);\qquad \dot{\mathbf{u}}_\varphi\cdot\mathbf{i}=-\omega'\cos(\psi-\varphi);\qquad \mathbf{u}_r\cdot\mathbf{i}=\cos(\psi-\varphi);$$

$$(\mathbf{k}\times\varrho_i)\cdot\mathbf{i}=-y_i;\qquad (\mathbf{k}\times\dot\varrho_i)\cdot\mathbf{i}=-\omega x_i;\qquad \dot{\mathbf{i}}\cdot(\mathbf{k}\times\varrho_i)=\omega x_i;$$

$$\mathbf{u}_\varphi\cdot(\mathbf{k}\times\varrho_i)=x_i\cos(\psi-\varphi)-y_i\sin(\psi-\varphi);$$

$\sum m_i(\mathbf{k}\times\varrho_i)\cdot(\mathbf{k}\times\varrho_i)=I_z$ — момент инерции тела относительно оси Az;

$$\sum m_i=M;\qquad \sum m_ix_i=Mx_C;\qquad \sum m_iy_i=0.$$

Пусть к центру масс тела приложена сила $\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}$, тогда виртуальная мощность будет

$$\{N\}^*=\mathbf{F}\cdot\{\mathbf{v}_C\}^*=F_x\{v\}^*+F_yx_C\{\omega\}^*. \tag{4.4}$$

На основании выражений (4.3) и (4.4) получим дифференциальные уравнения движения тела:

$$\begin{aligned}&M[\dot r\omega_0\sin(\psi-\varphi)-r\omega_0\omega'\cos(\psi-\varphi)+\dot v-\omega^2x_C]=F_x,\\&M[\dot r\omega_0x_C\cos(\psi-\varphi)+r\omega_0\omega'x_C\sin(\psi-\varphi)+v\omega x_C]+I_z\dot\omega=F_yx_C.\end{aligned} \tag{4.5}$$

В уравнениях (4.5) имеем четыре неизвестных r, v, ψ, φ. Учтем соотношения

$$\dot r=v\cos(\psi-\varphi);\qquad \dot\varphi=\omega'=\omega_0+\frac{v}{r}\sin(\psi-\varphi),$$

с помощью которых в уравнениях (4.5) можно исключить параметры v и ψ.

Если допустить, что $\omega_0 = 0$, имеем

$$M(\dot{v} - \omega^2 x_C) = F_x,$$

$$I_z \dot{\omega} + M v \omega x_C = F_y x_C,$$

т. е. получим уравнения движения тела на неподвижной плоскости.

Для определения реакции нестационарной связи можно воспользоваться первым членом выражения (4.2)

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_\varphi r\omega_0 - \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_\varphi r\omega_0 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_\varphi r\omega_0.$$

В этом равенстве можно сократить на $r\omega_0$, а вместо $\mathbf{u}_\varphi$ умножить скалярно на $\mathbf{j}$, так как реакция идеальной связи, приложенная в точке A, направлена по линии орта $\mathbf{j}$, и $\mathbf{R} = R\mathbf{j}$.

Учитывая, что

$$\sum m_i \mathbf{a}_i = M\mathbf{a}_C,$$

получим

$$R = M\mathbf{a}_C \cdot \mathbf{j} - F_y,$$

где

$$M\mathbf{a}_C \cdot \mathbf{j} = M[\dot{r}\omega_0 \cos(\psi - \varphi) + r\omega_0\omega' \sin(\psi - \varphi) + v\omega + \dot{\omega} x_C].$$

Для ряда задач аналитической механики метод УВМ оказывается весьма эффективным. Например, в [11] решена задача по определению дифференциальных уравнений двухскатной тележки двумя способами. Такая задача была рассмотрена в [1]. Там, при числе обобщенных координат $n = 8$, вычислялись трехиндексные символы Больцмана γ^j_{kl}, которых было 224. На основе УВМ, при числе степеней свободы $s = 2$ их нужно было вычислить всего два. Однако при решении задачи вычисления этих символов не потребовалось, так как было использовано уравнение возможной мощности для твердого тела, см. ниже уравнение (5.4).

5. Вычисление левой половины уравнения возможной мощности

$$\{\dot{T}\} = \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} \{v^j\} = E_j \{v^j\}$$

можно упростить с помощью ряда выражений (см. [8, 10, 11]); некоторые наиболее важные из них приводятся ниже.

1°. Пользуясь кинетической энергией T получим:

$$E_j = \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v^j} - \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ij} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v^j} - G_j. \qquad (5.1)$$

Если все параметры v^j являются обобщенными скоростями, т. е. $v^j = \dot{q}^j$, и учтем, что в этом случае

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{ik}}{\partial q^l} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^l \partial q^k} = \frac{\partial \mathbf{u}_{il}}{\partial q^k}, \qquad (5.2)$$

то при помощи выражения (5.1) получаются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} = Q_j.$$

Аналогично выведены и другие уравнения аналитической механики:

Гамильтона, Аппеля, Нильсена, Манжерона-Делеану, Ценова и т. д. ([6, 7, 9, 13]).

2°. Можно показать, что

$$E_j = g_{jk}\dot{v}^k + \dot{g}_{jk}v^h - \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \dot{\mathbf{u}}_{ij} = g_{jk}\dot{v}^k + \Gamma_j, \tag{5.3}$$

где

$$g_{jk} = g_{kj} = \sum m_i \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{u}_{ik}; \qquad T = \frac{1}{2} g_{jk} v^j v^k.$$

Для вычисления объектов G_j и Γ_j в случае твердого тела составлены таблицы [11].

3°. Общий случай движения твердого тела описывается уравнением

$$M\mathbf{a}_C \cdot \{\mathbf{v}_A\} + [\dot{\mathbf{L}}_B + M(\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_C)] \cdot \{\vec{\omega}\} = \mathbf{F}^{(e)} \cdot \{\mathbf{v}_A\} + \mathbf{M}_B^{(e)} \cdot \{\overleftrightarrow{\omega}\}. \tag{5.4}$$

Здесь M — масса тела, точка C — центр масс, $\mathbf{F}^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, $\mathbf{M}_B{}^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно точки B, $\mathbf{L}_B = \sum \varrho_i \times m_i \mathbf{v}_i$ — главный момент количеств движения тела относительно точки B. Точка B является началом в общем движущейся координатной системы $Bxyz$, к которой относится движение тела; точка A принадлежит телу и в рассматриваемый момент времени совпадает с точкой B.

4°. Представляет интерес введение объектов Γ и γ, которые устанавливают связь между динамикой и геометрией.

Определяем:

$$\Gamma_{kl\cdot j} = \sum m_i \mathbf{u}_{ij} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{il}}{\partial \pi^k} = \sum m_i \mathbf{u}_{ij} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{il}}{\partial v^k} \quad (j, k, l = 0, 1, \ldots, s). \tag{5.5}$$

Тогда

$$E_j = g_{jk}\dot{v}^k + \Gamma_{kl\cdot j} v^k v^l.$$

Введем объект γ

$$\gamma^j_{kl} = \Gamma^j_{kl} - \Gamma^j_{lk}.$$

Здесь $\Gamma^j{}_{kl} = g^{js}\Gamma_{kl\cdot s}$, а $g^{js} = D^{js}/\det(g_{js})$, где D^{js} — алгебраическое дополнение к члену g_{js} в определителе $\det(g_{jk})$.

Тогда

$$E_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v^j} - \frac{\partial T}{\partial \pi^j} + \frac{\partial T}{\partial v^s}\gamma^s_{jk} v^k,$$

откуда получаются уравнения, аналогичные уравнениям Больцмана—Гамеля, но с наименьшим числом параметров скорости.

Формулы для вычисления объекта Γ, как в случае голономных, так и неголономных координат совпадают с соответствующими формулами для вычисления коэффициентов параллельного переноса (символа Кристоффеля) в геометрии Римана, если считать, что

$$ds^2 = g_{jk}\, d\pi^j\, d\pi^k$$

является квадратом линейного элемента этой геометрии, а $\gamma^j{}_{kl}$ есть объект неголономности. Например, если все $\pi^j = q^j$, то из выражений (5.2), (5.3) и (5.5) имеем

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j} = \Gamma_{jk\cdot l} + \Gamma_{jl\cdot k} \quad \text{и} \quad \Gamma_{jk\cdot l} = \Gamma_{kj\cdot l},$$

откуда $$\Gamma_{jk\cdot l}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l}\right),$$

что совпадает с соответствующим выражением в геометрии Римана.

Таким образом можно описывать движение механической системы как движение точки в s-мерном (или $(s+1)$-мерном) римановом пространстве или подпространстве.

6. Учет связей ([14, 15]).

Рассмотрим механическую систему, для которой введены независимые параметры скорости v^g и учтены уравнения (2.3). Пусть на систему наложены связи, заданные независимой системой дифференцируемых уравнений общего вида

$$f^\alpha(q^p, v^g, \dot v^g, \ldots, \overset{(h_\alpha)}{v^g}, t)=0 \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, l);^{**} \tag{6.1}$$

$$\overset{(h_\alpha)}{v^g}=\frac{d^{h_\alpha}v^g}{dt^{h_\alpha}}.$$

Введем следующие упрощенные обозначения.

1°. Для производной наивысшего порядка от v^g

$$\overset{(h_\alpha)}{v^g}=v^{g\alpha}. \tag{6.2}$$

2°. Для частной производной

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial v^{g\alpha}}=f^\alpha_g.$$

Связи (6.1) вызывают силу реакции $\mathbf{R}_i$ на i-ю точку, как сумму реакций, вызванных отдельными связями

$$\mathbf{R}_i=\sum_\alpha \mathbf{R}^\alpha_i; \qquad R^\alpha_j=\sum \mathbf{R}^\alpha_i\cdot\mathbf{u}_{ij}; \qquad R_j=\sum_\alpha R^\alpha_j. \tag{6.3}$$

Уравнения (2.3) и (2.4) следует теперь заменить уравнениями (по принципу освобождаемости)

$$E_j-Q_j=R_j. \tag{6.4}$$

Начиная с равенств (6.17) рассматриваются идеальные связи. Для этого перейдем к уравнению виртуальной мощности системы (сила $\mathbf{F}_i'$ не содержит реакций связей $\mathbf{R}_i$)

$$\sum m_i\mathbf{a}_i\cdot\{\mathbf{v}_i\}^*-\sum \mathbf{F}'_i\cdot\{\mathbf{v}_i\}^*=\sum \mathbf{R}_i\cdot\{\mathbf{v}_i\}^* \tag{6.5}$$

с условием, что

$$\sum \mathbf{R}_i\cdot\{\mathbf{v}_i\}^*=0 \qquad \text{или} \qquad R_g\{v^g\}^*=0. \tag{6.6}$$

Продифференцируем выражения (6.1)

$$\frac{df^\alpha}{dt}=\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^p}\dot q^p+\frac{\partial f^\alpha}{\partial v^g}\dot v^g+\ldots+f^\alpha_g\dot v^{g\alpha}+\frac{\partial f^\alpha}{\partial t}=0. \tag{6.7}$$

Рассмотрим какие линейные выражения можно составить из частных производных в равенстве (6.7) и параметров скорости v^g или их произ-

** В случае, если соответствующие принципу освобождаемости реакции зависят от ускорений и ускорений высших порядков, рассматриваемое обобщение применимо к динамике некоторых физических систем и систем с сервосвязями.

водных по времени любого порядка, которые были бы инвариантными (т. е. сохранили бы свой вид и численное значение) при произвольных преобразованиях обобщенных координат q^p и линейных преобразованиях v^g

$$v^{g'} = A_g^{g'}(q^p, t)\, v^g. \tag{6.8}$$

Все преобразования должны быть обратимыми и дифференцируемыми до нужного порядка. Преобразование (6.8) введено вместо более общего

$$v^{g'} = A_g^{g'} v^g + A_0^{g'} \tag{6.9}$$

с целью упростить математические выкладки; окончательный результат от этого не изменится (см. [15]).

Существует только одно выражение (инвариант), удовлетворяющее предъявляемым требованиям, а именно,

$$f_g^{\alpha} v^g = \psi^{\alpha}. \tag{6.10}$$

Для доказательства выразим производную (6.7) через новые координаты и параметры скорости. Из формул (6.8) дифференцированием получаем

$$\dot{v}^{g'\alpha} = A_g^{g'} \dot{v}^{g\alpha} + \text{(выражение, не содержащее } \dot{v}^{g\alpha}). \tag{6.11}$$

Подставляя выражения (6.11) в новые производные (6.7) получаем $f_{g'}^{\alpha} A_g^{g'} \dot{v}^{g\alpha} +$ (выражение, не содержащее $\dot{v}^{g\alpha}$ или $\dot{v}^{g'\alpha}$) $= 0$, откуда следует, что

$$f_g^{\alpha} = f_{g'}^{\alpha} A_g^{g'}. \tag{6.12}$$

Умножая обе части равенства (6.12) на параметр v^g, имеем

$$f_g^{\alpha} v^g = f_{g'}^{\alpha} A_g^{g'} v^g = f_{g'}^{\alpha} v^{g'}$$

(вследствие равенства (6.8)), что и требовалось.

Выразим из уравнений (6.10) l параметров v^{τ} (пусть $\tau = 1, 2, \ldots, l$) через остальные $v^{l+\beta}$ ($\beta = 1, 2, \ldots, s-l$)

$$v^{\tau} = B_{\gamma}^{\tau}\left(-f_{l+\beta}^{\gamma} v^{l+\beta} + \psi^{\gamma}\right) \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, l), \tag{6.13}$$

где $B_{\gamma}^{\tau} = C_{\gamma}^{\tau}/\det(f_{\tau}^{\gamma})$, а C_{γ}^{τ} есть алгебраическое дополнение к члену f_{τ}^{γ} в определителе $\det(f_{\tau}^{\gamma})$. Отсюда следует, что

$$B_{\gamma}^{\tau} f_{\tau}^{\varepsilon} = \delta_{\gamma}^{\varepsilon} = \begin{cases} 1, \text{ если } \varepsilon = \gamma \\ 0, \text{ если } \varepsilon \neq \gamma \end{cases} \quad \text{и} \quad B_{\gamma}^{\tau} f_{\sigma}^{\gamma} = \delta_{\sigma}^{\tau} \quad (\sigma < l+1). \tag{6.14}$$

Умножая обе части равенства (6.13) на вектор $\mathbf{u}_{i\tau}$ и подставляя в выражение (1.1) получаем

$$\mathbf{v}_i = \left(-B_{\gamma}^{\tau} f_{l+\beta}^{\gamma} \mathbf{u}_{i\tau} + \mathbf{u}_{i,l+\beta}\right) v^{l+\beta} + B_{\gamma}^{\tau} \psi^{\gamma} \mathbf{u}_{i\tau} + v^0 \mathbf{u}_{i0}; \tag{6.15}$$

здесь параметры скорости $v^{l+\beta}$ независимы.

Из выражения (6.15) следует для виртуальной скорости

$$\{\mathbf{v}_i\}^* = \left(-B_{\gamma}^{\tau} f_{l+\beta}^{\gamma} \mathbf{u}_{i\tau} + \mathbf{u}_{i,l+\beta}\right) \{v^{l+\beta}\}^*. \tag{6.16}$$

Рассмотрим идеальные связи. Из (6.16) для одной связи получается:

$$\sum \mathbf{R}_i^{\alpha} \cdot \{\mathbf{v}_i\}^* = \left(-B_{\gamma}^{\tau} f_{l+\beta}^{\gamma} R_{\tau}^{\alpha} + R_{l+\beta}^{\alpha}\right) \{v^{l+\beta}\}^* = 0. \tag{6.17}$$

Выражение в скобках в середине равенства (6.17) должно равняться нулю, так как $\{v^{l+\beta}\}^*$ произвольные числа. Как показывает случай только одного уравнения связи, для этого следует положить

$$R^{\alpha}_{g} = \lambda_{(\alpha)} f^{\alpha}_{g}, \tag{6.18}$$

где λ_{α} инвариант; по индексу α суммирование не производится. Этим удовлетворяется и общее условие (6.6).

Уравнения (6.4) можно теперь, учитывая выражения (6.18) и (6.3), переписать следующим образом:

$$E_g - Q_g = \lambda_{\alpha} f^{\alpha}_{g} \tag{6.19}$$

(суммировать по индексу α) ***.

Для полной реакции получим:

$$\sum \mathbf{R}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\}^* = (-B^{\tau}_{\gamma} f^{\gamma}_{l+\beta} R_{\tau} + R_{l+\beta}) \{v^{l+\beta}\}^* = 0.$$

Приравнивая выражение в скобках нулю с учетом связи (6.4), получим $s-l$ уравнений, не содержащих реакций связей R_g

$$E_{l+\beta} - Q_{l+\beta} - B^{\tau}_{\gamma} f^{\gamma}_{l+\beta} (E_{\tau} - Q_{\tau}) = 0. \tag{6.20}$$

То же самое получится, если в уравнение виртуальной мощности (6.5) подставить выражение (6.16).

В уравнениях (6.10) можно параметры v^g заменить на $\{v^g\}$ или $\{v^g\}^*$ и исключить ψ^{α}. Получим

$$f^{\alpha}_{g} \{v^g\} - f^{\alpha}_{g} v^g = 0 \tag{6.21}$$

и

$$f^{\alpha}_{g} \{v^g\}^* = 0. \tag{6.22}$$

С помощью уравнения (6.21) можно исключить l параметров $\{v^{\tau}\}$ из выражения $\{\mathbf{v}_i\}$ (1.2) и уравнения $(E_j - Q_j)\ \{v^j\} = R_j \{v^j\}$ или с помощью (6.22) исключить $\{v^{\tau}\}^*$ из уравнений (2.5) и (2.6). Остающиеся параметры независимы.

Заметим, что выражения (6.21) и (6.22) допускают и более общее преобразование (6.9).

7. *Пример.* Решим ранее приведенный пример, используя уравнение связи. Обозначим скорость точки A в направлении орта $\mathbf{u}_{\varphi}$ буквой u. Тогда

$$\mathbf{v}_i = u\mathbf{u}_{\varphi} + v \cos(\psi - \varphi)\, \mathbf{u}_r + \omega (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varrho}_i), \tag{7.1}$$

а уравнение связи будет

$$u - r\omega_0 - v \sin(\psi - \varphi) = 0. \tag{7.2}$$

Возможная скорость i-й точки (из (7.1))

$$\{\mathbf{v}_i\} = \{u\} \mathbf{u}_{\varphi} + \{v\} \cos(\psi - \varphi)\, \mathbf{u}_r + \{\omega\} (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varrho}_i). \tag{7.3}$$

Если желаем найти реакцию нестационарной связи, то к уравнению (7.2) следует применить равенства (6.21). Получим

$$\{u\} - \{v\} \sin(\psi - \varphi) - u + v \sin(\psi - \varphi) = 0. \tag{7.4}$$

*** Для нахождения множителя λ_{γ} следует в уравнениях (6.19) индекс g заменить на τ и умножить на B^{τ}_{γ}. Тогда получим

$$(E_{\tau} - Q_{\tau}) B^{\tau}_{\gamma} = \lambda_{\alpha} f^{\alpha}_{\tau} B^{\tau}_{\gamma} = \lambda_{\gamma}$$

(см. (6.14)).

Вычислим из уравнения (7.4) $\{u\}$ и подставим в уравнение (7.3). Это дает

$$\{\mathbf{v}_i\}=\{v\}\mathbf{i}+\{\omega\}(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varrho}_i)+[u-v\sin(\psi-\varphi)]\mathbf{u}_\varphi \tag{7.5}$$

(так как $\cos(\psi-\varphi)\mathbf{u}_r+\sin(\psi-\varphi)\mathbf{u}_\varphi=\mathbf{i}$); выражение (7.5) совпадает с выражением (4.2) вследствие связи (7.2). Сила реакции $\mathbf{R}$ приложена в точке A, следовательно,

$$\mathbf{R}\cdot\{\mathbf{v}_A\}^*=\mathbf{R}\cdot\mathbf{i}\{v\}^*=0,$$

откуда $\mathbf{R}=R\mathbf{j}$.

Мощность реакции $\mathbf{R}$ будет

$$N_R=R\mathbf{j}\cdot[u-v\sin(\psi-\varphi)]\mathbf{u}_\varphi=Rr\omega_0\cos(\psi-\varphi)=$$

$$=\sum(m_i\mathbf{a}_i-\mathbf{F}_i)\cdot\mathbf{u}_\varphi r\omega_0=(M\mathbf{a}_C-\mathbf{F})\cdot\mathbf{u}_\varphi r\omega_0;$$

но $\mathbf{u}_\varphi=\mathbf{j}\cos(\psi-\varphi)+\mathbf{i}\sin(\psi-\varphi)$, а так как $(M\mathbf{a}_C-\mathbf{F})\cdot\mathbf{i}=0$, по (4.5), то получим

$$R=(M\mathbf{a}_C-\mathbf{F})\cdot\mathbf{j}.$$

Преимущество УВМ перед дифференциальными принципами заключается именно в том, что помимо уравнений (6.22) в УВМ имеется еще уравнения (6.21), что позволяет вычислить реакцию нестационарной связи.

Пример с уравнением связи, нелинейным относительно параметров скорости, имеется в [11].

Заметим, что при учете уравнений связей наряду с понятием возможной (виртуальной) скорости не понадобилось введение возможной производной по времени любого порядка от скорости (как это бывает с вариациями). Это намного упрощает применение УВМ.

8. Связь УВМ с другими методами.

Введем обозначения:

$$\overset{(h)}{\mathbf{r}_i}=\overset{(h-1)}{\mathbf{v}_i}=\frac{d^h\mathbf{r}_i}{dt^h}=\frac{d^{h-1}\mathbf{v}_i}{dt^{h-1}};\qquad \overset{(0)}{\mathbf{r}_i}=\overset{(-1)}{\mathbf{v}_i}=\mathbf{r}_i.$$

Выразим виртуальную скорость в разных видах

$$\{\mathbf{v}_i\}^*=\{v^g\}^*\mathbf{u}_{ig}=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\pi^g}\{\dot{\pi}^g\}^*=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q^p}\{\dot{q}^p\}^*; \tag{8.1}$$

в неголономных системах $\{\dot{q}^p\}^*$ должны удовлетворять условиям (6.22).

Вычислим вариации

$$\delta\mathbf{r}_i=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\pi^g}\delta\pi^g=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q^p}\delta q^p. \tag{8.2}$$

В [12] доказываются следующие соотношения. Если $\delta\overset{(s)}{\mathbf{r}_i}=\delta\overset{(s-1)}{\mathbf{v}_i}=0$ при $s<h$, то

$$\delta\overset{(h)}{\mathbf{r}_i}=\delta\overset{(h-1)}{\mathbf{v}_i}=\delta\overset{(h-1)}{v^g}\mathbf{u}_{ig}=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\pi^g}\delta\overset{(h-1)}{v^g}=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q^p}\delta\overset{(h)}{q^p}. \tag{8.3}$$

Так как базисные векторы в (8.1), (8.2) и (8.3) совпадают, а вариации произвольны в одинаковой мере, то можно положить, что

$$\delta\overset{(h)}{\mathbf{r}_i}=\tau^h\delta\mathbf{r}_i;\qquad \{\mathbf{v}_i\}^*\delta\tau=\tau^h\delta\overset{(h-1)}{\mathbf{v}_i}=\tau^h\delta\overset{(h)}{\mathbf{r}_i}, \tag{8.4}$$

где $\tau \neq 0$ — произвольное число размерности времени, $\delta\tau$ — бесконечно малая.

Условия для дифференциальных принципов $(h+1)$-порядка выражаются в виде

$$\sum (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}'_i) \cdot \overset{(h)}{\delta \mathbf{r}_i} = 0; \qquad \sum \mathbf{R}_i \cdot \overset{(h)}{\delta \mathbf{r}_i} = 0 \tag{8.5}$$

($\mathbf{F}'_i$ не содержит реакций связей $\mathbf{R}_i$).

Умножая (8.5) на τ^h (и во втором случае сокращая на $\delta\tau$) получим

$$\sum (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}'_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0; \qquad \sum \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

или

$$\sum (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}'_i) \cdot \{\mathbf{v}_i\}^* = 0; \qquad \sum \mathbf{R}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\}^* = 0,$$

т. е. получим принцип Даламбера—Лагранжа или уравнение виртуальной мощности для случая идеальных связей (см. (6.5) и (6.6)). Конечно, возможен и обратный переход. Вообще в уравнениях (8.5) можно переставлять вариации произвольным образом. Например, в [2] принципы Журдена и Гаусса заменяются принципом Даламбера—Лагранжа, что допустимо.

Таким образом, в голономных системах дифференциальные принципы совпадают с уравнением виртуальной мощности для идеальных связей, а в неголономных системах (если придерживаться обобщенных координат) выражение уравнения виртуальной мощности более простое, чем аналогичные выражения в дифференциальных принципах, где, кроме того, в процессе вывода уравнений учитываются уравнения связей.

В результате устанавливаем, что уравнение виртуальной мощности в общем виде (2.6) или (6.5) (без условия (6.6)) шире дифференциальных принципов, так как учитывает и неидеальные связи, а уравнение возможной мощности (2.1) или (2.2) дает, кроме того, добавочное уравнение для вычисления реакции нестационарной связи R_0. Лучшее совпадение УВМ получается с принципом, изложенным в [2], если иметь в виду и случай сервосвязей, где учитываются неидеальные связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Госиздат, 1961.
2. *Румянцев В. В.* О некоторых вариационных принципах механики. Современные проблемы теоретической и прикладной механики. Киев, 1978, 74—89.
3. *Поляхов Н. Н.* Вестн. Ленингр. ун-та, № 13, 106—114 (1974).
4. *Поляхов Н. Н., Сегжда С. А., Юшков М. П.* Вестн. Ленингр. ун-та, № 1, 65—70 (1982).
5. *Сильде О. М., Тийкма Б. А.* Тр. Таллин. политехн. ин-та, сер. А, № 261, 3—10 (1968).
6. *Сильде О. М., Тийкма Б. А.* Тр. Таллин. политехн. ин-та, сер. А, № 293, 95—106 (1970).
7. *Рельвик Х. А.* Тр. Таллин. политехн. ин-та, № 345, 53—62 (1973).
8. *Рельвик Х. А., Сильде О. М.* Тр. Таллин. политехн. ин-та, № 345, 63—74 (1973).
9. *Рельвик Х. А.* Тр. Таллин. политехн. ин-та, № 393, 39—54 (1976).
10. *Сильде О. М., Чистякова А. Ш.* Тр. Таллин. политехн. ин-та, № 393, 31—38 (1976).
11. *Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О.* Основные вопросы аналитической механики. Таллин, «Валгус», 1979.
12. *Гольст Г., Сильде О.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, **487**, 75—81 (1979).
13. *Рельвик Х. А.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, **487**, 82—94 (1979).
14. *Сильде О., Хайтин А.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, **487**, 95—100 (1979).
15. *Сильде О., Хайтин А.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, **627**, 90—98 (1982).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 18/X 1982

Переработанный вариант 3/III 1983

O. SILDE, H. RELVIK

VÕIMALIKU VÕIMSUSE VÕRRAND ANALÜÜTILISES MEHAANIKAS

Süsteemis vabadusastmete arvuga s, kui sidemetevõrrandid on lineaarsed üldistatud kiiruste $\dot{q}^p$ suhtes, on võimalik valida s sõltumatut kiiruse parameetrit nii, et i-nda masspunkti kiirusvektor $\mathbf{v}_i$ avaldub kujul (1.1) (v^0 on antud ajafunktsioon). Sellest saadakse võimaliku (virtuaalse) kiiruse avaldis (1.2) ((2.5)), milles $\{v^g\}$ ja $\{v^g\}^*$ on suvalised arvud. Nende abil koostatakse võimaliku (virtuaalse) võimsuse võrrandid (2.1) ja (2.2) ((2.6)), millest tulenevad süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid (2.3). Artikli punkt 5 sisaldab mõningaid avaldisi arvutustöö kergendamiseks ja mehaanika sidumiseks geomeetriaga.

Üldiste sidemetevõrrandite (6.1) puhul elimineeritakse võrrandite (6.10) abil l kiiruse parameetrit v^τ ja kiirusvektor $\mathbf{v}_i$ saab kuju (6.15) sõltumatute parameetrite $v^{l+\beta}$ kaudu; sellest (võimalik ja) virtuaalne kiirusvektor (6.16). Ideaalsete sidemete puhul kehtivad võrrandid (6.17)—(6.19). Võrrandid (6.21) ja (6.22) võimaldavad elimineerida l parameetrit $\{v^\tau\}$ ja $\{v^\tau\}^*$.

O. SILDE, H. RELVIK

DIE GLEICHUNG DER MÖGLICHEN LEISTUNG IN DER ANALYTISCHEN MECHANIK

Es sei ein mechanisches System mit n allgemeinen Koordinaten q^p und mit l nichtholonomen, in Bezug auf die allgemeinen Geschwindigkeiten $\dot{q}^p$ linearen Bedingungsgleichungen gegeben. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems sei $s=n-l$. In diesem Falle ist es möglich, s unabhängige Geschwindigkeitsparameter v^g zu wählen, so daß der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_i$ des i-ten Punktes den Ausdruck (1.1) bekommt (v^0 ist eine bekannte Funktion der Zeit). Daraus erhält man einen Ausdruck für den möglichen (virtuellen) Geschwindigkeitsvektor (1.2) ((2.5)), wobei $\{v^g\}$ und $\{v^g\}^*$ beliebige Zahlen sind. Mit Hilfe dieser Begriffe kommt man zur Gleichung der möglichen (virtuellen) Leistung (2.1) und (2.2) ((2.6)), die als eine Grundgleichung zur Berechnung der Aufgaben aus der Mechanik gilt, für holonome und nichtholomone Systeme. Aus ihr bekommt man die Bewegungsgleichungen des Systems (2.3).

Der Punkt 5 gibt einige Ausdrücke zur Erleichterung der Rechnungen und zur Verbindung der Mechanik mit Geometrie.

Hat man ein System von Bedingungsgleichungen (6.1), so kann man mit Hilfe der Gleichungen (6.10) die l Geschwindigkeitsparameter v^τ eliminieren, und man erhält einen neuen Ausdruck für $\mathbf{v}_i$ (6.15) in unabhängigen Parametern $v^{l+\beta}$, aus dem ein Ausdruck für die (mögliche und) virtuelle Geschwindigkeit (6.16) bekommen wird. Für ideale Bedingungen gelten (6.17) und (6.18), die Bewegungsgleichungen sind (6.19). Die Gleichungen (6.21) und (6.22) ermöglichen die Elimination von den l Parametern $\{v^\tau\}$ und $\{v^\tau\}^*$.