

Ю. ИОЗЕПСОН

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КРИСТАЛЛАХ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

(Представил Х. Абен)

### 1. Введение

При исследовании кристаллов методом фотоупругости обработка экспериментальных данных обычно проводится в двух частях. Вначале выводятся соотношения между разностью хода и изменением показателя преломления, а затем — между изменением показателя преломления и напряжениями. В таком случае надо учитывать не только те комбинации пьезооптических коэффициентов, которые определяют изоклину и разность хода, но и все пьезооптические коэффициенты отдельно.

В данной работе приводится матричное уравнение, объединяющее обе части вычислений, которое легко показывает, что без применения дополнительных уравнений или предположений о напряжениях в кристаллах методом фотоупругости можно определить лишь пять линейно независимых комбинаций компонент тензора напряжений.

### 2. Вывод матричного уравнения

Используем декартову систему координат. Матрицу пьезооптических коэффициентов  $\Pi$  [1] описываем в кристаллофизической системе координат  $X$ . Напряжения выражаем в системе координат  $X'$ , которая обычно связана с внешней формой кристалла. Координатную систему  $X''$  выбираем так, чтобы одна из ее осей совпадала с направлением просвечивания. Введем матрицы  $Q^i$  в виде

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

и матрицы-столбцы  $\Psi^i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) с элементами

$$\psi_1^i = (\delta_{i*} \cos 2\alpha_{i*} - \delta_{i0} \cos 2\alpha_{i0})/t_i, \quad (4)$$

$$\psi_2^i = (\delta_{i*} \sin 2\alpha_{i*} - \delta_{i0} \sin 2\alpha_{i0})/t_i,$$

где  $\alpha$  — оптическая изоклина,  $\delta$  — разность хода,  $t$  — длина пути света в кристалле. Индекс  $i$  означает координатную ось в системе координат  $X''$ , по которой распространяется свет, а индексы ноль и звездочка означают соответственно недеформированное и деформированное состояние кристалла.

Рассмотрим кристалл, в котором напряжения на световом луче постоянны. Тогда, используя результаты [2-4] и матрицы (1) — (4), уравнение для метода фотоупругости можно записать в виде

$$\Psi^i = (n_0^3/2) Q^i F D \Pi D^{-1} \Sigma, \quad (5)$$

где  $n_0$  — средний показатель преломления,  $\Sigma$  — матрица-столбец напряжений,  $D$  и  $F$  — матрицы, преобразующие компоненты тензора из системы координат  $X$  в систему  $X'$  и из системы координат  $X'$  в систему  $X''$  [3] соответственно.

Используя  $(6 \times 6)$ -матрицу  $S$  с элементами

$$s_{j,l} = \begin{cases} s_l, & 1 \leq j \leq 3 \\ 0, & 4 \leq j \leq 6 \end{cases}$$

и равенства

$$QS = 0$$

$$FS = DS = S,$$

порядок используемых матриц можно снизить и уравнение (5) примет вид

$$\Psi^i = (n_0^3/2) Q^{*i} F^* D^* \Pi^* D^{-1} \Sigma, \quad (6)$$

где матрицы  $Q^{*i}$ ,  $\Pi^*$ ,  $F^*$  и  $D^*$  имеют следующие элементы ( $1 \leq j, k \leq 5, 1 \leq l \leq 6$ )

$$q_{j,h}^{*i} = q_{j,h+1}^i, \quad (7)$$

$$\pi_{j,l}^* = \begin{cases} \pi_{j+1,l} - \pi_{1,l}, & 1 \leq j \leq 2 \\ \pi_{j+1,l}, & 3 \leq j \leq 5, \end{cases} \quad (8)$$

$$d_{j,h}^* = \begin{cases} d_{j+1,h+1} - d_{1,h+1}, & 1 \leq j \leq 2 \\ d_{j+1,h+1}, & 3 \leq j \leq 5, \end{cases} \quad (9)$$

$$f_{j,h}^* = \begin{cases} f_{j+1,h+1} - f_{1,h+1}, & 1 \leq j \leq 2 \\ f_{j+1,h+1}, & 3 \leq j \leq 5. \end{cases} \quad (10)$$

В методе фотоупругости для изотропных материалов используется оптический коэффициент напряжения  $S$ . Так как в кристаллах величина  $S$  зависит от направления просвечивания, определим матрицу

$$C^* = (n_0^3/2) \Pi^*, \quad (11)$$

которая является аналогом постоянной  $S$  для кристаллов. Тогда уравнение (6) можно окончательно выписать в виде

$$\Psi^i = Q^{*i} F^* D^* C^* D^{-1} \Sigma. \quad (12)$$

### 3. Свойство матричного уравнения

Запишем уравнение (12) в виде

$$\Psi^i = Q^{*i} F^* R, \quad (13)$$

где

$$R = D^* C^* D^{-1} \Sigma. \quad (14)$$

Так как  $R$  является пятиэлементной матрицей-столбцом, то при всех

возможных направлениях просвечивания (изменяется  $F^*$  или  $Q^{*i}$ ) из экспериментально определяемых значений  $\Psi^i$  можно вычислить лишь пять компонентов  $r_h$ . Поэтому из уравнения (14) можно получить только пять линейно независимых уравнений и, следовательно, вычислить все компоненты тензора напряжений без дополнительных уравнений или предположений о напряжениях представляется невозможным. Например, в частном случае кубических кристаллов определяется напряженное состояние до изотропного растяжения [5].

#### 4. Заключение

Приведенное матричное уравнение позволяет уже в начале вычислений учитывать комбинации пьезооптических коэффициентов (8), которые определяют разность хода и изоклину. Это значительно сокращает количество вычислительных работ. Матричное представление удобно также для вычислений и программирования.

Уравнение (14) показывает, что даже в случае монокристаллов метод фотоупругости дает только 5 линейно независимых уравнений для определения напряжений.

Автор признателен Я. Куксу за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Най Дж. Физические свойства кристаллов. М., ИЛ, 1960.
2. Бугаков И. И., Грах И. И., Конакова Н. С. Труды VII Всесоюзной конференции по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений, 4, 1971, 124—127.
3. Bond, B. L. Bell Syst. Techn. J., 22, № 1, 1—72 (1943).
4. Афанасьев И. И. Материалы VIII Всесоюзной конференции по методу фотоупругости, 4, 1979, 17—22.
5. Бокштейн М. Ф. В кн.: Методы исследования напряжений в конструкциях. М., «Наука», 1975, 72—84.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
20/XII 1982

J. JOSEPHSON

#### PINGETE MÄÄRAMINE KRISTALLIDES FOTOELASTSUSMEETODIL

On tuletatud maatriksvõrrand, milles on arvesse võetud neid piesooptiliste kordajate kombinatsioone, mis määravad isokliipi ja käiguvahe. Võrrandi põhjal on näidatud, et ilma lisavõrranditeta ja pingete kohta käivate eeldusteta saab fotoelastsusmeetodil ka kristallides määrata vaid viis linearselt sõltumatut pingete kombinatsiooni.

J. JOSEPHSON

#### PHOTOELASTIC INVESTIGATIONS OF STRESSES IN CRYSTALS

Usually stresses in crystals are determined in two stages. Firstly, the changes of the refractive indices are calculated from experimental data; thereafter the stresses will be determined with these changes taken into account. Introducing matrices  $Q^i$  and  $\Psi^i$  (1—4), both stages of calculations can be completed simultaneously (12).

Matrix  $C^*$  (11) plays the role of the stress-optical coefficient. Only the combinations of piezooptical coefficients (8) which determined the value of the isoclinic and the relative phase retardation, are taken into consideration in this matrix.

From the equation (12) it is to be seen that without additional equations or assumptions concerning the state of stress the photoelastic method permits also in case of crystals to determine only five linear independent combinations of stress components.