

Н. ВЕКСЛЕР, В. КОРСУНСКИЙ

РАССЕЯНИЕ НАЗАД КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

(Представил Н. Алумяэ)

На плоской границе раздела двух идеальных сжимаемых жидкостей размещается тонкая упругая круговая цилиндрическая оболочка бесконечной протяженности. Продольная ось оболочки параллельна границе раздела. На оболочку падает и рассеивается на ней акустическая волна давления, плоский фронт которой параллелен границе раздела. Предлагается приближенная явная формула для расчета акустического давления в жидкости в зависимости от волнового радиуса при рассеянии назад в дальнем поле. В ней учитываются вклады волн трех основных типов — отраженной, переотраженных в тонком цилиндрическом слое и переизлученной, обусловленной распространением по оболочке нулевой симметричной волны типа Лэмба. Даются ограничения на область применимости предложенной формулы. Приводится пример расчета по этой формуле акустического давления, рассеянного оболочкой, выполненной из армо-железа, расположенной на границе раздела воды и донного осадка (алевроитовой глины).

1. Формула для давления в жидкости

Пусть на плоской границе раздела двух идеальных сжимаемых жидкостей располагается тонкая упругая цилиндрическая оболочка кругового поперечного сечения и бесконечной протяженности. Продольная ось оболочки параллельна границе раздела. На оболочку падает и рассеивается на ней акустическая волна давления, плоский фронт которой параллелен границе раздела (рис. 1).

Введем безразмерные координаты и время

$$\xi = X/a, \quad \eta = H/a, \quad t = cT/a, \quad (1)$$

где X, H — размерные декартовы координаты, T — размерное время.

Запишем давление в падающей волне p_i в безразмерных координатах в виде

$$p_i = p_* \exp(i\omega\tau), \quad \tau = t + (\xi - 1), \quad (2)$$

где p_* — постоянная, имеющая размерность давления, ω — частота. Время отсчитывается с момента соприкосновения падающей волны с наружной поверхностью оболочки.

Используя соображения локальности лучевого метода, выпишем приближенную формулу для акустического давления в точке наблюдения, расположенной на оси ξ , при рассеянии назад в дальнем поле

$$p_s(x) = [p_1(x) + p_2(x)] p_* J \exp(i\omega\tau_1), \quad \xi \gg 1, \quad (3)$$

$$\tau_1 = t - (\xi - 1), \quad J = [\xi(2 - 1/\xi)]^{-1/2},$$

где $p_1(x)$ зависит от зеркального отражения от наружной поверхности оболочки и переотражения в тонком цилиндрическом слое, а $p_2(x)$ — от переизлучения.

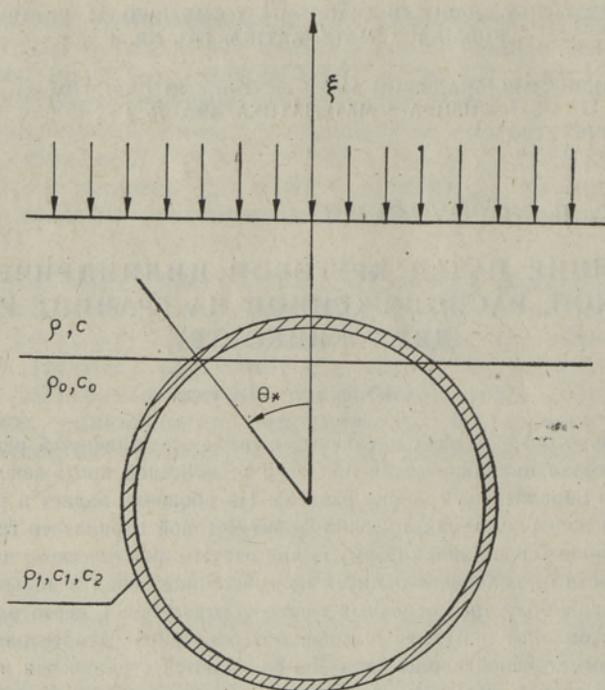


Рис. 1.

В случае тонкостенной оболочки этим компонентам можно придать следующий вид:

$$p_1(x) = v - (1 - v^2) \frac{\exp(iax)}{1 - v \exp(iax)}, \quad (4)$$

$$p_2(x) = 2A(x) \exp(i\beta) D \frac{\exp(i\gamma x)}{1 - E \exp(i\delta x)}, \quad (5)$$

$$\text{где } v = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \quad \zeta = \frac{\rho c}{\rho_1 c_1}, \quad \zeta_0 = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_1 c_1}, \quad \alpha = \frac{2hc}{c_1}, \quad h = \frac{a - b}{a}, \quad (6)$$

$$x \equiv ka = \frac{\omega a}{c}, \quad D = \exp[-2\langle(\theta_* - \theta)\kappa + (\pi - \theta_*)\kappa_0\rangle],$$

$$E = \exp[-2\langle\theta_*\kappa + (\pi - \theta_*)\kappa_0\rangle],$$

$$\gamma = 2[(1 - \cos \theta) + (\pi - \theta)/v^{ph}], \quad \delta = 2\pi/v^{ph}, \quad v^{ph} = c_{10}/c,$$

$$v_0^{ph} = c_{10}/c_0, \quad c_{10} = c_1 \sqrt{1 - 2v/(1 - v)}, \quad \theta = \arcsin(v^{ph})^{-1},$$

$$\theta_0 = \arcsin(v_0^{ph})^{-1}.$$

Здесь ρ, c — плотность и скорость звука в первой жидкости; ρ_0, c_0 — плотность и скорость звука во второй жидкости; ρ_1, c_1, c_2, v — плотность, скорость продольной волны, скорость поперечной волны, коэффициент Пуассона материала оболочки; c_{10} — скорость распространения периферической волны, которой является нормальная (типа Лэмба) нулевая симметричная волна; a, b — наружный и внутренний радиусы оболочки; h — относительная толщина оболочки; x — волновой радиус; θ_* — угол, задающий положение границы раздела; $\theta(\theta_0)$ — критический угол возбуждения (излучения) периферической волны на границе с первой (вто-

рой) жидкостью; $A(x)$ — амплитуда периферической волны в момент ее возбуждения на критическом угле; β — сдвиг фазы переизлученной волны относительно зеркально отраженной за счет возбуждения и излучения; $\kappa(\kappa_0)$ — коэффициент затухания периферической волны при распространении вдоль направляющей окружности цилиндрической оболочки на границе с первой (второй) жидкостью; E — коэффициент затухания периферической волны на пути в один полный оборот вокруг оболочки; D — коэффициент затухания периферической волны на пути вдоль дуги окружности от критической точки входа до критической точки выхода.

Множитель 2 в формуле (5) учитывает вклад волн, обтекающих оболочку по направлению часовой стрелки и против него.

При заданных параметрах оболочки и контактирующих с ней жидкостей $p_1(x)$ в формуле (4) определено полностью, в то время как $p_2(x)$ в (5) содержит три неопределенных коэффициента β , κ , κ_0 и неизвестную функцию $A(x)$, относительно которой предполагается, что она монотонно убывает с ростом x . Ниже предлагается процедура для их отыскания.

2. Нахождение неизвестных

Мысленно уберем границу раздела двух жидких сред и рассмотрим вспомогательную задачу о рассеянии плоской акустической волны оболочкой, погруженной в одну из жидких сред, например в первую.

Сейчас, с одной стороны, используя метод разделения переменных, можно точно рассчитать акустическое давление, рассеянное оболочкой, и представить его в точке наблюдения в виде

$$p_s(x) = p(x) p \cdot J \exp(i\omega\tau_1), \quad \xi \gg 1, \quad (7)$$

а, с другой стороны, его можно представить в форме (3), где $p_1(x)$ по-прежнему определяется формулой (4), а зависимость для $p_2(x)$ упрощается и принимает вид

$$p_2(x) = 2A(x) \exp(i\beta) \sigma \frac{\exp(i\gamma x)}{1 - \varepsilon \exp(i\delta x)}, \quad (8)$$

$$\text{где } \sigma = \exp[-2(\pi - \theta)\kappa], \quad \varepsilon = \exp(-2\pi\kappa). \quad (9)$$

Используя (4) и (7), образуем разность

$$\psi(x) = p(x) - p_1(x). \quad (10)$$

Сравнивая (3) и (7) и учитывая (10), получим

$$\psi(x) = p_2(x). \quad (11)$$

Здесь рассчитанная на ЭВМ функция $\psi(x)$ имеет вид таблицы, а $p_2(x)$ — формулы.

Вычислим модули

$$f(x) = |\psi(x)|, \quad \varphi(x) = |p_2(x)| \quad (12)$$

и запишем равенство

$$f(x) = \varphi(x). \quad (13)$$

Согласно формуле (8) функция $\varphi(x)$ (12), а следовательно и $f(x)$, в точках $x = x_n$ имеет максимумы, а в точках $x = x_m$ — минимумы. Координаты экстремальных точек находятся из уравнений

$$x_n = n\nu^{ph}, \quad x_m = (1/2) m\nu^{ph}, \quad m = (2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Точки $x = x_n$ называются резонансными, а точки $x = x_m$ — антирезонансными.

Проведем огибающую через максимумы функции $f(x)$ и зададим вид этой кривой явной формулой $F(x)$. Примем, что для любого x имеет место равенство

$$A(x) = \frac{1 - \varepsilon}{2\sigma} F(x). \quad (15)$$

Используем это равенство в антирезонансных точках

$$f(x) |_{x=x_m} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} F(x) |_{x=x_m} \quad (16)$$

и введем обозначение

$$r = \frac{F(x) |_{x=x_m}}{f(x) |_{x=x_m}} \quad (17)$$

Тогда равенство (16) примет вид

$$\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = r, \quad (18)$$

из которого найдем параметр ε

$$\varepsilon = \frac{r - 1}{r + 1}. \quad (19)$$

По определению (9) отыщем параметр κ , а затем, используя κ , — параметр σ . Далее, согласно (11), при фиксированном x и известной $A(x)$ (15) приравняем фазы функций $\psi(x)$ и $p_2(x)$ и найдем параметр β . Этим оканчивается отыскание неизвестных в выражении (8) для $p_2(x)$, которое теперь можно представить в виде

$$p_2(x) = F(x) (1 - \varepsilon) \exp(i\beta) \frac{\exp(i\gamma x)}{1 - \varepsilon \exp(i\delta x)}. \quad (20)$$

Поскольку функция $f(x)$ рассчитана с некоторой погрешностью, в практических вычислениях вместо значения r (17) целесообразно использовать осредненное значение r_L , задаваемое формулой

$$r_L = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{F(x) |_{x=x_{ml}}}{f(x) |_{x=x_{ml}}}, \quad (21)$$

где l — порядковый номер минимума, а L — число учтенных минимумов.

Если решить задачу о рассеянии плоской акустической волны давления оболочкой, размещенной во второй акустической среде, то вместо (20) получим аналогичную зависимость

$$p_{20}(x) = F_0(x) (1 - \varepsilon_0) \exp(i\beta_0) \frac{\exp(i\gamma_0 x)}{1 - \varepsilon_0 \exp(i\delta_0 x)}. \quad (22)$$

Величины, помеченные ноликом, имеют смысл, определенный формулой (6), но относятся, естественно, к случаю контакта со второй жидкой средой.

С учетом изложенного выше становится понятной структура формулы (5), в которой учитывается, что на части пути периферическая волна излучает в первую жидкую среду, а на части — во вторую. Наличие границы раздела отражается в формулах для D и E (6) только двумя параметрами θ и χ_0 .

3. Ограничения

В формуле (3)—(5) нет члена, учитывающего вклад в давление в точке наблюдения волн, переотражающихся между границей раздела и оболочкой. Поэтому, для того чтобы приведенная формула была справедливой, введем ограничения на положение границы раздела

$$\theta_0 > \theta, \quad \theta_0 > \theta_0, \quad \theta_0 < \pi - \theta. \quad (23)$$

Условия (23) блокируют возможность повторного попадания на оболочку переизлученной ею волны после отражения от границы раздела.

Формально в точке пересечения границы раздела двух жидких сред с направляющей окружностью оболочки критический угол излучения изменяется скачком, что приводит к возникновению новой волны. Ее вклад в акустическое поле давления в точке наблюдения не учитывается формулой (3)—(5), что вносит некоторую погрешность в определение величины давления.

Фактически в прикладных задачах гидроакустики резкая граница раздела двух жидких сред обычно отсутствует, критический угол излучения изменяется достаточно плавно, появляющаяся волна имеет малую амплитуду и ее вклад в давление в точке наблюдения, соответственно, невелик. В предположении выполнения таких условий, формулой (3)—(5) можно пользоваться.

В формуле (3)—(5) предполагается, что скорость распространения периферической волны по оболочке c_{10} не зависит от относительной толщины оболочки h и наличия контакта с жидкостью. Такое предположение справедливо только для достаточно тонкостенных оболочек ($h \ll 1/30$) и малых относительных импедансов

$$\zeta \ll 1, \quad \zeta_0 \ll 1. \quad (24)$$

В типичной для задач гидроакустики ситуации условия (24) обычно выполняются.

В формуле (3)—(5) учтены влияния только трех основных типов волн: зеркально отраженной, переотраженных в тонком цилиндрическом слое и одной-единственной периферической — нормальной (типа Лэмба) нулевой симметричной волны. Вкладами волн иных типов мы пренебрегли; в частности, не учтены дифрагированные (типа Франца) волны, нормальные симметричные волны высших порядков, равно как и все нормальные антисимметричные волны.

Вклад дифрагированных волн в рассеянное оболочкой поле давления обычно невелик. Он заметен лишь при малых значениях волнового радиуса ($x \ll 10$). Дифрагированные волны быстро затухают на пути распространения вокруг оболочки и поэтому в точку наблюдения, расположенную в освещенной области, доходит только одна дифрагированная волна — нулевого порядка.

При малых x вклад нулевой антисимметричной волны невелик. С ростом x он растет и в окрестности $xh \approx 1$ становится соизмеримым с вкладом нулевой симметричной волны; поэтому при таких значениях x формула (3)—(5) перестает быть справедливой.

Если требования к точности описания давления в жидкости, рассеянного оболочкой, велики, то при малых x ($x \ll 10$) формулу (3)—(5) следует дополнить членом, учитывающим вклад дифрагированной волны, а при больших x ($xh \approx 1$) — соответственно членом, учитывающим вклад антисимметричной волны. Структура обоих добавляемых членов подобна приведенной в формуле (5).

Процессы отражения от наружной цилиндрической поверхности и переотражения в тонком цилиндрическом слое описываются формулой (4) приближенно. В ней вместо цилиндрических коэффициентов отра-

жения и прохождения использованы плоские. Такая аппроксимация справедлива, если кривизна слоя мало изменяется на длине волны.

В силу симметрии по углу в лобовой точке при отражении не возникает проходящей поперечной волны. Поэтому, фактически, в формуле (4) используются коэффициенты отражения и прохождения на плоской границе раздела жидких полупространств и слоя при нормальном падении волны.

Замена цилиндрических коэффициентов отражения и прохождения плоскими асимптотически оправдана в случае коротких волн (при $x \gg 1$). Мы же применяем ее во всем рассматриваемом диапазоне по x , даже при малых значениях x . Хорошо известно, что при малых x ($x \lesssim 10$) такая замена вносит в расчет некоторую погрешность. Однако, поскольку при $x \lesssim 10$ в формуле (3)—(5) нами не учтен вклад дифрагированных волн, то мы считаем излишним уточнение описания процессов отражения и преломления, приведенного в (4).

При описании распространения нормальной симметричной волны формулой (5) предполагается ее бездисперсионность. При достаточно тонкостенных оболочках ($h \lesssim 1/50$) дисперсия скорости этой волны действительно отсутствует. С ростом h дисперсия может появиться и тогда ее следует учесть в описании волны.

Для оболочки заданной относительной толщины h считается, что коэффициенты затухания нормальной симметричной волны при распространении на единице длины дуги окружности κ и κ_0 не зависят от волнового радиуса. Возможно, что более точные вычисления покажут такую зависимость. Тогда ее придется учесть в формуле (5).

В описании трасс периферической волны вдоль дуги окружности и излученной ею волны в жидкости проведено некоторое упрощение, связанное с размещением точки наблюдения в дальнем поле ($\xi \gg 1$). При малых ξ ($\xi \lesssim 10$) это упрощение приводит к существенной погрешности. Поэтому условие $\xi \gg 1$ в формуле (3) является необходимым.

В формуле (3) геометрическая расходимость лучей считается одинаковой для точки зеркального отражения и точки, находящейся на критическом угле. При $\xi \gg 1$ такое предположение вносит небольшую погрешность в находимое по формуле (3) акустическое давление. При малых ξ ($\xi \lesssim 10$) расходимости отраженной и излученной волн следует различать.

Точность приближенной аналитической формулы (3)—(5) для давления зависит от точности вычисления функции $f(x)$. В окрестности максимумов она очень чувствительна к выбору шага l_x , с которым функция считается по оси x . Шаг влияет как на положение по оси экстремумов функции, так и на их величину. Как известно, разность абсцисс двух последовательных сходственных экстремумов кривой частотной зависимости приближенно задает относительную групповую скорость периферической волны. Если эта разность постоянна в некотором интервале по x , то в этом интервале волна распространяется без дисперсии, т. е. ее фазовая скорость равна групповой. Поэтому небольшие погрешности в счете функции $f(x)$, обусловленные выбором недостаточно малого шага l_x , могут создать ложное впечатление о наличии дисперсии.

Значения и координаты максимумов функции $f(x)$ фактически используются при выборе формулы огибающей $F(x)$. В силу небольших погрешностей счета, обусловленных недостаточно малым шагом l_x , огибающую приходится проводить через точки, координаты которых найдены с некоторой погрешностью. Из-за этой погрешности может оказаться, что назначенная функция $F(x)$ не проходит через некоторые исходные точки. Чтобы уточнить выбор функции $A(x)$ можно воспользоваться найденными значениями параметров и рассчитать функцию

$$\eta(x) = \left| \frac{[p(x) - p_1(x)] [1 - \varepsilon \exp(i\delta x)]}{2\sigma \exp(i\beta) \exp(i\delta x)} \right| \quad (25)$$

Эта функция — гладкая и не чувствительная к выбору шага. Поэтому для нее легче подобрать аналитическую формулу, которая и будет иско-мой функцией $A(x)$. Из физических соображений ясно, что эта функция должна быть простой, содержащей лишь небольшое число параметров.

Требование выбора надлежащего шага l_x в равной мере относится к функции $f_0(x)$.

4. Пример

Проиллюстрируем применение изложенной процедуры на примере фор-мулы для давления в жидкости, рассеянного в воду оболочкой из мате-риала армо-железо, пересекающей границу раздела воды и донного осадка в виде алевроитовой глины [1]. Параметры жидких и упругой сред имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \text{вода} & - \rho = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad c = 1493 \text{ м/с;} \\ \text{алевритовая глина} & - \rho_0 = 1,42 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad c_0 = 1519 \text{ м/с;} \\ \text{армо-железо} & - \rho_1 = 7,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad c = 5960 \text{ м/с}, \quad c_2 = 3240 \text{ м/с.} \end{aligned} \quad (26)$$

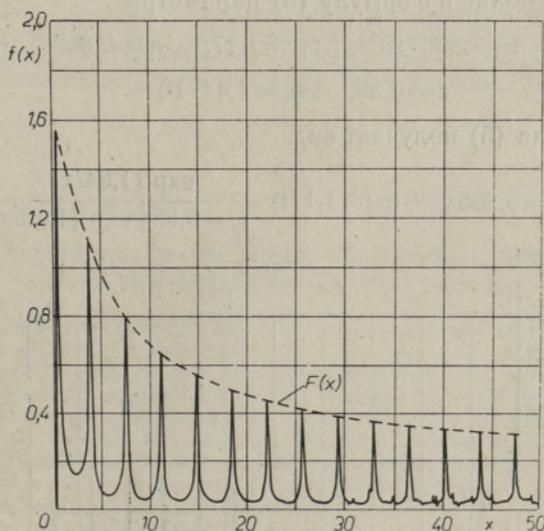


Рис. 2.

Примем, что геометрические параметры задачи имеют следующие значения

$$\theta_* = \pi/2, \quad h = 1/512, \quad \xi = 10^4. \quad (27)$$

Приведем входящие в (6) параметры

$$\begin{aligned} v &= 0,937, \quad \zeta = 0,0325, \quad \alpha = 9,78 \cdot 10^{-4}, \\ c_{10} &= 5460 \text{ м/с}, \quad v^{ph} = 3,66, \quad \gamma = 1,64, \quad \delta = 1,72, \\ \theta &= 0,276, \quad \theta_0 = 0,282. \end{aligned} \quad (28)$$

Рассчитанные функции $f(x)$ и $f_0(x)$ имеют вид, представленный на рис. 2 и 3.

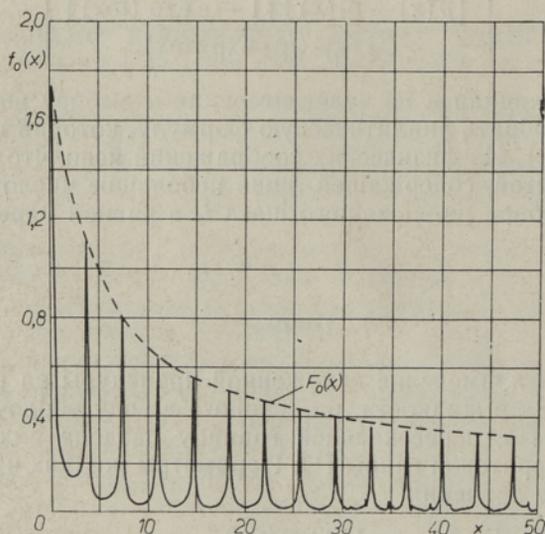


Рис. 3.

Зададим функции $F(x)$ и $F_0(x)$ в виде

$$F(x) = F_0 x^{-1/2}, \quad F_0 = 2,13; \quad F_0(x) = F_{00} x^{-1/2}, \quad F_{00} = 2,16 \quad (29)$$

и определим входящие в формулу (5) параметры

$$\begin{aligned} \kappa &= 2,58 \cdot 10^{-2}, & \beta &= 1,17, & \sigma &= 0,862, \\ \varepsilon &= 0,85, & \kappa_0 &= 1,44 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда формула (5) получает вид

$$p_2(x) = 0,286 x^{-1/2} \exp(1,17i) \frac{\exp(1,64ix)}{1 - 0,881 \exp(1,72ix)}. \quad (31)$$

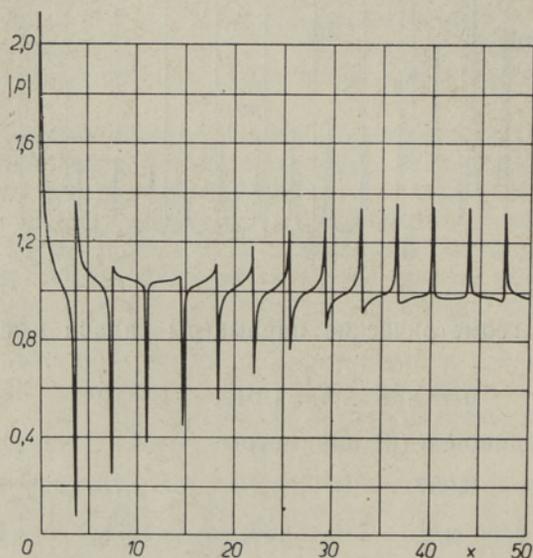


Рис. 4.

Используя формулы (3), (4), (31), рассчитаем модуль функции $[p_1(x) + p_2(x)]$. Соответствующая кривая показана на рис. 4.

В рассмотренном примере свойства первой и второй жидкостей близки и поэтому наличие границы раздела мало изменяет рассеянное оболочкой акустическое давление по сравнению с вырожденным случаем оболочки, находящейся в воде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акустика морских осадков (под ред. Л. Хэмптона). М., «Мир», 1977.

*Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
10/II 1983

N. VEKSLER, V. KORSUNSKI

KAHE VEDELIKU PIIRIL ASUVALT RINGSILINDRILISELT KOORIKULT

Kahe ideaalse kõkkusurutava vedeliku tasapinnalisel piiril asetseb elastne, lõpmatult pikk ringsilindriline õhukeseseinaline koorik. Kooriku pikitelg on paralleelne piirpinnaga. Koorikule langeb ja temalt hajub akustiline laine, mille tasapinnaline front on paralleelne piirpinnaga.

On esitatud ligikaudne valem langeva laine sagedusest sõltuva akustilise rõhu arutamiseks silindrist kaugel asuvas vaatluspunktis. Valem võimaldab arvestada silindri pinnalt peegeldunud, õhukeses silindrilises kihis tagasipeegeldunud ja koorikus leviva Lambi tüüpi sümmeetrilise laine poolt vedelikku kiiratava laine panust. On antud ka valem kasutamispirkonna piirangud ning esitatud arvutusnäide vee ja põhjasadestuse piiril asetsevalt armkorauast koorikult hajuva laine akustilise rõhu määramise kohta.

N. VEKSLER, V. KORSUNSKY

ON BACKSCATTERING BY CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS SITUATED ON THE BOUNDARY OF TWO LIQUIDS

A thin elastic circular cylindrical shell of infinite length is situated on the plane boundary of two different acoustic media (Fig. 1). The axis of the shell is parallel to the plane boundary of separation. A plane pressure wave (2) falls on the shell and is scattered by it. A simple approximate explicit formula (3)—(5) is proposed to describe the dependence of the acoustic pressure on the wave radius at a fixed observation point in the far field on the axis of symmetry. The contributions to the scattered fields of the reflected, refracted and reradiated waves are taken into account. The restrictions on the domain of validity of the considered formula are given. The example of calculation of the scattered acoustic pressure by means of explicit formula is presented in case of an Armco iron shell situated on the plane boundary of water and alevrite clay (Fig. 4).