

$a = -1$  the  $L$  neutrino has maximal helicity and in the case of  $a = +1$ , non-maximal helicity.

The author is grateful to M. Kõiv for many valuable critical remarks.

#### REFERENCES

1. Sterman, G., Townsend, P. K., Nieuwenhuizen, P., Phys. Rev., D17, № 6, 1501—1517 (1978).
2. Miller, D. H., SLAC-PUB-2713, Stanford, 1981.
3. Ots, I., Preprint F-9, Tartu, 1979.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,  
Institute of Physics

Received  
Apr. 12, 1982

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÕIDE  
FÜSIKA \* MATEMAATIKA. 1982, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31  
ФИЗИКА \* МАТЕМАТИКА. 1982, № 4

УДК 621.372.8 : 535

П. АДАМСОН

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКА МОЩНОСТИ НАПРАВЛЯЕМЫХ МОД АСИММЕТРИЧНОГО ПЛОСКОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

P. ADAMSON. TASAPINNALISE ASOMMEETRILISE DIELEKTRILISE LAINEJUHI SUUNATUD  
MOODIDE VOIMSUSVOO JAOTUS

P. ADAMSON. POWER DISTRIBUTION OF THE GUIDED MODES OF AN ASYMMETRIC  
DIELECTRIC SLAB WAVEGUIDE

(Представил К. К. Ребане)

Плоские диэлектрические волноводы (ПДВ) интенсивно исследуются в настоящее время в связи с широкими возможностями применения их в интегрально-оптических системах передачи и обработки информации [1, 2]. Модель ПДВ является основой и для анализа волноводных свойств резонатора полупроводникового гетеролазера [3, 4]. Цель данного сообщения — анализ распределения потока мощности в асимметричном ПДВ в зависимости от степени его асимметрии. Представлена также аппроксимационная формула для расчета фактора оптического ограничения (ФОО) ТЕ-мод, показывающая, какая доля полного потока мощности распространяется в среднем слое ПДВ.

Рассмотрим асимметричный трехслойный бесконечнопротяженный в двух измерениях ПДВ со скачкообразными изменениями диэлектрических проницаемостей на границах. Степень асимметрии ПДВ характеризуется фактором  $\eta = (\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3)^{-1}$ , где  $\epsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость среднего слоя ПДВ, а  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  — диэлектрические проницаемости крайних слоев ( $\epsilon_1 > \epsilon_{2,3}$ ,  $\epsilon_3 \geq \epsilon_2$ ). В дальнейшем индекс 1 проставляется у всех величин, характеризующих средний слой с  $\epsilon_1$ , а индексы 2, 3 — у величин, относящихся к крайним слоям с  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  соответственно.

Распределение потока мощности моды ПДВ определяется ФОО моды  $\Gamma_1$  и факторами делокализации моды  $\Gamma_{2,3}$  — относительные доли



потоков мощности в крайних слоях. Выражения для данных величин имеют следующий вид [5]:

$$\Gamma_{1\sigma}^{(N)} = (d + (\gamma_{2\sigma}^{(N)})^2 \eta^{-1} L_{2\sigma}^{(N)} + (\gamma_{3\sigma}^{(N)})^2 L_{3\sigma}^{(N)} (L_{\sigma}^{(N)})^{-1}), \quad (1)$$

$$\Gamma_{2\sigma}^{(N)} = (k_{\sigma}^{(N)})^2 L_{2\sigma}^{(N)} (L_{\sigma}^{(N)} \eta)^{-1}, \quad (2)$$

$$\Gamma_{3\sigma}^{(N)} = (k_{\sigma}^{(N)})^2 L_{3\sigma}^{(N)} (L_{\sigma}^{(N)})^{-1}, \quad (3)$$

где  $k_{\sigma}^{(N)}$  — поперечный волновой вектор в среднем слое ПДВ, выраженный в безразмерных единицах  $2\pi(\epsilon_1 - \epsilon_3)^{1/2}(\lambda_0)^{-1}$  ( $\lambda_0$  — длина волны в вакууме),  $\gamma_{2\sigma,3\sigma}^{(N)}$  — модули поперечных волновых векторов в крайних слоях в тех же единицах,  $d$  — толщина волновода в единицах  $(2\pi)^{-1}(\epsilon_1 - \epsilon_3)^{-1/2}\lambda_0$  (т. н. приведенная толщина). Индекс  $\sigma$  характеризует поляризацию моды (ТЕ- или ТМ-моды),  $N$  — номер моды.  $L_{\sigma}^{(N)}$  — эффективная толщина ПДВ [2, 5].  $L_{\sigma}^{(N)} = d + L_{2\sigma}^{(N)} + L_{3\sigma}^{(N)}$ , где  $L_{2\sigma,3\sigma}^{(N)}$  — глубина проникновения поля в соответствующий крайний слой.  $L_{2TE,3TE}^{(N)} = (\gamma_{2TE,3TE}^{(N)})^{-1}$  и  $L_{2TM,3TM}^{(N)} = (q_{2TM,3TM}^{(N)} \gamma_{2TM,3TM}^{(N)})^{-1}$ , где  $q_{2TM,3TM}^{(N)}$  — редукционный фактор [2, 5].  $\Gamma_{1\sigma}^{(N)} + \Gamma_{2\sigma}^{(N)} + \Gamma_{3\sigma}^{(N)} = 1$ .

Для анализа зависимости величин  $\Gamma_{1\sigma}^{(N)}$ ,  $\Gamma_{2\sigma}^{(N)}$  и  $\Gamma_{3\sigma}^{(N)}$  от  $\eta$  нами рассчитаны их производные по  $\eta$ . Для  $\frac{\partial \Gamma_{2\sigma}^{(N)}}{\partial \eta}$  и  $\frac{\partial \Gamma_{3\sigma}^{(N)}}{\partial \eta}$  получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{2\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} = & - \left( \frac{k_{\sigma}^{(N)}}{L_{\sigma}^{(N)} \eta} \right)^2 [L_{2\sigma}^{(N)} (d + L_{3\sigma}^{(N)}) + \\ & + \eta L_{2\sigma}^{(N)} \frac{\partial L_{3\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} - \eta (d + L_{3\sigma}^{(N)}) \frac{\partial L_{2\sigma}^{(N)}}{\partial \eta}], \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{3\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} = \left( \frac{k_{\sigma}^{(N)}}{L_{\sigma}^{(N)}} \right)^2 \left[ \frac{L_{2\sigma}^{(N)} L_{3\sigma}^{(N)}}{\eta} + (d + L_{2\sigma}^{(N)}) \frac{\partial L_{3\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} - L_{3\sigma}^{(N)} \frac{\partial L_{2\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} \right], \quad (3a)$$

где

$$\frac{\partial L_{2\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} = - \left[ \frac{(L_{2\sigma}^{(N)})^3}{2} (1 - \Gamma_{2\sigma}^{(N)}) + S_{2\sigma}^{(N)} \right] < 0, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial L_{3\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} = \frac{(L_{3\sigma}^{(N)})^3}{2} \Gamma_{2\sigma}^{(N)} + S_{3\sigma}^{(N)} > 0 \quad (3b)$$

и  $S_{2TE,3TE}^{(N)} = 0$ ,  $S_{2TM}^{(N)} = \alpha_3 (1 + \epsilon_1 \epsilon_2^{-1}) (L_{3TM}^{(N)} + d) \Gamma_{2TM}^{(N)}$ ,  $S_{3TM}^{(N)} = \alpha_3 (1 + \epsilon_1 \epsilon_3^{-1}) \times \times L_{3TM}^{(N)} \Gamma_{2TM}^{(N)}$ , а  $\alpha_3$  — относительный скачок диэлектрической проницаемости на границе раздела,  $\alpha_3 = (\epsilon_1 - \epsilon_3) \epsilon_1^{-1}$ . Формулы показывают, что при любых возможных значениях  $\eta$  ( $1 \leq \eta < \infty$ )

$\frac{\partial \Gamma_{2\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} < 0$  и  $\frac{\partial \Gamma_{3\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} > 0$ . Таким образом, в асимметричном ПДВ (приведенная толщина фиксирована) с ростом  $\eta$  относительная доля потока мощности всех мод всегда строго монотонно увеличивается



в том крайнем слое, где диэлектрическая проницаемость больше, и всегда строго монотонно уменьшается в другом.

Производную ФОО по  $\eta$  можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \Gamma_{1\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} = -\frac{\Gamma_{2\sigma}^{(N)} L_{3\sigma}^{(N)}}{2L_{\sigma}^{(N)}} \left[ 1 + \eta (L_{2\sigma}^{(N)})^2 (1 - \Gamma_{2\sigma}^{(N)}) + (L_{3\sigma}^{(N)})^2 \Gamma_{1\sigma}^{(N)} - \right. \\ \left. - \left( \frac{d + L_{3\sigma}^{(N)}}{L_{3\sigma}^{(N)}} \right) \left( \frac{2}{\eta} + (L_{2\sigma}^{(N)})^2 (1 - \Gamma_{2\sigma}^{(N)}) \right) + F_{\sigma}^{(N)} \right], \quad (4)$$

где  $F_{TE}^{(N)} = 0$ , а

$$F_{TM}^{(N)} = 2\alpha_3 \frac{(k_{TM}^{(N)})^2}{L_{TM}^{(N)}} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right) \left( d + \frac{(\eta - 1)}{\eta} L_{2TM}^{(N)} \right) + \right. \\ \left. + \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \left( \frac{d + L_{3TM}^{(N)}}{L_{3TM}^{(N)}} \right) \left( \frac{(\eta - 1) L_{3TM}^{(N)} - d}{\eta^2} \right) \right]. \quad (5)$$

Выражение (4) не является монотонной функцией от  $\eta$ . Можно показать, что при  $\eta = 1$  величина  $\frac{\partial \Gamma_{1\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} > 0$ , а при больших значениях

$\eta - \frac{\partial \Gamma_{1\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} < 0$ , причем функция  $\frac{\partial \Gamma_{1\sigma}^{(N)}}{\partial \eta}$  имеет только одну нулевую точку. Следовательно, зависимость ФОО от  $\eta$  достигает максимума при определенном значении  $\eta$ , которое больше единицы, т. е. в асимметричном ПДВ при его заданной приведенной толщине можно получить большие значения ФОО, чем в симметричном. Хотя численные расчеты это показали [6], в общем случае данный факт аналитически доказан не был.

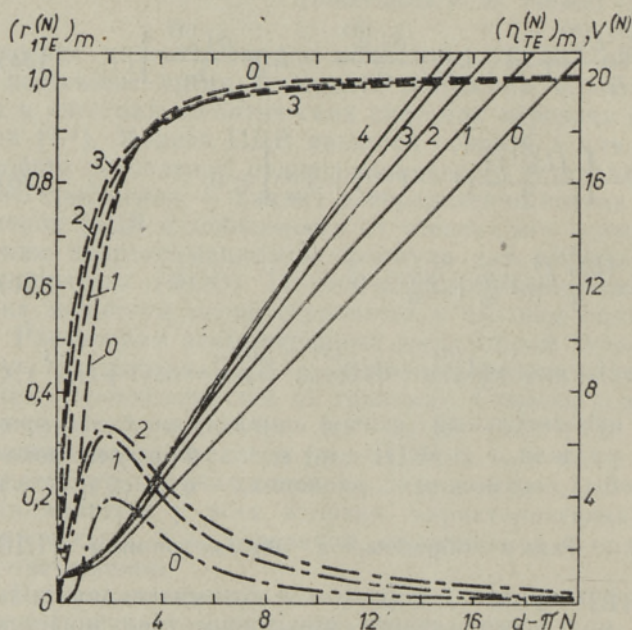


Рис. 1. Зависимость величин  $(\eta_{TE}^{(N)})_m$  (сплошные кривые),  $(\Gamma_{TE}^{(N)})_m$  (штриховые кривые) и  $V^{(N)}$  (штрих-пунктирные кривые) от приведенной толщины ПДВ. Цифры у кривых — номера мод (здесь и на рис. 2).



Уравнение  $\frac{\partial \Gamma_{1\sigma}^{(N)}}{\partial \eta} = 0$  дает значение фактора асимметрии  $(\eta_{\sigma}^{(N)})_m$ , при котором ФОО максимален. Аналитическому решению оно не поддается, но легко решается на ЭВМ. Поскольку характеристики ТЕ-мод определяются полностью фактором асимметрии  $\eta$  и приведенной толщиной  $d$ , то графики, показывающие зависимость  $(\eta_{TE}^{(N)})_m$  от  $d$ , являются универсальными (рис. 1). На рис. 1 показаны также зависимости  $(\Gamma_{1TE}^{(N)})_m$  — максимально возможного ФОО асимметричного ПДВ (при факторе асимметрии  $(\eta_{TE}^{(N)})_m$ ) и относительные разности  $V^{(N)} = ((\Gamma_{1TE}^{(N)})_m - (\Gamma_{1TE}^{(N)})_s) (\Gamma_{1TE}^{(N)})_s^{-1}$  ( $(\Gamma_{1TE}^{(N)})_s$  — ФОО симметричного волновода) в процентах от приведенной толщины  $d$  для нескольких низших ТЕ-мод. В случае нулевой ТЕ-моды максимальное увеличение ФОО при переходе от симметричного ПДВ к асимметричному получается при  $d \simeq 2$ , когда  $V^{(0)}$  составляет примерно 4%. С увеличением номера моды  $V^{(N)}$  сначала увеличивается, достигая максимального значения у второй моды, затем постепенно уменьшается и при  $N = 10$  составляет примерно 5%, причем эта зависимость по мере роста  $d$  становится более плоской. В случае ТМ-мод зависимость  $(\eta_{TM}^{(N)})_m$  от  $d$  уже теряет универсальный характер, так как возникает дополнительная зависимость от параметра  $\alpha_3$ .

Поскольку ФОО является важной характеристикой ПДВ, а формула (1) включает и характеристики моды, представляет практический интерес получить аппроксимационную формулу, выражающую ФОО только через параметры асимметричного ПДВ, как получена, например, аппроксимационная формула для основной ТЕ-моды симметричного ПДВ [7]. В [5] для ФОО асимметричных квазипредельных ( $\gamma_{3TE}^{(N)} \ll 1$ ) ТЕ-мод представлена следующая приближенная формула:

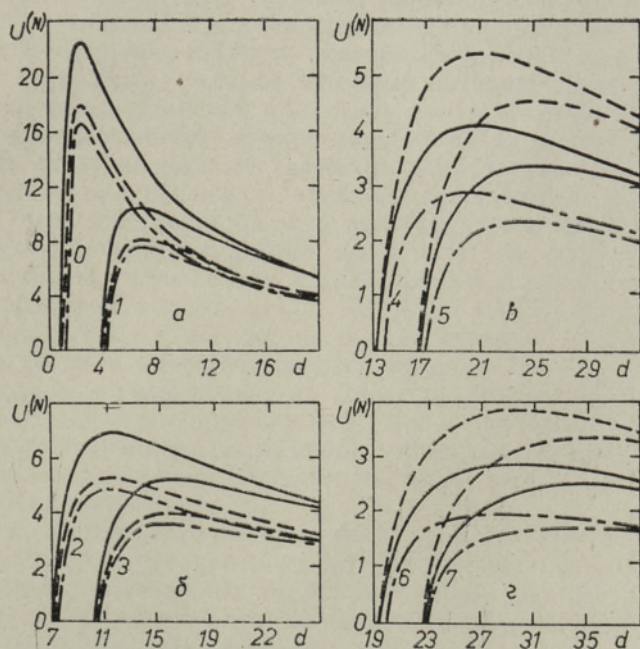


Рис. 2. Зависимость величины  $U^{(N)}$  от приведенной толщины ПДВ при четырех факторах асимметрии:  $\eta = 2$  (а —  $\varepsilon$ , сплошные кривые); 4 (а, б, штриховые кривые); 1,5 (в,  $\varepsilon$ , штриховые кривые); 10 (а —  $\varepsilon$ , штрих-пунктирные кривые).



$$(\Gamma_{1TE}^{(N)})_{\text{прибл}} \simeq [1 - L_{2c}(\eta L_h)^{-1}][1 - (1 + t_a^{(N)})^{-1/2}], \quad (6)$$

где  $L_{2c} = (\eta - 1)^{-1/2}$ ,  $L_h = d + L_{2c}$ ,  $t_a^{(N)} = 2L_h \Delta_a^{(N)}$ ,  $\Delta_a^{(N)} = d - d_a^{(N)}$  и  $d_a^{(N)} = \pi N + \arctg(L_{2c}^{-1})$ . (Физический смысл введенных величин указан в [5].) Сравнение расчетов ФОО по формулам (6) и (1) показывает, что первая из них достаточно хорошо аппроксимирует ФОО ТЕ-мод асимметричного ПДВ при любых его параметрах. На рис. 2 показаны зависимости относительной ошибки  $U^{(N)} = (\Gamma_{1TE}^{(N)} - (\Gamma_{1TE}^{(N)})_{\text{прибл}}) (\Gamma_{1TE}^{(N)})^{-1}$  от приведенной толщины при разных значениях фактора асимметрии для первых восьми ТЕ-мод (в процентах).  $U^{(N)}$  уменьшается с увеличением номера моды  $N$  и фактора асимметрии  $\eta$  при данном  $N$ . Таким образом, аппроксимационную формулу (6) можно успешно применять в случае высших ТЕ-мод сильно асимметричных (один крайний слой — воздух) планарных оптических волноводов, представляющих немалый практический интерес [1].

Автор выражает искреннюю благодарность К. К. Ребане за поддержку работы и В. Г. Федосееву за критические замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Унгер Х. Г., Планарные и волоконные оптические волноводы, М., «Мир», 1980.
2. Интегральная оптика, М., «Мир», 1978.
3. Богданкевич О. В., Дарзбек С. А., Елисеев П. Г., Полупроводниковые лазеры, М., «Наука», 1976.
4. Кейси Х., Паниш М., Лазеры на гетероструктурах. т. 1. Основные принципы, М., «Мир», 1981.
5. Федосеев В. Г., Адамсон П. В., Квант. электроника, **9**, 993—1004 (1982).
6. Елисеев П. Г., Препринт ФИАН, № 33, 1970.
7. Botez, D., IEEE J. Quant. Electron., **14**, 230—232 (1978).

Институт физики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
21/IV 1982