EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 4

УДК 517.958 : 532/.534

Т. ТОБИАС

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

T. TOBIAS. PARAMEETRITE LIGIKAUDNE MÄÄRAMINE ÜHES MITTELINEAARSES LAINELEVIMUDELIS

T. TOBIAS. APPROXIMATIVE DETERMINATION OF PARAMETERS IN CERTAIN NONLINEAR WAVE PROPAGATION MODEL

(Представил Н. Алумяэ)

Пусть $u=u(t,x;k)$ — решение уравнения

$$u_{tt}-f(k,u_x)\,u_{xx}=0,$$
$$u(0,x;k)=u_t(0,x;k)=0,\quad u_x(t,0;k)=\varphi(t),\quad \lim_{x\to\infty}u(t,x;k)=0, \tag{1}$$

где $k=(k_1,\ \dots\ ,\ k_n)\in M$, а M — ограниченное, выпуклое и замкнутое в R_n множество.

Предположим, что функция $f(k,u_x)$ такова, что существуют непрерывные $\frac{\partial u}{\partial k}$, $\frac{\partial u_x}{\partial k}$, $\frac{\partial f}{\partial k}$ и $\frac{\partial f(k,y)}{\partial y}$. Предположим еще, что если $k^{(m)}\to k$, то $u(t,x;k^{(m)})$ и его производные равномерно сходятся к $u(t,x;k)$ и его производным.

Пусть $f(k,u_x)>0$ при всех $k\in M$. Тогда уравнение (1), как уравнение гиперболического типа, является нелинейной моделью распространения волн деформации в упругой среде [1]. Часто выбирают $f(k,u_x)=1+k_1u_x+\dots+k_n(u_x)^n$ или $f(k,u_x)=[1+u_x]^{-(1+k)}$, $k>0$.

Рассмотрим т. н. обратную задачу определения параметра k по результатам наблюдений.

Пусть имеется возможность измерить деформацию в точке $x=L$, т. е. пусть

$$u_x(t,L;k)=z(t)+\varepsilon(t),\quad 0<t\leqslant T. \tag{2}$$

По известной функции $z(t)$ требуется определить неизвестный параметр $k\in M$, характеризующий свойства исследуемой среды.

Такая задача рассмотрена в [1], где выведены асимптотические формулы в предположении малых начальных деформаций.

В данном сообщении предлагается другой метод: задача определения параметра k по наблюдаемому значению $z(t)$ рассматривается как задача оптимизации, т. е. в качестве истинного значения параметра выбирается $\bar{k}$ такое, чтобы решение $u_x(t,L;k)$ наилучшим образом (в среднеквадратичном смысле) соответствовало наблюденному значению $z(t)$.

Пусть

$$J(k)=\int_0^T[u_x(t,L;k)-z(t)]^2\,dt. \tag{3}$$

Требуется определить $\bar{k}\in M$ так, чтобы $\min\limits_{k\in M}J(k)=J(\bar{k})$. Так как

M — замкнутое ограниченное множество и u_x — непрерывная по k функция, то $\bar{k}$ существует. Если $z(t)$ — точное значение деформации в точке $x = L$ (т. е. $\varepsilon(t) \equiv 0$), то $\min J(k) = 0$ и $\bar{k} = k^*$, где $k^* \in M$ — истинное значение параметра k.

Для минимизации функции $J(k)$ можно воспользоваться методом проекции градиента. Построим последовательность $\{k^{(m)}\}$ приближений по правилу

$$k^{(m+1)} = P_M(k^{(m)} - t_m \operatorname{grad} J(k^{(m)})), \qquad m = 0, 1, \ldots . \tag{4}$$

Здесь $P_M(l)$ — проекция элемента $l \in R_n$ на множество M, а величина t_m — длина шага. Условия сходимости последовательности $\{k^{(m)}\}$ к локальному минимуму функции $J(k)$ и способы выбора шага t_m можно найти, например, в [2].

Выведем формулу для вычисления градиента функции $J(k)$. Пусть $v_i = v_i(t, x; k) = \dfrac{\partial u}{\partial k_i}$ и $u^\Delta = u(t, x; k + \Delta k)$, где $k + \Delta k = (k_1 + \Delta k_1, \ldots, k_n + \Delta k_n)$. Тогда

$$(u^\Delta - u)_t - \{[f(k+\Delta k, u^\Delta_x) u^\Delta_{xx} - f(k, u^\Delta_x) u^\Delta_{xx}] +$$
$$+ [f(k, u^\Delta_x) u^\Delta_{xx} - f(k, u_x) u^\Delta_{xx}] + [f(k, u_x) u^\Delta_{xx} - f(k, u_x) u_{xx}]\} = 0.$$

Если разделить это выражение на Δk_i и устремить $\Delta k \to 0$, то получим уравнение для v_i:

$$(v_i)_t - [f(k, u_x)(v_i)_x]_x = \frac{\partial f(k, u_x)}{\partial k_i} u_{xx}, \tag{5}$$

удовлетворяющее условиям

$$v_i(0, x; k) = \frac{\partial v_i(0, x; k)}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial v_i(t, 0; k)}{\partial x} = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} v_i(t, x; k) = 0.$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial J}{\partial k_i} = 2 \int\limits_0^T [u_x(t, L; k) - z(t)] (v_i)_x(t, L; k)\, dt$. Преобразуем это выражение. Введем сопряженное к (1) уравнение для функции $p = p(t, x; k)$:

$$p_{tt} - (f(k, u_x) p_x)_x = -2[u_x - z(t)] \delta'(x - L), \tag{6}$$

$$p(T, x; k) = \frac{\partial p(T, x; k)}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial p(t, 0; k)}{\partial x} = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} p(t, x; k) = 0. \tag{7}$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция, т. е. $\int\limits_0^\infty \delta'(x - L) g(x)\, dx = -g'(L)$. Умножим обе части уравнения (6) на v_i и проинтегрируем по области $(t, x) \in D = (0, T) \times (0, \infty)$. Интегрируя по частям и учитывая краевые условия функции v_i и p, получим после преобразования, что

$$\frac{\partial J}{\partial k_i} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^T [p_{tt} - (f(k, u_x) p_x)_x] v_i\, dt\, dx =$$
$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^T [(v_i)_{tt} - (f(k, u_x)(v_i)_x)_x] p\, dt\, dx =$$
$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^T \frac{\partial f(k, u_x)}{\partial k_i} u_{xx} p\, dt\, dx.$$

Итак,

$$\operatorname{grad} J(k) = \int_0^\infty \int_0^T \operatorname{grad} f(k, u_x)\, u_{xx}(t, x; k)\, p(t, x; k)\, dt\, dx, \qquad (8)$$

где $\operatorname{grad} f(k, u_x) = \left(\frac{\partial f}{\partial k_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial k_n}\right)$.

Подобный метод вычисления градиента с помощью сопряженной системы был использован, например, в [3].

Рассмотрим два примера. Отметим, что если уравнение (1) описывает распространение волн в реальных средах, то можно априори допустить [1] (с. 43), что $|u_x| \ll 1$.

1. Пусть $f(k, u_x) = c^2(1 + ku_x)$. Тогда

$$J'(k) = c^2 \int_0^\infty \int_0^T u_x u_{xx} p\, dt\, dx,$$

где функция $p = p(t, x; k)$ удовлетворяет уравнению

$$p_{tt} - c^2 p_{xx} - kc^2 (u_x p_x)_x = -2[u_x - z(t)]\delta'(x - L)$$

с условиями (7).

2. Пусть $f(k, u_x) = c^2(1 + u_x)^{-(1+k)}$. Тогда

$$J'(k) = -c^2 \int_0^\infty \int_0^T (1 + u_x)^{-(1+k)} \ln(1 + u_x)\, u_{xx} p\, dt\, dx,$$

где функция p удовлетворяет условию $p_{tt} - c^2[(1 + u_x)^{-(1+k)} p_x]_x = -2[u_x - z(t)]\delta'(x - L)$ и условиям (7).

Из вышеизложенного видно, что вычисление градиента по точному выражению (8) — весьма трудоемкая процедура. Поэтому на практике целесообразнее, по-видимому, привлекать методы минимизации, не содержащие производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигул У. К., Нелинейная акустодиагностика, Л., «Судостроение», 1981.
2. Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., «Наука», 1980.
3. Lions, J. L., In: Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1, Springer, Berlin, 1978, p. 11—41.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/III 1982