EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1982.4.06

УДК 517.948 : 513.88

О. ВААРМАНН, Марика ЛОМП

О РАСШИРЕНИИ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ПСЕВДООБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$[F'(x)]^*F(x)=0, \tag{1}$$

где $F(x)$ — непрерывно дифференцируемый оператор, действующий из одного гильбертова пространства H_1 в другое H_2, причем обратимость оператора $F'(x)$ не обязательна. Для решения уравнения (1) можно привлекать итерационные методы, основанные на псевдообращении, или методы типа Левенберга—Марквардта, описанные, в частности, в [1,2]. Однако эти методы весьма требовательны к качеству начальных приближений. Расширить область сходимости, а иногда и ускорить сходимость методов удается введением т. н. релаксационных параметров, определяющих длину шага итерации.

В настоящей работе рассматриваются итерационные методы вида

$$x_{k+1}=x_k-\varepsilon_k A_k F(x_k), \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2}$$

где A_k аппроксимирует оператор $[F'(x_k)]^+$, ε_k — релаксационный параметр $(0<\varepsilon_k\leqslant 1)$, подчиняющийся требованиям, сформулированным в приводимых ниже теоремах.

1. Обозначим оператор ортогонального проектирования гильбертова пространства H на его подпространство L через P_L, область значений оператора $F'(x)$ — через $R(F'(x))$ и его ядро — через $N(F'(x))$. Для простоты положим $R(x)=R(F'(x))$, $P_{R(x)}=P_{R(F'(x))}$ и $P_k=P_{R(F'(x_k))}$. Здесь и далее $C, L, L_0, L_1, N', N_1, N, G, \lambda$ и Ω означают некоторые положительные константы.

Для доказательства теорем нам понадобятся две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть S — некоторый шар в H_1 и на S выполнены условия*

$$\|[F'(x)]^+\|\leqslant C \qquad \text{для всех } x\in S, \tag{3}$$

$$\|F'(x)-F'(y)\|\leqslant L_1\|x-y\| \qquad (x,y\in S), \tag{4}$$

тогда

$$\|P_{R(x)}-P_{R(y)}\|\leqslant L_0\|x-y\|. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть H — гильбертово пространство, U и V — его замкнутые подпространства, P_1 и P_2 — операторы ортогонального проектирования H на U и V соответственно, $P^{(1)}=I-P_1$ и $P^{(2)}=I-P_2$, где под I понимается единичный оператор в H. Тогда ([3], с. 195—197)

$$\|P_1-P_2\|=\max\{\sup_{x\in U,\|x\|=1}\|P^{(2)}(x)\|,\quad \sup_{x\in V,\|x\|=1}\|P^{(1)}(x)\|\}.$$

Из свойств ортопроектора следует

$$\|\bar P_{R(x)}-\bar P_{R(y)}\|=\|(\bar I-\bar P_{R(x)})-(\bar I-\bar P_{R(y)})\|=\|\bar P_{N([F'(x)]^*)}-\bar P_{N([F'(y)]^*)}\|.$$

Полагая $H_2=H$, $N([F'(x)]^*)=U$ и $N([F'(y)]^*)=V$, можем записать вектор $u\in U\subset H$ в виде $u=u_1+u_2$, где $u_1\in V=N([F'(y)]^*)$, $u_2=N([F'(y)]^*)^{\perp}=R(I-P_V)$, и

$$\sup_{u\in U,\|u\|=1}\|(I-P_V)u\|=\sup\|u_2\|=\sup_{u\in U,\|u\|=1}\|[F'(y)]^{*+}[F'(y)]^*u\|\leqslant$$
$$\leqslant C\sup_{u\in U,\|u\|=1}\|[F'(y)]^*u\|.$$

Так как $[F'(x)]^*u=0$, то

$$\sup_{u\in U,\|u\|=1}\|(I-P_V)u\|\leqslant C\sup_{u\in U,\|u\|=1}\|([F'(y)]^*-[F'(x)]^*)u\|\leqslant CL_1\|x-y\|.$$

Аналогично имеем

$$\sup_{v\in V,\|v\|=1}\|(I-P_U)v\|\leqslant CL_1\|x-y\|$$

и в качестве L_0 можем брать $L_0=CL_1$.

Замечание 1. Если выполнено условие (4) и

$$\|A_k\|\leqslant\lambda,\quad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{6}$$

то, пользуясь леммой 1, нетрудно показать, что существуют постоянные N' и N такие, что

$$\|(P_{R(y)}-P_{R(y)}P_{R(x)})F(x)\|\leqslant N'\|x-y\|\quad (x,y\in S) \tag{7}$$

или

$$\|(P_{k+1}-P_{k+1}P_k)F(x_k)\|\leqslant N_k\|P_kF(x_k)\|\leqslant N\|P_kF(x_k)\|, \tag{8}$$

где можно положить $N_k=\varepsilon_kN'\lambda$ и $N=N'\lambda$.

Лемма 2. *Если ортопроектор $P_{R(x)}$ удовлетворяет в S условию* (5) *и имеет место соотношение*

$$\|(P_{R(y)}P_{R(x)}P_{R(y)}-P_{R(y)}P_{R(x)})F(x)\|\leqslant N_2\|x-y\|^2, \tag{9}$$

то

$$\|(P_{k+1}-P_{k+1}P_k)F(x_k)\|\leqslant G(\varepsilon_k)\|P_kF(x_k)\|^2\leqslant G\|P_kF(x_k)\|^2, \tag{10}$$

где

$$G(\varepsilon)=\varepsilon\lambda L_0(1+\varepsilon\lambda L_0F)+\varepsilon^2\lambda^2N_2\quad \text{и}\quad G=G(1),\quad F=\sup_{x\in S}\|F(x)\|.$$

Доказательство. С учетом соотношения (5) и того, что $\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant\varepsilon_k\lambda\|P_kF(x_k)\|$, имеем

$$\|P_{k+1}F(x_k)\|\leqslant\|P_kF(x_k)\|+\|(P_{k+1}-P_k)F(x_k)\|\leqslant(1+\varepsilon_kL_0\lambda)\|P_kF(x_k)\|.$$

Далее

$$\|(P_{k+1}-P_{k+1}P_k)F(x_k)\|\leqslant\|P_{k+1}(P_{k+1}-P_k)P_{k+1}F(x_k)\|+$$
$$+\|(P_{k+1}P_kP_{k+1}-P_{k+1}P_k)F(x_k)\|\leqslant L_0\|x_{k+1}-x_k\|\|P_kF(x_k)\|+$$
$$+N_2\|x_{k+1}-x_k\|^2\leqslant G(\varepsilon_k)\|P_kF(x_k)\|^2\leqslant G\|P_kF(x_k)\|^2.$$

Очевидно, что в случае коммутативности $P_{R(x)}$ и $P_{R(y)}$ соотношение (9) выполняется при $N_2=0$.

2. Допустим, что $A_k=A_kP_k$, $\|A_k\|\leqslant\lambda<\infty$ и введем числовые последовательности $\{\gamma_k(\varepsilon_k)\}$, удовлетворяющие условию

$$\|P_k - \varepsilon_k F'(x_k) A_k\| \leqslant \gamma_k(\varepsilon_k), \tag{11}$$

и при $\varepsilon_k = 1$ положим $\gamma_k = \gamma_k(1)$.

Теорема 1. *Пусть* $x_0 \in H_1$, $S = \{x \in H_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ *и на* S *выполнены условия*:

1. *Оператор* $F(x)$ *дифференцируем (по Фреше).*

2. *Производная* $F'(x)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leqslant L_1 \|x - y\|.$$

3. $\delta < 1$.

4. $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_{k-1} \leqslant \varepsilon_k \leqslant \min\{1, \min \varepsilon_{k-1} \delta_{k-1}^{-1/2}\}$.

Тогда: А. *Если выполнено условие* (3), $\gamma_k \leqslant \gamma < 1$ *и* $r = \lambda \|P_0 F(x_0)\| / (1 - \delta) \leqslant \varrho$, *где* $\delta = \delta_0 = 1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0(\gamma_0 + N) + \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \lambda^2 L_1 \times \|P_0 F(x_0)\|$, *то уравнение* (1) *имеет в* S *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (2), *причем* $\|x^* - x_0\| \leqslant r_1$ *и*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1 \delta^k.$$

Б. *Если* $F(x)$ *удовлетворяет условию* (10), $\gamma \geqslant \gamma_0 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_k \geqslant \ldots \geqslant 0$, *то последовательность* (2) *сходится к* x^* *со сверхлинейной скоростью, причем*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1 \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i \qquad (k \geqslant 1),$$

где $\delta_i = 1 - \varepsilon_i + \varepsilon_i \gamma_i + \left(G + \frac{1}{2} \varepsilon_i^2 \lambda^2 L_1 \right) \|P_i F(x_i)\|$ *и* $\delta = \delta_0$.

Доказательство. Обозначим $\varphi_k(\varepsilon) = \varepsilon_k \psi_k + 1 - \varepsilon_k$, где ψ_k — вещественные числа. Если $\gamma_k \leqslant \gamma < 1$ (для всех $k = 0, 1, \ldots$), то $\varphi'_k(\varepsilon) = \gamma_k - 1 \leqslant \gamma - 1 < 0$ и, следовательно, $\varphi_k(\varepsilon)$ является убывающей функцией от ε.

С учетом того, что $\|P_k - \varepsilon_k F'(x_k) A_k\| \leqslant \varepsilon_k \|P_k - F'(x_k) A_k\| + 1 - \varepsilon_k \leqslant \varepsilon_k \gamma_k + 1 - \varepsilon_k$, в качестве $\gamma_k(\varepsilon)$ можем брать $\gamma_k(\varepsilon_k) = \varepsilon_k \gamma_k + 1 - \varepsilon_k$.

По формуле Тейлора

$$P_{k+1} F(x_{k+1}) = (P_{k+1} - P_{k+1} P_k) F(x_k) + P_{k+1} \{ (P_k - \varepsilon_k F'(x_k) A_k) F(x_k) + \\ + \varepsilon_k \int_0^1 [F'(x_k) - F'(x_k + t(x_{k+1} - x_k))] A_k F(x_k)\, dt \}. \tag{12}$$

А. На основе замечания 1 получаем, что $\|P_{k+1} F(x_{k+1})\| \leqslant \delta_k \|P_k F(x_k)\|$, где $\delta_k = \gamma_k(\varepsilon_k) + \varepsilon_k N + \frac{1}{2} \varepsilon_k^2 \lambda L_1 \|P_k F(x_k)\|$. Допустим, что $\delta_k \leqslant \delta_0$. Тогда в силу неравенств $\varepsilon_{k+1}^2 \delta_k \leqslant \varepsilon_k^2$ и $\|P_{k+1} F(x_{k+1})\| \leqslant \delta_k \|P_k F(x_k)\|$ имеем

$$\varepsilon_{k+1}^2 \lambda^2 L_1 \|P_{k+1} F(x_{k+1})\| \leqslant \varepsilon_{k+1}^2 \delta_k \lambda^2 L_1 \|P_k F(x_k)\| \leqslant \varepsilon_k^2 \lambda^2 L_1 \|P_k F(x_k)\|.$$

Полагая $\psi_k = \gamma_k + N$, из условия $\delta_0 < 1$ получаем, что $\psi_{k+1} \leqslant \psi_0 < 1$. Поэтому $\varphi_{k+1}(\varepsilon_{k+1}) \leqslant \varphi_{k+1}(\varepsilon_0) \leqslant \varphi_0(\varepsilon_0)$ и

$$\delta_{k+1} = \varphi_{k+1}(\varepsilon_{k+1}) + \frac{1}{2} \varepsilon_{k+1}^2 \lambda^2 L_1 \|P_{k+1} F(x_{k+1})\| \leqslant \ldots \leqslant \varphi_0(\varepsilon_0) + \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \lambda^2 L_1 \times \\ \times \|P_0 F(x_0)\| = \delta_0.$$

Б. Если выполнено условие (10), то с помощью (12) получим

$$\delta_k = \gamma_k(\varepsilon_k) + \left(G(\varepsilon_k) + \frac{1}{2}\varepsilon_k^2\lambda^2 L_1\right)\|P_k F(x_k)\|.$$

Здесь $\varphi_k(\varepsilon) = \gamma_k(\varepsilon)$ и поэтому

$$\gamma_{k+1}(\varepsilon_{k+1}) \leqslant \gamma_{k+1}(\varepsilon_k) = \varepsilon_k\gamma_{k+1} + 1 - \varepsilon_k \leqslant \varepsilon_k\gamma_k + 1 - \varepsilon_k = \gamma_k(\varepsilon_k).$$

Далее тем же методом индукции убеждаемся, что при $\varepsilon^2_{k+1}\delta_k \leqslant \varepsilon_k^2$ или $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ справедливы соотношения $\delta_{k+1} \leqslant \delta_k \leqslant \ldots \leqslant \delta_0$, причем $\gamma_k \to 0$ при $k \to \infty$ влечет за собой $\delta_k \to 0$.

В остальном доказательство этой теоремы повторяет с необходимыми изменениями доказательство теоремы 1 из [2].

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы 1, то условие $\delta = \delta_0 < 1$ можно в случаях А и Б переписать соответственно в виде

$$\varepsilon_0\left(\gamma_0 + N + \frac{1}{2}\varepsilon_0\lambda^2 L_1\|P_0F(x_0)\|\right) \leqslant \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_0\left[\gamma_0 + \left(G + \frac{1}{2}\varepsilon_0\lambda^2 L_1\right)\|P_0F(x_0)\|\right] < \varepsilon_0.$$

Таким образом, при $\gamma_0 + N < 1$ $(\gamma_0 + G\|P_0F(x_0)\| < 1$ (см. замечание 4)) за счет уменьшения параметра ε_0 можно добиться выполнимости условия

$$\gamma_0 + N + \frac{1}{2}\varepsilon_0\lambda^2 L_1\|P_0F(x_0)\| < 1 \qquad \left(\gamma_0 + \left(G + \frac{1}{2}\varepsilon_0\lambda^2 L_1\right)\|P_0F(x_0)\| < 1\right)$$

для любого $x_0 \in S$ и, тем самым, выполнимости условия $\delta = \delta_0 < 1$.

Замечание 3. В теореме 1 [4] при вписывании формул допущена ошибка: вместо $\|P_k - F'(x_k)A_k\| \leqslant \gamma_k$ должно быть $\|P_k - \varepsilon_k F'(x_k)A_k\| \leqslant \leqslant \gamma_k(\varepsilon_k) = \gamma_k$, как в теореме 2 [5], на которую опирается доказательство теоремы 1 из [4].

3. Пусть

$$[F'(x)]^*F'(x) = B(x), \quad B(x) + \alpha I = M(x, \alpha), \quad M(x_k, \alpha_k) = M_k, \tag{13}$$
$$M^{-1}(x, \alpha)[F'(x)]^* = L(x, \alpha).$$

Рассмотрим итерационный метод

$$x_{k+1} = x_k - \varepsilon_k A_k F(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

где $A_k = D_k[F'(x_k)]^*$ и D_k — некоторая аппроксимация оператора M_k^{-1}. Допустим, что K и $\mu_k (k = 0, 1, \ldots)$ — некоторые (ограниченные) постоянные, удовлетворяющие в S условиям

$$\|F'(x)\| \leqslant K, \quad \|I - M_k D_k\| \leqslant \mu_k,$$

и положим $\omega_k = \mu_k/\alpha_k$.

Теорема 2. *Пусть* $x_0 \in H_1$, $S = \{x \in H_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ *и на* S *выполнены условия* 1—4 *теоремы* 1.

Тогда: А. *Если выполнено условие* (3), $\alpha_k \leqslant \alpha_0$, $\omega_k \leqslant \omega_0 (\alpha_0, \omega_0 < \infty)$ *и* $r_1 = \lambda\|P_0F(x_0)\|/(1-\delta) \leqslant \varrho$, *где* $\delta = \delta_0 = 1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0(N + \alpha_0 K C^3 + \omega_0 K^2) + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2\lambda^2 L_1\|P_0F(x_0)\|$, *то уравнение* (1) *имеет в* S *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (14), *причем* $\|x^* - x_0\| \leqslant r_1$ *и*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1\delta^k.$$

Б. *Если* $F(x)$ *удовлетворяет условию* (10), $n\xi^k \leqslant \alpha_k \leqslant m\xi^k$ $(m, n < \infty)$,

$\xi<1$, $\omega_k \leqslant sl^k$, $s>0$, $l<1$, *то последовательность* (14) *сходится к* x^* *со сверхлинейной скоростью, причем*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1 \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i \qquad (k \geqslant 1),$$

где $\delta_i = (1-\varepsilon_i) + \varepsilon_i (m\xi^i K C^3 + sl^i K^2) + \left(G + \frac{1}{2} \varepsilon_i^2 \lambda^2 L_1\right) \|P_i F(x_i)\| \to 0$ *при* $i \to \infty$ *и* $\delta = \delta_0$.

Доказательство. Так как [1, 6]

$$\|L(x_k, \alpha_k)\| \leqslant \|[F'(x_k)]^+\|, \qquad \|(B_k + \alpha_k I)^{-1}\| \leqslant \alpha_k^{-1},$$

то

$$\|[F'(x_k)]^+ - L(x_k, \alpha_k)\| \leqslant \alpha_k C^3,$$

$$\|L(x_k, \alpha_k) - A_k\| \leqslant \|(B_k + \alpha_k I)^{-1} (I - M_k D_k) [F'(x_k)]^*\| \leqslant \omega_k K,$$

$$\|A_k\| = \|[F'(x_k)]^+ - L(x_k, \alpha_k) + L(x_k, \alpha_k) - A_k - [F'(x_k)]^+\| \leqslant$$

$$\leqslant C + \alpha_k C^3 + \omega_k K,$$

$$\|P_k - F'(x_k) A_k\| = \|F'(x_k) ([F'(x_k)]^+ - A_k)\| \leqslant \alpha_k K C^3 + \omega_k K^2.$$

Учитывая, что $n\xi^k \leqslant \alpha_k \leqslant m\xi^k$, в качестве λ и $\gamma_k (k = 0, 1, \ldots)$ можем брать

$$\lambda = C + mC^3 + (\mu_0/\alpha_0) K,$$

а в случаях А и Б $\gamma_k = \alpha_k K C^3 + \omega_k K^2$ и $\gamma_k = m\xi^k K C^3 + sl^k K$ соответственно. Существование постоянного K такого, что $\|F'(x)\| \leqslant K$, следует из 2-го условия теоремы, а из 3-го условия вытекает, что $\varphi_{k+1} \leqslant \varphi_0 < 1$.

Так как $\|I - M_k D_k\| \leqslant \mu_k < 1$ и $\lim\limits_{\alpha_k \to 0} M_k^{-1} [F'(x_k)]^* = [F'(x_k)]^+$, то $A_k = D_k [F'(x_k)]^*$ аппроксимирует оператор $[F'(x_k)]^+$ и, следовательно, теорема 1 применима.

При $\varepsilon_k = 1$ можно указать условия квадратичной скорости сходимости последовательности $\{x_k\}$, порождаемой методом (14) (ср. [1, 7]). Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $x_0 \in H_1$, $S = \{x \in H_1 : \|x - x_0\| \leqslant \rho\}$ *и на* S *выполнены условия* 1—3 *теоремы* 1.

Тогда: А. *Если выполнено условие* (3), $\alpha_k \leqslant \alpha_0$, $\omega_k \leqslant \omega_0$ $(\alpha_0, \omega_0 < \infty)$ *и* $r_1 = \lambda \|P_0 F(x_0)\| / (1-\delta) \leqslant \varrho$, *где* $\delta = \delta_0 = N + \alpha_0 K C^3 + \omega_0 K^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 L_1 \|P_0 F(x_0)\|$, *то уравнение* (1) *имеет в* S *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (14), *причем* $\|x^* - x_0\| \leqslant r_1$ *и*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1 \delta^k.$$

Б. *Если* $F(x)$ *удовлетворяет условию* (8), $\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\omega_0 \geqslant \ldots \geqslant \omega_k \geqslant \ldots \geqslant 0$, *то последовательность* (14) *сходится к* x^* *со сверхлинейной скоростью, причем*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1 \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i \qquad (k \geqslant 1),$$

где $\delta_i = \alpha_i K C^3 + \omega_i K^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 L \|P_0 F(x_0)\| \to 0$ *при* $i \to \infty$ *и* $\delta = \delta_0$.

В. *Если* $F(x)$ *удовлетворяет условию* (8), $\alpha_k \leqslant m \|P_k F(x_k)\|$, $\omega_k \leqslant \Omega \|P_k F(x_k)\|$, $r_2 = \lambda H_0(\delta)/d \leqslant \varrho$, *где* $H_k(\delta) = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \delta^{2^i}$, $\delta = \delta_0 =$

$=d\|P_0F(x_0)\|$ *и* $d=mKC^3+\Omega_0K^2+\frac{1}{2}L_1\lambda^2+G$, *то уравнение* (1) *имеет в* S *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (14), *причем* $\|x^*-x_0\|\leqslant r_2$ *и*

$$\|x_k-x^*\|\leqslant\lambda H_k(\delta)/d.$$

Доказательство этой теоремы с привлечением полученных здесь и в [1] результатов не представляет труда.

Замечание 4. Условия $\omega_k\leqslant\Omega_0\|P_kF(x_k)\|$ и $\alpha_k\leqslant m\|P_kF(x_k)\|$ влекут за собой условие $\mu_k=0(\|P_kF(x_k)\|^2)$. Если $R(F'(x_k))\supseteq R(F'(x_{k+1}))$, то $G=0$, в частности, при $R(F'(x))=H_2$.

4. Выведенные выше оценки скорости сходимости являются в сущности оценками погрешности методов, привлекающих для вычисления обобщенного решения псевдообращение, при условии, что не все необходимые вычисления производятся точно, а при вычислении оператора $F'(x)$ или решении соответствующих линейных уравнений может быть обеспечена лишь некоторая степень точности.

Таким образом, теоремы 1—3 дают условия сходимости и устойчивости методов, использующих псевдообращение, при возмущенных исходных операторах $F'(x)$ или $M(x,\alpha)$. Отметим еще, что полученные чисто теоретические условия относительно величины шага указывают на возможность ослабления требований к качеству начальных приближений x_0 и A_0.

Пример 1. Решить систему

$$F(x)=\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-2=0,\\ f_2(x_1,x_2)=x_1-x_2=0,\\ f_3(x_1,x_2)=x_1x_2-1=0,\end{cases}$$

имеющую нулевые точки (1,1) и (—1, —1).

Пример 2. Решить систему

$$F(x)=\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-2=0,\\ f_2(x_1,x_2)=(x_1-2)^2+x_2^2-2=0,\\ f_3(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+x_2^2-9=0,\end{cases}$$

имеющую $\min\limits_x \sum\limits_{i=1}^{3} f_i^2=42{,}6666$ в точке $(1;\ \pm1{,}914854)$.

Пример 3. Решить систему

$$f_i(x_1,x_2)=y_i-x_1-x_2s_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ 25.$$

Пример 4. Решить систему

$$f_i(x_1,x_2)=y_i-x_1s_i^2,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ 25.$$

Пример 5. Решить систему

$$f_i(x_1,x_2)=y_i-x_1\,e^{x_2s_i},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ 25.$$

Данные для y_i и s_i в примерах 3—5 заимствованы из [8].

Для решения этих систем используем итерационный метод вида

$$x_{k+1}=x_k-\varepsilon_kA_kF(x_k),$$

где

$$A_k=[B(x_k)+\alpha_kI]^{-1}[F'(x_k)]^*,\qquad B(x_k)=[F'(x_k)]^*F'(x_k),$$

α_k — последовательность положительных чисел, причем $\alpha_k\to0$ при $k\to\infty$.

Пронумеруем итерационные процессы в следующем порядке:

1. $\varepsilon_k=1$, $\alpha_k=0$, $\kappa=0, 1, 2, \ldots$.

2. $\varepsilon_k=1$, $\alpha_k=\xi\sum_0$, $0<\xi<1$, $\kappa=0, 1, 2, \ldots$, где $\sum_k=\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}^{(k)}|$, а $b_{ij}, i, j = 1, \ldots, n,$ — элементы матрицы $B(x_k)$. Здесь $\xi = 0{,}001$.

3. $\varepsilon_k = 1$, $\alpha_k = \xi \cdot \Sigma_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

4. $\varepsilon_k = 1$, α_k выбираем, как в [9].

5. $\alpha_k = 0$ и ε_k выбираем, как в [10].

Вычисления заканчиваем, если

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant\varepsilon_1=0{,}000\,001$$

и

$$\left|\sum_{i=1}^{m}(f_i^2(x_{k+1})-f_i^2(x_k))\right|\leqslant\varepsilon_2=0{,}0001.$$

Приведем таблицу числа итераций, необходимых для достижения заданной точности при использовании различных методов.

Примеры и исходные данные	Методы				
	1	2	3	4	5
1. $x_1^0 = 3{,}0$ $x_2^0 = 2{,}0$	6	6	6	5	2
2. $x_1^0 = 10$ $x_2^0 = 20$	8	18	8	23	6
3. $x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 1$	13	33	18	7	5
4. $x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 1$	15	59	47	17	—
5. $x_1^0 = 1$ $x_2^0 = 1$	48	260	80	23	—

ЛИТЕРАТУРА

1. Vaarmann, O., ENSV TA Toim., Füüs. Matem., **29**, № 3, 233—240 (1980).
2. Ваарманн О., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, № 3, 265—274 (1970).
3. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений, М., «Наука», 1969.
4. Ваарманн О., Тельгмаа М., В кн.: II симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации, Хаапсалу, 4—7 июня 1981 г., Доклады и сообщения, **1**, Таллин, «Валгус», 1981, с. 84—85.
5. Ваарманн О., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **17**, № 4, 379—390 (1968).
6. Мелешко В. И., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **17**, № 5, 1132—1143 (1977).
7. Dennis, G. E. jun., In: The State of the Art in Numerical Analysis (ed. Jacobs, D.), Academic Press, London—New York—San Francisco, 1977, p. 269—306.
8. Петерсен И., Кукс Я. и др., Прикладные программы по математической статистике для ЭВМ «Минск-32», Таллин, 1977.
9. Bus, J. C. P., von Domselaar, B., Kok, J., Math. Cent. Afd. Num. Wisk., **17**, 1—42 (1975).
10. Simmons, D. M., Nonlinear Programming for Operations Research, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/II 1982

O. VAARMANN, Marika LOMP

PSEUDOPÖÖRDOPERAATORI APROKSIMEERIMISEL PÕHINEVATE ITERATSIOONIMEETODITE KOONDUVUSPIIRKONNA LAIENDAMINE

Levinumaid võtteid laiendada mingi iteratsioonimeetodi koonduvuspiirkonda, aga mõnikord ka selleks, et kiirendada vaadeldava meetodiga defineeritud lähislahendite koonduvust, on iteratsioonisammu pikkust reguleerivate nn. relaksatsiooniparameetrite sissetoomine iteratsioonivalemisse. Käesolevas töös (teoreem 1) on esitatud tingimused, mida peavad rahuldama relaksatsiooniparameetrid ε_k, et iteratsioonivalemid, mis põhinevad pseudopöördoperaatori aproksimeerimisel, annaksid koonduva lähislahendite jada halvema alglähendi x_0 puhul, võrreldes juhuga. kui neis valemites $\varepsilon_k=1$.

Olenevalt tingimustest, mida peab rahuldama operaator $F(x)$, on saadud kas lineaarne või superlineaarne lähislahendite jada koonduvuskiiruse hinnang. Teoreemist 1 järeldub lihtsalt teoreem 2, milles on toodud Levenberg-Marquardti tüüpi meetoditega määratud lähislahendite jada koonduvuse tingimused ja hinnangud selle koonduvuskiiruse kohta. Teoreetiliste väidete illustreerimiseks on lahendatud 5 näiteülesannet.

O. VAARMANN, Marika LOMP

ON ENLARGING THE DOMAIN OF CONVERGENCE OF ITERATIVE METHODS WITH APPROXIMATION PSEUDOINVERSE OPERATOR

The problem is to solve an equation $F(x)=0$ (1) or to minimize the functional $\varphi(x)=\|F(x)\|^2$ (2), where $F(x)$ is a continuously Frechet differentiable operator from one Hilbert space, H_1, into another Hilbert space, H_2, and such that $F'(x)$ has the closed range, while $F'(x)$ need not be invertible. For finding a solution to this problem, methods based on solving the normal equation $[F'(x)]^*F(x)=0$ (3) can be employed. In the present paper, particularly, iterative methods of the form $x_{k+1}=x_k-\varepsilon_k A_k F(x_k)$ $(k=0, 1, \ldots)$ (4), where A_k is an approximation to $[F'(x_k)]^+$ and ε_k is a real value parameter suitably chosen in the interval [0.1] to guarantee the convergence of (4) from a poor starting point x_0, are considered. This is a common strategy for enlarging the domain of convergence and sometimes also for convergence acceleration. Before deriving the main results of this paper which are stated in Theoremes 1—3, several properties of the ortoprojectors associated with the pseudoinverses in Hilbert space are established. It is proved (Theorem 1) if parameters ε_k are subject to certain constraints, $F'(x)$ satisfies a Lipschitz condition and has the uniformly bounded pseudoinverse and certain additional (reasonable) assumptions are fulfilled in a certain bounded region S of H_1, then, with the help of the formula (4), it is possible to construct a sequence of approximations that converges to a solution $x^*\in S$ of the equation (3). Sometimes it is true, starting from an arbitrary $x_0\in S$. The rapidity of convergence is estimated, in the general case by $\|x_k-x^*\|\leqslant r_1\delta^k$, where r_1 is a positive constant and $\delta\in[0,1)$ or by $\|x_k-x^*\|\leqslant r_1\prod_{i=0}^{k}\delta_i$, where $\delta_i\to 0$ in the limit as $i\to\infty$ if $F'(x)$ satisfies the condition (8). Theorem 1, as applied to investigate the convergence of Levenberg-Marquardt-type methods, yields Theorem 2. Especially in the case of $\varepsilon_k=1$ $(k=0, 1, \ldots)$ from Theorem 2 and Theorem 1 [1] one gets Theorem 3. Finally, for illustrative purposes of above methods (4), five sample problems have been solved.