EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1982.4.05

УДК 517.51 : 519.64

П. УБА

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

(Представил А. Хумал)

В [1, 2] указаны достаточные ограничения на сетки, при которых последовательность интерполяционных кубических сплайнов дефекта 1 сходится к интерполируемой функции. При интерполяции непрерывных функций, производные которых имеют на концах отрезка особенности, целесообразно привлекать сильно неравномерные сетки, не удовлетворяющие условиям [1, 2]. В настоящей статье показывается сходимость и устанавливается скорость сходимости рассматриваемых сплайнов на таких сетках. Результаты прилагаются к решению интегральных уравнений со слабо особым ядром сплайн-коллокационным методом.

1. Построим интерполяционный сплайн в соответствии с принципами, подробно изложенными в [1] (см. гл. II и III). Пусть на $[a,b]$ задано разбиение $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Длину отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ обозначим через h_i, причем $\bar{h}=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} h_i$ и $\underline{h}=\min\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} h_i$. Множество k раз $(k\geqslant 0)$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций обозначим через $C^k[a,b]$ ($C^0[a,b]$ более коротко — через C).

Функция $S_\Delta(x)$ называется кубическим сплайном дефекта 1 на сетке Δ, если на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ она является кубическим многочленом и если $S_\Delta\in C^2[a,b]$. Пространство всех кубических сплайнов S_Δ с нормой $\|S_\Delta\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|S_\Delta(t)|$ обозначим через $\mathbf{S}_\Delta$.

Пусть на сетке Δ заданы значения $f_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ некоторой функции f. Интерполяционным сплайном $S(x;f)$ (или $S_\Delta(x;f)$) называется кубический сплайн, удовлетворяющий условиям $S(x_i;f)=f_i$, $i=0,1,\ldots,n$.

Введем обозначения $m_i=S'(x_i;f)$ и определим $S(x;f)$ на частичном отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ в виде

$$S(x;f)=f_i(1-\theta)^2(1+2\theta)+f_{i+1}\theta^2(3-2\theta)+m_ih_i\theta(1-\theta)^2-\\-m_{i+1}h_i\theta^2(1-\theta), \tag{1}$$

где $\theta=(x-x_i)/h_i$, $\theta\in[0,1]$. Такой сплайн непрерывен вместе со своей первой производной всюду на отрезке $[a,b]$. Условия непрерывности второй производной $S''(x_i+0;f)=S''(x_i-0;f)$ в точках x_i $(i=1,\ldots,n-1)$ принимают вид

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=3(\mu_i(f_{i+1}-f_i)/h_i+\lambda_i(f_i-f_{i-1})/h_{i-1}), \tag{2}$$

где $\mu_i=h_{i-1}/(h_{i-1}+h_i)$ и $\lambda_i=1-\mu_i$.

Обозначим правые части равенства (2) через g_i. Чтобы определить сплайн однозначно, нам понадобятся еще два краевых условия. Примем их в виде

$$S'''(x_j+0;f)=S'''(x_j-0;f),\quad j=1,\ n-1, \tag{3}$$

откуда следуют равенства

$$m_0+(1-\gamma_0^2)m_1-\gamma_0^2 m_2=2((f_1-f_0)/h_0-\gamma_0^2(f_2-f_1)/h_1),$$
$$-\gamma_n^2 m_{n-2}+(1-\gamma_n^2)m_{n-1}+m_n=2((f_n-f_{n-1})/h_{n-1}- \qquad (4)$$
$$-\gamma_n^2(f_{n-1}-f_{n-2})/h_{n-2}),$$

где $\gamma_0=h_0/h_1$ и $\gamma_n=h_{n-1}/h_{n-2}$.

Исключив неизвестные m_0 и m_n из (4) и системы (2), придем к системе линейных уравнений относительно $m_i(i=1, \ldots, n-1)$:

$$(1+\gamma_0)m_1+\gamma_0 m_2=g_1^*,$$
$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i, \quad i=2, \ldots, n-2, \qquad (5)$$
$$\gamma_n m_{n-2}+(1+\gamma_n)m_{n-1}=g_{n-1}^*,$$

где $g_1^*=g_1/3+2\gamma_0(f_2-f_1)/h_1$ и $g_{n-1}^*=g_{n-1}/3+2\gamma_n(f_{n-1}-f_{n-2})/h_{n-2}$.

Матрица системы (5) обладает доминирующей главной диагональю, следовательно, для $f(x)$ найдется и притом единственный интерполяционный кубический сплайн $S(x;f)$, удовлетворяющий краевым условиям (3).

2. Для упрощения некоторых записей рассмотрим отрезок $[0, b]$. Введем следующее разбиение Δ^r:

$$x_i=(b/2)(i/n)^r(i=0, 1, \ldots, n), \quad x_{n+i}=b-t_{n-i} \quad (i=1, \ldots, n), \qquad (6)$$

где $r\in R$, $r\geqslant 1$ характеризует степень неравномерности сетки. Точки x_i расположены симметрично относительно середины отрезка, причем при $r>1$ гуще к концам.

Разбиения такого типа используются для интерполяции функций, производные которых имеют логарифмические или степенные особенности на концах отрезка (см., напр., [3–5]). Из [4, 5] следует, что при интерполяции кусочно-кубическими полиномами полезно выбирать $r=4$, если функция $f(x)$ имеет логарифмическую особенность $(|f(x)|\leqslant c(|x\ln x|+|(b-x)\ln(b-x)|))$, и $r=4/(1-\alpha)$, если эта функция наделена степенной особенностью $(|f(x)|\leqslant c(x^{1-\alpha}+(b-x)^{1-\alpha})$, $0<\alpha<1)$. Ясно, что $\bar{h}=(b/2)(1-((n-1)/n)^r)$ и $\underline{h}=(b/2)(1/n)^r$, откуда $\bar{h}/\underline{h}=O(n^{r-1})$. Обозначим $\varrho_i=h_i/h_{i-1}$. На сетке (6) эта величина зависит не от n, а только от i и r:

$$\varrho_i=((i+1)^r-i^r)/(i^r-(i-1)^r). \qquad (7)$$

Хорошо известным достаточным условием сходимости интерполяционного процесса для непрерывных функций является неравенство

$$\bar{h}/\underline{h}\leqslant c<\infty \text{ при } \bar{h}\to 0.$$

В [1, 2] показано, что условие

$$\max_{|i-j|=1} h_i/h_j<\varrho^*, \quad \varrho^*=(3+\sqrt{5})/2\approx 2{,}618 \qquad (8)$$

не только достаточно, но и в некотором смысле необходимо для сходимости интерполяционного процесса. А именно, если последовательность сеток такова, что с ростом n растет число тех i, для которых (8) нарушается, то, как это следует из [1, 2], интерполяционный процесс может разойтись. На сетке Δ^r при $r>\ln(5+\sqrt{5})/\ln 2-1$ условие (8) нарушено: при $r=4$ имеем $\rho_1=15$; $\rho_2=4{,}4$; $\varrho_3>2{,}68$; $\varrho_4<2{,}12$. Но число тех i, которые не подчиняются этому условию, ограничено (см.

(7)). Поэтому, следуя некоторым идеям [1], нам удается доказать сходимость интерполяционного процесса на сетке (6).

3. Введем обозначения $\omega_i(f)=\max\limits_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x')-f(x'')|$ и $\omega(f)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant 2n-1}\omega_i(f)$ (модуль непрерывности).

Теорема 1. *Если $f\in C[0,b]$, то для интерполяционного сплайна*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant b}|S_{\Delta^r}(x;f)-f(x)|\leqslant M\omega(f),$$

где M не зависит от n.

Доказательство. Дополним сетку узлами x_0-jh_0, x_n+jh_{2n-1}, $j=1, 2, \ldots, k$, где k определяется позже. Перейдя в системе (5) к неизвестным $z_i=m_i(h_{i-k}h_{i-k+1}\ldots h_{i+k-1})^{1/(2k)}$, получим равенства

$$\begin{aligned}
&(1+\gamma_0)z_1+\gamma_0(h_{1-k}/h_{1+k})^{1/(2k)}z_2=g_1^*(h_{1-k}\ldots h_k)^{1/(2k)},\\
&\lambda_i(h_{i+k-1}/h_{i-k-1})^{1/(2k)}z_{i-1}+2z_i+\mu_i(h_{i-k}/h_{i+k})^{1/(2k)}z_{i+1}=\\
&\qquad=g_i(h_{i-k}\ldots h_{i+k-1})^{1/(2k)},\qquad i=2,\ \ldots,\ 2n-2,\\
&\gamma_n(h_{2n+k-2}/h_{2n-k-2})^{1/(2k)}z_{2n-2}+(1+\gamma_n)z_{2n-1}=\\
&\qquad=g_{2n-1}^*(h_{2n-k-1}\ldots h_{2n+k-2})^{1/(2k)},
\end{aligned}\tag{9}$$

правые части которых обозначим через $\tilde{g}_i(i=1, \ldots, 2n-1)$. Поскольку сетка симметрична, а следовательно, и симметрична матрица системы (9), ограничимся рассуждениями только для $i=1, \ldots, n$. Введем обозначения $d_1=1+\gamma_0-\gamma_0(h_{1-k}/h_{1+k})^{1/(2k)}$, $d_i=2-\lambda_i(h_{i+k-1}/h_{i-k-1})^{1/(2k)}-\mu_i(h_{i-k}/h_{i+k})^{1/(2k)}$ $(i=2, \ldots, n)$. Так как на сетке (6) $\gamma_0\leqslant 1$ и $h_{1-k}\leqslant h_{1+k}$, то доминирует или нет главная диагональ в матрице системы (9), зависит от значений d_i, $i=2, \ldots, n$. Очевидно, что $\lambda_i\geqslant 0{,}5$ и $\lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i=0{,}5$, а $\mu_i\leqslant 0{,}5$ и $\lim\limits_{i\to\infty}\mu_i=0{,}5$. На сетке Δ^r при фиксированном k имеем $\lim\limits_{i\to\infty}h_{i-k}/h_{i+k}=1$ и $\lim\limits_{i\to\infty}h_{i+k-1}/h_{i-k-1}=1$. Отсюда $\lim\limits_{i\to\infty}d_i=1$. Понятно, что $\lambda_i(i=2, \ldots, n)$ принимает максимальное значение при $i=2$, а выражение $(h_{i+k-1}/h_{i-k-1})^{1/(2k)}$ — при $i=k+1$. Легко видеть, что вычитаемое $\mu_i(h_{i-k}/h_{i+k})^{1/(2k)}\leqslant 0{,}5$ $(i=2, \ldots, n)$, следовательно, матрица системы (9) обладает доминирующей главной диагональю, во всяком случае при условии

$$d:=2-\lambda_2(h_{2k}/h_0)^{1/(2k)}-0{,}5>0.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty}(h_{2k}/h_0)^{1/(2k)}=1$, то найдется k_0, начиная с которого $d_i\geqslant d>0$.

Оценим свободный член исходя из неравенства (см. [1], с. 103)

$$(h_{i-k}\ldots h_{i+k-1})^{1/(2k)}/h_i\leqslant\varrho^{k/2},\quad (h_{i-k}\ldots h_{i+k-1})^{1/(2k)}/h_{i-1}\leqslant\varrho^{k/2},\tag{10}$$

где

$$\varrho=\max_{|i-j|=1}h_i/h_j.\tag{11}$$

Учитывая (2), (5) и (9), получаем для $i=2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
&|\tilde{g}_i|\leqslant 3(\mu_i/h_i+\lambda_i/h_{i-1})(h_{i-k}\ldots h_{i+k-1})^{1/(2k)}\omega(f)\leqslant 3\varrho^{k/2}\omega(f),\\
&|\tilde{g}_1|\leqslant(|g_1|/3+2\gamma_0|f_2-f_1|/h_1)(h_{1-k}\ldots h_k)^{1/(2k)}\leqslant\\
&\leqslant(\mu_1/h_1+\lambda_1/h_0+2\gamma_0/h_1)(h_{1-k}\ldots h_k)^{1/(2k)}\omega(f)\leqslant 3\varrho^{k/2}\omega(f).
\end{aligned}$$

Далее, оценка решения z_i системы с доминирующей главной диагональю известна: $|z_i| \leqslant \max_{1 \leqslant l \leqslant 2n-1} |\tilde{g}_l|/d$. Отсюда приходим к оценке

$$|z_i| \leqslant 3\varrho^{k/2}\omega(f)/d = M_1\omega(f). \tag{12}$$

Отдельно оценим z_0. Из (4) следует, что

$$z_0/(h_{-k}\ldots h_{k-1})^{1/(2k)} + (1-\gamma_0^2)z_1/(h_{-k+1}\ldots h_k)^{1/(2k)} -$$

$$-\gamma_0^2 z_2/(h_{2-k}\ldots h_{k+1})^{1/(2k)} \leqslant 2(1/h_0 - \gamma_0^2/h_1)\omega(f),$$

откуда

$$|z_0| \leqslant \max\{|z_1|, |z_2|\}((1-\gamma_0^2)(h_{-k}/h_k)^{1/(2k)} + \gamma_0^2(h_{-k}h_{-k+1}/(h_k h_{k+1})^{1/(2k)}) +$$

$$+2(1/h_0 - \gamma_0^2/h_1)\omega(f)(h_{-k}\ldots h_{k-1})^{1/(2k)} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{|z_1|, |z_2|\} + 2(1-\gamma_0^2)\varrho^{k/2}\omega(f) = M_0\omega(f).$$

Доказательство завершаем переходом к первоначальным неизвестным, учитывая (10) и (11):

$$|m_i| = |z_i|/(h_{i-k}\ldots h_{i+k-1})^{1/(2k)} \leqslant |z_i|\varrho^{k/2}/h_i.$$

Аналогично получаем оценку

$$|m_{i+1}| \leqslant |z_{i+1}|\varrho^{k/2}/h_i.$$

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ для интерполирующего кубического сплайна справедливо неравенство (см. [1], с. 102)

$$|S(x;f) - f(x)| \leqslant \omega_i(f) + h_i \max\{|m_i|, |m_{i+1}|\}/4,$$

откуда

$$|S(x;f) - f(x)| \leqslant \omega(f) + \max\{|z_i|, |z_{i+1}|\}\varrho^{k/2}/4 \leqslant$$

$$\leqslant (1 + (3\varrho^{k/2}/d + 2\varrho^{k/2})\varrho^{k/2}/4)\omega(f) \leqslant M\omega(f),$$

где M не зависит ни от i, ни от n; следовательно, неравенство справедливо для отрезка $[a, b]$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Пусть P_n — оператор в пространстве C, сопоставляющий любой непрерывной $f(x)$ ее интерполянт $S_{\Delta^r}(x;f)$. По принципу равномерной ограниченности последовательность операторов $\{P_n\}$ равномерно ограничена.

Замечание 2. С помощью ЭВМ были определены значения k_0 для следующих r:

$r=$	3	4	5	6	7	8
$k_0=$	3	4	7	9	12	16

Константы же M_1 и M_0 были вычислены по более точным формулам. Например, при $r=4$ и $k_0=4$ по оценке (12) получили $d_2 > 0{,}088$ и $|z_i| < 7800\,\omega(f)$ $(i = 1, \ldots, n)$, тогда как точные формулы дали при минимально допустимых k_0 следующие значения констант M_1 и M_0:

$r=$	3	4	5	6	7	8
$M_1=$	7,1	41	48	576	1909	3361
$M_0=$	8,4	29	61	401	1502	5136

Замечание 3. При численном апробировании для интерполяции функции $f(x) = x\ln x$ на отрезке $[0, 1]$ с разными n были использо-

ваны базисные B-сплайны (см. [1], с. 139), а для сравнения — кусочно-кубические полиномы класса C (ср. с [5]). Оказалось, что при равном числе точек интерполяции метод B-сплайнов доставлял на одну правильную значащую цифру больше. Ниже приведены максимальные ошибки, полученные при $r=4$; отметим еще, что все они достигались на частичном отрезке $[x_3, x_4]$:

$n=$	4	11	22	80
ошибка $=$	$0{,}15\cdot10^{-1}$	$0{,}5\cdot10^{-3}$	$0{,}3\cdot10^{-4}$	$0{,}4\cdot10^{-6}$

4. Пусть функция $f\in C[0,b]\cap C^4(0,b)$ и удовлетворяет условию

$$|f^{(4)}(x)|\leqslant M(x^{-\alpha-3}+(b-x)^{-\alpha-3}),\quad M=\text{const},\quad 0\leqslant\alpha<1. \tag{13}$$

Этому условию удовлетворяют функции, имеющие логарифмические или степенные особенности на концах отрезка.

Построим для такой $f(x)$ интерполяционный кубический сплайн $S_{\Delta^r}(x;f)$ в виде (1), где $r=4/(1-\alpha)$. На частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ справедливы равенства (см. также [1]):

$$\begin{aligned} S'(x;f)&=6(\theta^2-\theta)(f_i-f_{i+1})/h_i+m_i(1-4\theta+3\theta^2)-m_{i+1}(2\theta-3\theta^2),\\ S''(x;f)&=6(2\theta-1)(f_i-f_{i+1})/h_i^2+m_i(6\theta-4)/h_i+m_{i+1}(6\theta-2)/h_i,\\ S'''(x;f)&=12(f_i-f_{i+1})/h_i^3+6(m_i+m_{i+1})/h_i^2, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\theta=(x-x_i)/h_i$, $\theta\in[0,1]$.

В дальнейшем будем использовать обозначения $f_i^{(k)}=f^{(k)}(x_i)$, $\delta_i=m_i-f'_i$ ($k=1, 2, 3, 4$; $i=1, \ldots, 2n-1$), разложения

$$\begin{aligned} f(x)&=f_i+f'_i(x-x_i)+f''_i(x-x_i)^2/2+f'''_i(x-x_i)^3/3!+f^{(4)}(\eta)(x-x_i)^4/4!, \quad \eta\in[x_i,x];\\ f(x)&=f_1+f'_1(x-x_1)+f''_1\frac{(x-x_1)^2}{2}+f'''_1\frac{(x-x_1)^3}{3!}-\frac{1}{3!}\int_x^{x_1}(x-y)^3f^{(4)}(y)\,dy, \quad x\in[0,x_1];\\ f'(x)&=f'_i+f''_i(x-x_i)+f'''_i(x-x_i)^2/2+f^{(4)}(\eta_1)(x-x_i)^3/3!, \quad \eta_1\in[x_i,x];\\ f'(x)&=f'_1+f''_1(x-x_1)+f'''_1\frac{(x-x_1)^2}{2}-\frac{1}{2}\int_x^{x_1}(x-y)^2f^{(4)}(y)\,dy, \quad x\in[0,x_1]; \end{aligned} \tag{15}$$

и аналогичные разложения для $f''(x)$ и $f'''(x)$.

Теорема 2. *Пусть* $f\in C[0,b]\cap C^4(0,b)$ *и удовлетворяет условию* (13). *Тогда при* $r=4/(1-\alpha)$ *для интерполяционного кубического сплайна справедливы оценки*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant b}((b-x)x)^{j(3+\alpha)/4}|S^{(j)}_{\Delta^r}(x;f)-f^{(j)}(x)|\leqslant c\mu(f)n^{-4+j},\quad j=0,1,2,3, \tag{16}$$

где $\mu(f)$ *— наименьшая постоянная* M *в неравенстве* (13), *а постоянная* c *не зависит от* n *и* f.

Учитывая симметричность сетки Δ^r и условия (13), проведем доказательство только для первой половины отрезка $[0,b]$.

С помощью (1), (14) и разложений (15) после несложных преобразований получим на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ следующие равенства:

$$S(x;f)-f(x)=\delta_i h_i \theta(1-\theta)^2+\delta_{i+1}h_i\theta^2(1-\theta)+(3\theta^2-2\theta^3)h_i^4 f^{(4)}(\eta)/4!-$$
$$-\theta^4 h_i^4 f^{(4)}(\zeta)/4!-\theta^2(1-\theta)h_i^4 f^{(4)}(\eta_1)/3!, \qquad (17)$$

$$S'(x;f)-f'(x)=\delta_i(1-4\theta+3\theta^2)-\delta_{i+1}(2\theta-3\theta^2)-$$
$$-6(\theta^2-\theta)h_i^3 f^{(4)}(\eta)/4!-\theta^3 h_i^3 f^{(4)}(\zeta_1)/3!-(2\theta-3\theta^2)h_i^3 f^{(4)}(\eta_1)/3!, \qquad (17')$$

$$S''(x;f)-f''(x)=\delta_i(6\theta-4)/h_i+\delta_{i+1}(6\theta-2)/h_i-6(2\theta-1)h_i^2 f^{(4)}(\eta)/4!-$$
$$-\theta^2 h_i^2 f^{(4)}(\zeta_2)/2+(6\theta-2)h_i^2 f^{(4)}(\eta_1)/3!, \qquad (17'')$$

$$S'''(x;f)-f'''(x)=6(\delta_i+\delta_{i+1})/h_i^2-f^{(4)}(\eta)h_i-\theta h_i f^{(4)}(\zeta_3)+h_i f^{(4)}(\eta_1), \qquad (17''')$$

где $\eta, \eta_1 \in [x_i, x_{i+1}]$, $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in [x_i, x]$. Используя первое из равенств (4) и разложений (15), можем представить величину m_0 в виде

$$m_0=f'_1-h_0 f''_1+\frac{h_0^2}{2}f'''_1-(1-\gamma_0^2)\delta_1+\gamma_0^2\delta_2-$$
$$-\frac{1}{3h_0}\int_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy-\frac{\gamma_0^2 h_1^3}{4!}f^{(4)}(\eta)+\frac{\gamma_0^2 h_1^3}{3!}f^{(4)}(\eta_1), \qquad (18)$$

где $\eta, \eta_1 \in [x_1, x_2]$. Отсюда с помощью (15) получим на отрезке $[0, x_1]$ следующие равенства

$$S(x;f)-f(x)=\delta_1 h_0(1-\theta)\theta(\gamma_0^2-\gamma_0^2\theta-1)+\gamma_0^2 h_0\delta_2+$$
$$+\frac{1-3\theta^2+2\theta^3}{3!}\int_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy+\frac{1}{3!}\int_x^{x_1}(x-y)^3 f^{(4)}(y)\,dy-$$
$$-(1-\theta)^2\theta\left(\frac{1}{3}\int_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy+\frac{\gamma_0^2 h_1^3 h_0}{4!}f^{(4)}(\eta)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_0^2 h_1^3 h_0}{3!}f^{(4)}(\eta_1)\right), \qquad (19)$$

$$S'(x;f)-f'(x)=\frac{1}{2}\int_x^{x_1}(x-y)^2 f^{(4)}(y)\,dy+\frac{\theta^2-\theta}{h_0}\int_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy-$$
$$-\delta_1(2\theta-3\theta^2)+(1-4\theta+3\theta^2)\left(\gamma_0^2\delta_2-(1-\gamma_0^2)\delta_1-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3h_0}\int_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy-\frac{\gamma_0^2 h_1^3}{4!}f^{(4)}(\eta)+\frac{\gamma_0^2 h_1^3}{3!}f^{(4)}(\eta_1)\right), \qquad (19')$$

$$S''(x;f)-f''(x)=\int_x^{x_1}(x-y)f^{(4)}(y)\,dy+\frac{2\theta-1}{h_0^2}\int_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy+$$

$$+\frac{2-\gamma_0^2(6\theta-4)}{h_0}\delta_1+\frac{\gamma_0^2(6\theta-4)}{h_0}\delta_2-$$

$$-\frac{6\theta-4}{h_0}\left(\frac{1}{3h_0}\int\limits_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy+\frac{\gamma_0^2 h_1^3}{4!}f^{(4)}(\eta)-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma_0^2 h_1^3}{3!}f^{(4)}(\eta_1)\right), \qquad (19'')$$

$$S'''(x;f)-f'''(x)=\int\limits_x^{x_1} f^{(4)}(y)\,dy+6\gamma_0^2\left(\frac{\delta_1}{h_0^2}+\frac{\delta_2}{h_0^2}\right)-$$

$$-\frac{\gamma_0^2 h_1^3}{2h_0^2}f^{(4)}(\eta)+\frac{\gamma_0^2 h_1^3}{h_0^2}f^{(4)}(\eta_1), \qquad (19''')$$

где $\eta, \eta_1 \in [x_1, x_2]$.

Приступим к доказательству утверждения (16) при $j=0$. Поскольку $\theta\in[0, 1]$, а на сетке Δ^r справедливо $h_{i+1}\leqslant\rho h_i$, то в (17) достаточно оценить $|\delta_i h_i|$ и $|f^4(\eta)h_i^4|$, а в (19) еще выражения $\left|\int\limits_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy\right|$ и $\left|\int\limits_x^{x_1}(x-y)^3 f^{(4)}(y)\,dy\right|$. Начнем с последнего. С учетом равенства (6) и неравенства (13) запишем оценку

$$\left|\int\limits_x^{x_1}(x-y)^3 f^{(4)}(y)\,dy\right|\leqslant cM\left|\int\limits_x^{x_1}(x-y)^3 y^{-3-\alpha}\,dy\right|\leqslant c_1 Mn^{-4}; \qquad (20)$$

здесь и ниже символами c, c_1, c_2, ... обозначены разные константы, независимые от n, f и i. Величина $\left|\int\limits_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy\right|$ оценивается аналогично. Далее,

$$|f^{(4)}(\eta)h_i^4|\leqslant cM\eta^{-3-\alpha}h_i^4\leqslant c_1 M(i/n)^{(-12-4\alpha)/(1-\alpha)}(((i+1)/n)^r-(i/n)^r)^4\leqslant$$

$$\leqslant c_2 Mn^{(-16+12-4\alpha)/(1-\alpha)}(4/(1-\alpha))^4((i+1)/i)^{(12+4\alpha)/(1-\alpha)}\leqslant$$

$$\leqslant c_3 Mn^{-4}, \qquad (21)$$

где при оценке h_i использована теорема Лагранжа о среднем значении.

Чтобы оценить величины $|\delta_i h_i|$, перейдем в системе линейных уравнений (5) к неизвестным $\delta_i = m_i - f'_i$. Получим равенства

$$(1+\gamma_0)\delta_1+\gamma_0\delta_2=\overset{*}{g}_1-(1+\gamma_0)f'_1-\gamma_0 f'_2,$$

$$\lambda_i\delta_{i-1}+2\delta_i+\mu_i\delta_{i+1}=g_i-\lambda_i f'_{i-1}-2f'_i-\mu_i f'_{i+1}\ (i=2,\ \ldots,\ 2n-2), \qquad (22)$$

$$\gamma_0\delta_{2n-2}+(1+\gamma_0)\delta_{2n-1}=\overset{*}{g}_{2n-2}-\gamma_0 f'_{2n-2}-(1+\gamma_0)f'_{2n-1},$$

правые части которых обозначим через $\bar{g}_i$ $(i=1,\ \ldots,\ 2n-1)$. Учитывая симметрию, используя значения g_1^* и g_i из раздела 1 и формулы (15), преобразуем $\bar{g}_i$ к виду

$$\bar{g}_1=\frac{\mu_1 h_1^3}{4!}f^{(4)}(\eta)+\frac{2\gamma_0 h_1^3}{4!}f^{(4)}(\eta)-\frac{\gamma_0 h_1^3}{3!}f^{(4)}(\eta_1)+\frac{\lambda_1}{6h_0}\int\limits_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy,$$

$$\bar{g}_i=\frac{\mu_i h_i^3}{8} f^{(4)}(\eta)-\frac{\lambda_i h_{i-1}^3}{8} f^{(4)}(\xi)-\frac{\mu_i h_i^3}{3!} f^{(4)}(\eta_1)+\frac{\lambda_i h_{i-1}^3}{3!} f^{(4)}(\xi_1)$$
$$(i=2,\ \ldots,\ n),$$

где $\eta, \eta_1 \in [x_i,\ x_{i+1}]$, а $\xi, \xi_1 \in [x_{i-1},\ x_i]$. С учетом (21) оценим величину $\bar{g}_i$ $(i=2,\ \ldots,\ n)$

$$|\bar{g}_i| \leqslant c\,|f^{(4)}(\eta)\,h_i^4\,|/h_i \leqslant c_1 M n^{-4}(((i+1)/n)^r-(i/n)^r)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant c_2 M n^{4\alpha/(1-\alpha)} i^{(3+\alpha)/(\alpha-1)}, \tag{23}$$

а с учетом (20) получим такую же оценку для $\bar{g}_1$.

Как и в доказательстве теоремы 1, перейдем в системе (22) к неизвестным $z_i=\delta_i(h_{i-k}\ldots h_{i+k-1})^{1/(2k)}$. Повторяя почти дословно все рассуждения, получим

$$|z_i| \leqslant \max_{1\leqslant l\leqslant 2n-1} |\bar{g}_l|\,h_l(h_{l-k}\ldots h_{l+k-1})^{1/(2k)}/(dh_l) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant l\leqslant 2n-1} |\bar{g}_l h_l|\,\varrho^{k/2}/d. \tag{24}$$

С учетом (23) и (21) имеем для $i=1,\ \ldots,\ 2n-1$

$$|z_i| \leqslant cMn^{-4},$$

откуда

$$|\delta_i h_i| = |z_i|\,h_i/(h_{i-k}\ldots h_{i+k})^{1/(2k)} \leqslant \varrho^{k/2}|z_i| \leqslant cMn^{-4}.$$

Так как все слагаемые в (17) и (19) оцениваются через $c\mu(f)n^{-4}$, получаем оценку (16) при $j=0$.

Обозначим величину $(3+\alpha)/4$ через q.

Для доказательства утверждения (16) при $j=1$ будем исходить из равенств (17′) и (19′), откуда видно, что на частичных отрезках достаточно оценить величины $|x^q\delta_i|$, $|x^q h_i^3 f^{(4)}(\eta)|$, $|x^q \int_x^{x_1} (x-y)^2 f^{(4)}(y)\,dy|$ и $|(x^q/h_0)\int_0^{x_1} y^3 f^{(4)}(y)\,dy|$. Учитывая неравенство $x^q \leqslant ((i+1)/n)^{qr}$ и повторяя ход рассуждений (20), (21) и (23), легко доказать нужную нам оценку для трех последних выражений. Чтобы оценить величину $|x^q\delta_i|$, дополним сетку Δ^r узлами $t_i=x_1-x_1(1-i)/(l+2)$ $(i=0, -1,\ \ldots,\ -l)$ и переобозначим $t_i=x_i$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$, где число l определяется позже. Аналогично поступаем на другом конце отрезка. Очевидно, что $\max\limits_{-l\leqslant i\leqslant 2n+l-1} t_{i+1}/t_i \leqslant 2^r =: \varrho_1$. Переходя в системе (22) к новым переменным $y_i=\delta_i(t_{i-l}\ldots t_{i+l-1})^{q/(2l)}$, получим, как и в системе (9), что доминируемость главной диагонали матрицы зависит от величин

$$d'_i=2-\lambda_i(t_{i+l-1}/t_{i-l-1})^{q/(2l)}-\mu_i(t_{i-l}/t_{i+l})^{q/(2l)} \quad (i=2,\ \ldots,\ 2n-2).$$

Ясно, что $\lim\limits_{i\to\infty} t_{i+l-1}/t_{i-l-1}=1$ и $\lim\limits_{l\to\infty}(t_{i+l-1}/t_{i-l-1})^{q/(2l)} \leqslant \lim\limits_{l\to\infty}(t_{2l}/t_{-l})^{q/(2l)} = \lim\limits_{l\to\infty}((2l/n)^r/((1/n)^r(1/(l+2))))^{q/(2l)}=1$. Следовательно, найдется достаточно большое число l_0, при котором $d'_i \geqslant d' > 0$, где $d'=2-\lambda_2(t_{2l}/t_{-l})^{q/(2l)}-0{,}5$, $l \geqslant l_0$. Учитывая неравенство $(t_{i-l}\ldots t_{i+l-1})^{q/(2l)}/t_{i+1} \leqslant \varrho_1^{ql/2}$, получим (аналогично (24)), что

$$|y_i| \leqslant \max_{1\leqslant p\leqslant 2n-1} |\bar{g}_p t_{p+1}^q|\,\varrho_1^{ql/2}/d' = c \max_{1\leqslant p\leqslant 2n-1} |\bar{g}_p t_{p+1}^q|.$$

Используя (23), имеем

$$|\bar{g}_p t_{p+1}^q| \leqslant cMn^{4\alpha/(1-\alpha)} p^{(3+\alpha)/(\alpha-1)} ((p+1)/n)^{4(3+\alpha)/(4(1-\alpha))} =$$

$$= c_1 Mn^{(-3-3\alpha)/(1-\alpha)} ((p+1)/p)^{(3+\alpha)/(1-\alpha)} \leqslant c_2 Mn^{-3}, \tag{25}$$

а после перехода к первоначальным неизвестным

$$|x_{i+1}^q \delta_i| = |y_i| t_{i+1}^q / (t_{i-l} \ldots t_{i+l-1})^{q/(2l)} \leqslant |y_i| \varrho_1^{ql/2} \leqslant cMn^{-3}.$$

Поскольку c и M не зависят от n и i, то в итоге справедливо неравенство (16) при $j = 1$.

Доказательство двух остальных случаев ($j = 2$, 3) проводится аналогично. Для получения оценок величин $|x^{2q}\delta_i/h_i|$ и $|x^{3q}\delta_i/h_i^2|$ переходим в системе (22) соответственно к неизвестным

$$u_i = \delta_i (t_{i-l} \ldots t_{i+l-1})^{2q/(2l)} / (h_{i-k} \ldots h_{i+k-1})^{1/(2k)},$$

$$v_i = \delta_i (t_{i-l} \ldots t_{i+l-1})^{3q/(2l)} / (h_{i-k} \ldots h_{i+k-1})^{1/k}.$$

Доминируемость главной диагонали при $j = 2$ определяется величинами

$$d_i'' = 2 - \lambda_i (h_{i-k-1}/h_{i+k-1})^{1/(2k)} (t_{i+l-1}/t_{i-l-1})^{2q/(2l)} -$$

$$- \mu_i (h_{i+k}/h_{i-k})^{1/(2k)} (t_{i-l}/t_{i+l})^{2q/(2l)},$$

которые больше

$$d'' = 2 - \lambda_2 (t_{i+l-1}/t_{i-l-1})^{2q/(2l)} - 0{,}5 (h_{i+k}/h_{i-k})^{1/(2k)}.$$

Из предыдущих рассуждений следует существование l и k таких, при которых $d'' > 0$. В случае $j = 3$ доминируемость главной диагонали определяется величиной

$$d''' = 2 - \lambda_2 (t_{i+l-1}/t_{i-l-1})^{3q/(2l)} - 0{,}5 (h_{i+k}/h_{i-k})^{1/k},$$

которая при достаточно больших k и l строго положительна. Остальные слагаемые в равенствах (17″), (19″) и (17‴), (19‴), умноженные на веса x^{2q} и x^{3q} соответственно, оцениваются аналогично (20), (21), (23) и (25).

Теорема 2 доказана.

5. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = \int_0^b \varkappa(|x-s|) u(s) ds + f(x). \tag{26}$$

Пусть $f \in C^4[0, b]$, $\varkappa \in C^3(0, b]$, причем

$$|\varkappa(t)| \leqslant c(|\ln t| + 1), \quad |\varkappa^{(k)}(t)| \leqslant ct^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{27}$$

или

$$|\varkappa^{(k)}(t)| \leqslant ct^{-k-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{27'}$$

Предположим, что соответствующее однородное интегральное уравнение имеет только нулевое решение. Тогда (см. [6]) уравнение (26) имеет единственное решение $u \in C[0, b] \cap C^4(0, b)$, причем $|u^{(4)}(x)| \leqslant$ $\leqslant M(x^{-3-\alpha} + (b-x)^{-3-\alpha})$, $\alpha = 0$ в случае (27).

Построим приближенное решение $u_n(x)$ уравнения (26) в виде кубического сплайна дефекта 1 на сетке Δ^r и определим его из условий (метод коллокации)

$$u_n(x_i) = \int_0^b \varkappa(|x_i - s|)\, u_n(s)\, ds + f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, 2n, \tag{28}$$

$$u'''_n(x_1+0) = u'''_n(x_1 - 0), \quad u'''_n(x_{2n-1}+0) = u'''_n(x_{2n-1} - 0).$$

Алгоритм конкретизируется выбором базиса в пространстве S_{Δ^r}.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (26) *удовлетворяет перечисленным выше предположениям. Тогда при достаточно больших n приближение u_n условиями* (28) *определяется однозначно*; *если $r = 4/(1-\alpha)$, то*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant b} |u_n(x) - u(x)| \leqslant c\mu(u) n^{-4}. \tag{29}$$

Доказательство. Уравнение (26) можем рассматривать как операторное уравнение $u = Tu + f$ в банаховом пространстве $C = C[0, b]$ с обычной нормой. Сплайн-коллокационные условия (28) можем переписать в равносильной форме $u_n = P_n T u_n + P_n f$, где P_n — проектор в C, сопоставляющий любой функции u ее сплайновый интерполянт $S_{\Delta^r}(x; u)$. В силу теоремы 1 имеет место сильная сходимость $P_n \to I$ при $n \to \infty$, и нормы $\|P_n\|$ равномерно ограничены. Поскольку T вполне непрерывен в $C[0, b]$, то стандартным образом заключаем (см. [7], лемма 15.4, с. 202), что $\|P_n T - T\| \to 0$ при $n \to \infty$. Теперь из однозначной разрешимости уравнения (26) следует, что при достаточно больших n однозначно разрешима и задача (28), причем (см. [7], теорема 15.3, с. 200)

$$\|u_n - u\| \leqslant c \|u - P_n u\|.$$

При помощи теоремы 2 отсюда немедленно получаем оценку (29).
Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л., Методы сплайн-функций, М., «Наука», 1980.
2. Зматраков Н. Л., Тр. Мат. ин-та АН СССР, 138, 71—93 (1975).
3. Rice, J. R., In: Approximations with Special Emphasis on Spline Functions, Academic Press, New York, 1969, p. 349—365.
4. Вайникко Г., Уба П., В кн.: Тезисы конференции «Теоретические и прикладные вопросы математики», Тарту, 1980, с. 196—198.
5. Vainikko, G., Uba, P., J. Austral. Math. Soc., **B22**, № 4, 431—438 (1981).
6. Vainikko, G., Pedas, A., J. Austral. Math. Soc., **B22**, № 4, 419—430 (1981).
7. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений, М., «Наука», 1969.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 5/III 1982

P. UBA

INTERPOLEERIVATE KUUPSPLAINIDE KOONDUVUS EBAÜHTLASTEL VÕRKUDEL

Artiklis on vaadeldud pidevate funktsioonide interpoleerimist kuupsplainidega. Kui lähendatava funktsiooni tuletistel on lõigu otspunktides iseärasused, on otstarbekas kasutada tugevalt ebaühtlasi interpoleerimisvõrke, mille korral pole rahuldatud tuntud koonduvustingimused (vt. [1, 2]). On tõestatud interpoleerimisprotsessi koonduvus ning iseäraste tuletistega funktsioonide korral näidatud ka koonduvuskiirus niisuguste võrkude kasutamisel. Saadud tulemuste põhjal on välja töötatud neljandat järku koonduvuskiirusega kollokatsioonimeetod logaritmilise ja astmelise iseärasusega integraalvõrrandite ligikaudseks lahendamiseks.

P. UBA

ON THE CONVERGENCE OF INTERPOLATE CUBIC SPLINES ON NONUNIFORM GRIDS

The object of this paper is the interpolation of continuous functions by cubic splines on the special non-uniform grids Δ^r (6). Such grids are applied for interpolating functions whose derivatives have singularities at the ends of the interval (see [3–5]). We construct the interpolate spline $S_{\Delta^r}(x; f) \in C^2[0, b]$ of function $f(x)$ in each subinterval $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \ldots, 2n-1$ in the form (1) with the boundary conditions

$$S'''_{\Delta^r}(x_j+0; f) = S'''_{\Delta^r}(x_j-0; f), \qquad j=1, 2n-1.$$

Theorem 1. *Let $f \in C[0, b]$, then for the interpolate spline*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant b} |S_{\Delta^r}(x; f) - f(x)| \leqslant M\omega(f),$$

where M is independent of n and

$$\omega(f) = \max_{0 \leqslant i \leqslant 2n-1} \max_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|.$$

Theorem 2. *Let $f \in C[0, b] \cap C^4(0, b)$ and satisfy the condition (13). If $r=4/(1-\alpha)$, then for the interpolate cubic spline the estimates*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant b} ((b-x)x)^{j(3+\alpha)/4} |S^{(j)}_{\Delta^r}(x; f) - f^{(j)}(x)| \leqslant c\mu(f) n^{-4+j}, \qquad j=0, 1, 2, 3,$$

are valid, where $\mu(f)$ is the smallest of the constants M (in (13)) and c is independent of n and f.

These results are used to derive a fourth-order collocation method for solving an integral equation with a weakly singular kernel. Let us consider the integral equation (26), where $f \in C^4[0, b]$, $\varkappa \in C^3(0, b]$, and satisfy the condition (27) or (27′). Assume that the corresponding homogeneous integral equation has only a trivial solution. We construct the approximate solution $u_n(x)$ of equation (26) as a cubic spline on the grid (6), and determine by the conditions (28).

Theorem 3. *Let the conditions for f, $\varkappa$ and equation (26) be satisfied. Then, for sufficiently large n, the conditions (28) determine a unique approximate solution u_n; if $r=4/(1-\alpha)$, then*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant b} |u_n(x) - u(x)| \leqslant c\mu(u) n^{-4}.$$