EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 4

УДК 519.722

Т. ЛАУСМАА

ОБ ИНФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ РАЗБИЕНИЯ

(Представил Н. Алумяэ)

С. Ватанабе [1] выдвинул идею использовать для характеристики сложности системного объекта информационную зависимость между его компонентами. Другой подход к определению степени сложности системного объекта использован Дж. Роудзом и К. Кроном [2], которые исходят из предположения, что объект тем сложнее, чем больше неприводимых компонентов он имеет.

В настоящей работе рассматриваются свойства разбиения, связанные с комбинаторно-информационным понятием энтропии [3] и приводящие к определению понятия информационной связки (ИС) для системы разбиений. ИС характеризует сложность объекта, представленного в виде системы разбиений, и в каком-то смысле совмещает упомянутые выше подходы. Идея определения ИС состоит в том, что система разбиений сначала декомпонируется на неприводимые компоненты, а затем эти компоненты оцениваются по информационной взаимозависимости. Численная величина для ИС получается как взвешенная сумма этих же оценок. Показывается, что ИС удовлетворяет естественным требованиям, предъявляемым к понятию сложности.

Разбиение произвольного конечного множества $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ на блоки $B_i^{(1)}, B_i^{(2)}, \ldots, B_i^{(\alpha)}, \ldots, B_i^{(m_i)}$ обозначим через $\pi_i(X)$. В частности, 0_X — нулевое разбиение, а 1_X — единичное разбиение. Для любого подмножества $X'\subset X$ определим его вес $q_X(X')$ как отношение $q_X(X') \underset{\mathrm{Df}}{=} \|X'\|/\|X\|$ (обычно индекс у q опускается). Разбиения $\pi_i(X')$ и $\pi_j(X'')$ будем называть эквивалентными (обозначение $\pi_i(X')\equiv\equiv\pi_j(X'')$) тогда и только тогда, когда существует биекция $\varphi:\pi_i\to\pi_j$ такая, что для любого $B_i^{(\alpha)}\in\pi_i$ имеет место $q(B_i^{(\alpha)})=q(\varphi(B_i^{(\alpha)}))$. Определим для каждого разбиения $\pi_i(X)$ энтропию

$$H(\pi_i)=-\sum_{\alpha=1}^{m_i} q(B_i^{(\alpha)})\ln q(B_i^{(\alpha)}).$$

Примем, что условная энтропия $H(\pi_j/\pi_i)\underset{\mathrm{Df}}{=}H(\pi_i\cdot\pi_j)-H(\pi_i)$. Для любой системы разбиений $P(X)=\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_w\}$ введем обозначения: $m(P)\underset{\mathrm{Df}}{=}\prod_{i=1}^{w}\pi_i$ и $M(P)\underset{\mathrm{Df}}{=}\sum_{i=1}^{w}\pi_i$. Если $P(X)=\varnothing$, то примем, что $m(P)=1_X$. Сужением разбиения $\pi_i(X)$ на $X'\subset X$ будем называть разбиение $\bar{\pi}_i(X')\underset{\mathrm{Df}}{=}\{B_i^{(\alpha)}\cap X' \mid B_i^{(\alpha)}\in\pi_i\}$. Для системы разбиений $P(X)$ определим сужение на $X'\subset X$ как $\bar{P}(X')\underset{\mathrm{Df}}{=}\{\bar{\pi}_i(X')\mid\pi_i\in P(X)\}$.

Лемма 1. *Для любых разбиений $\pi_i(X)$ и $\pi_j(X)$ всегда справедливо*

$$H(\pi_i)+H(\pi_j)\geqslant H(\pi_i\cdot\pi_j)+H(\pi_i+\pi_j).$$

Доказательство. Пусть $\pi_h\underset{\mathrm{Df}}{=}\pi_i+\pi_j$. В силу свойства в) энтропии [3] (с. 227) для любого $\pi_h\leqslant\pi_k$ получаем, что

$$H(\pi_h) = H(\pi_k) + \sum_{\alpha=1}^{m_k} q(B_k^{(\alpha)}) H(\bar{\pi}_h(B_k^{(\alpha)})),$$

откуда $H(\pi_i) + H(\pi_j) = H(\pi_i \cdot \pi_j) + H(\pi_k) + \sum_{\alpha=1}^{m_k} q(B_k^{(\alpha)}) [H(\bar{\pi}_i(B_k^{(\alpha)})) + H(\bar{\pi}_j(B_k^{(\alpha)})) - H(\overline{\pi_i \cdot \pi_j}(B_k^{(\alpha)}))]$. Из свойства субаддитивности энтропии разбиения для любого $B_k^{(\alpha)} \in \pi_k$ следует $H(\bar{\pi}_i(B_k^{(\alpha)})) + H(\bar{\pi}_j(B_k^{(\alpha)})) - H(\overline{\pi_i \cdot \pi_j}(B_k^{(\alpha)})) \geqslant 0$. Поэтому $H(\pi_i) + H(\pi_j) \geqslant H(\pi_i \cdot \pi_j) + H(\pi_i + \pi_j)$.

Учитывая, что для любых $\pi_i(X)$, $\pi_j(X)$ и $\pi_k(X)$ всегда $(\pi_i \cdot \pi_j + \pi_k) \leqslant (\pi_i + \pi_k)(\pi_j + \pi_k)$, и применяя неравенство леммы 1 рекурсивно для системы разбиений P, можно показать, что

$$\sum_{\pi_i \in P} H(\pi_i) \geqslant \sum_{k=1}^{\|P\|} H(m(\{M(P') \mid P' \subset P \wedge \|P'\| = K\})).$$

Для произвольной системы P определим

$$\mathfrak{W}(P) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{\pi_i \in P} H(\pi_i) - H(m(P)) - H(M(P)).$$

Нетрудно видеть, что если $P_1, P_2 \subset P$ и $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то $\mathfrak{W}(P) \geqslant \mathfrak{W}(P_1) + \mathfrak{W}(P_2)$.

Теорема 1. *Пусть* $P' \subset P$ *и* $\pi' \underset{\mathrm{Df}}{=} m(P')$ $(\pi' \underset{\mathrm{Df}}{=} M(P'))$. *Тогда для любой системы разбиений* P *верно неравенство* $\sum_{B \in \pi'} q(B) \mathfrak{W}(\bar{P}(B)) \leqslant \mathfrak{W}(P)$.

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{B \in m(P')} q(B) \mathfrak{W}(\bar{P}(B)) = \sum_{\pi_i \in P} H(\pi_i / m(P')) -$$

$$- H(m(P)/m(P')) - H(M(P)/m(P')) = \sum_{\pi_j \in P'} H(\pi_j / m(P')) +$$

$$+ \sum_{\pi_k \in P \setminus P'} H(\pi_k / m(P')) - H(m(P)/m(P')) = \sum_{\pi_k \in P \setminus P'} H(\pi_k / m(P')) +$$

$$+ H(m(P')) - H(m(P)) \leqslant \sum_{\pi_h \in P} H(\pi_h) - H(m(P)) - H(M(P')) \leqslant \mathfrak{W}(P).$$

Аналогично доказывается неравенство и для случая $\pi' = M(P')$.

Будем считать, что разбиение $\pi_i(X)$ квазинезависимо относительно $\pi_j(X)$ (обозначение $\pi_i \top \pi_j$) тогда и только тогда, когда для любых $B \in \pi_i + \pi_j$ и $B_j^{(\alpha)} \in \pi_j$ при $B_j^{(\alpha)} \subset B$ справедливо $\bar{\pi}_i(B) \equiv \bar{\pi}_i(B_j^{(\alpha)})$. Из этого определения сразу вытекает, что отношение квазинезависимости рефлексивно $((\forall \pi_i) \pi_i \top \pi_i)$.

Теорема 2. *Для любых разбиений* $\pi_i(X)$ *и* $\pi_j(X)$ *верно* $\pi_i \top \pi_j \Rightarrow \mathfrak{W}(\{\pi_i, \pi_j\}) = 0 \Rightarrow \pi_j \top \pi_i$.

Доказательство.

1. $\pi_i \top \pi_j \Rightarrow \mathfrak{W}(\{\pi_i, \pi_j\}) = 0$.

Из $\pi_i \top \pi_j$ для любого $B \in \pi_i + \pi_j$ вытекает, что $H(\overline{\pi_i \cdot \pi_j}(B)) = H(\bar{\pi}_i(B)) + H(\bar{\pi}_j(B))$. Поэтому

$$H(\pi_i\cdot\pi_j)=H(\pi_i+\pi_j)+\sum_{B\in\pi_i+\pi_j} q(B)\,H(\overline{\pi_i\cdot\pi_j}(B))=$$

$$=H(\pi_i+\pi_j)+\sum_{B\in\pi_i+\pi_j} q(B)\,[H(\bar{\pi}_i(B))+H(\bar{\pi}_j(B))]=$$

$$=H(\pi_i)+H(\pi_j)-H(\pi_i+\pi_j).$$

2. $\mathfrak{W}(\{\pi_i,\pi_j\})=0\Rightarrow\pi_j\top\pi_i.$

$$\mathfrak{W}(\{\pi_i,\pi_j\})=0\Rightarrow H(\pi_i)+H(\pi_j)=H(\pi_i\cdot\pi_j)+H(\pi_i+\pi_j)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(\pi_i)+H(\pi_i+\pi_j)+\sum_{B\in\pi_i+\pi_j} q(B)\,H(\bar{\pi}_j(B))=$$

$$=H(\pi_i)+\sum_{B_i^{(\alpha)}\in\pi_i} q(B_i^{(\alpha)})\,H(\bar{\pi}_j(B_i^{(\alpha)}))+H(\pi_i+\pi_j)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{B\in\pi_i+\pi_j} q(B)\,H(\bar{\pi}_j(B))=\sum_{B\in\pi_i+\pi_j} q(B)\sum_{B_i^{(\alpha)}\subset B} q_B(B_i^{(\alpha)})\,H(\bar{\pi}_j(B_i^{(\alpha)}))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{B\in\pi_i+\pi_j} q(B)\,[H(\bar{\pi}_j(B))+H(\bar{\pi}_i(B))-H(\overline{\pi_i\cdot\pi_j}(B))]=0\Rightarrow$$ (лемма 2 из [4])

$$\Rightarrow(\forall B\in\pi_i+\pi_j)\,(\forall B_i^{(\alpha)}\subset B)\,(\forall B_j^{(\beta)}\subset B)\,(\bar{\pi}_j(B_i^{(\alpha)})\equiv\bar{\pi}_j(B))\Rightarrow\pi_j\top\pi_i.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что квазинезависимость $\top$ представляет собой отношение толерантности (т. е. является рефлексивной и симметричной).

Примем, что разбиения $\pi_i(X)$ и $\pi_j(X)$ образуют модулярную пару [5] тогда и только тогда, когда для любого $\pi_k(X)$ из $\pi_i\leqslant\pi_k$ вытекает $\pi_k\cdot(\pi_i+\pi_j)=\pi_i+\pi_j\cdot\pi_k$.

Лемма 2. *Пусть* $\pi_i\top\pi_j$ *и* $\pi_k\geqslant\pi_i$. *Тогда* $\pi_i\top\pi_j\cdot\pi_k$.

Доказательство. В самом деле, учитывая, что при $\pi_i\leqslant\pi_k$ всегда $\pi_k\cdot(\pi_i+\pi_j)\geqslant\pi_i+\pi_j\cdot\pi_k$ [6], из $H(\pi_k/\pi_j)\leqslant H(\pi_k/\pi_i+\pi_j)$ получим

$$H(\pi_j\cdot\pi_k)-H(\pi_j)\leqslant H(\pi_k\cdot(\pi_i+\pi_j))-H(\pi_i+\pi_j)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(\pi_i)+H(\pi_j\cdot\pi_k)\leqslant H(\pi_i)+H(\pi_j)-H(\pi_i+\pi_j)+H(\pi_k(\pi_i+\pi_j))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(\pi_i)+H(\pi_j\cdot\pi_k)\leqslant H(\pi_i\cdot\pi_j)+H(\pi_i+\pi_j\cdot\pi_k)\Rightarrow\pi_i\top\pi_j\cdot\pi_k.$$

Теорема 3. *Из* $\pi_i\top\pi_j$ *следует, что* π_i *и* π_j *образуют модулярную пару.*

Доказательство. Пусть $\pi_i\top\pi_j$ и $\pi_i\leqslant\pi_k$. В силу леммы 2 верно $H(\pi_i+\pi_j\cdot\pi_k)-H(\pi_k\cdot(\pi_i+\pi_j))=H(\pi_i)+H(\pi_j\cdot\pi_k)-H(\pi_i\cdot\pi_j)-H(\pi_k\cdot(\pi_i+\pi_j))=H(\pi_i)+H(\pi_j\cdot\pi_k)-H(\pi_i)-H(\pi_j)+H(\pi_i+\pi_j)-H(\pi_k\cdot(\pi_i+\pi_j))=H(\pi_k/\pi_j)-H(\pi_k/\pi_i+\pi_j)=0.$ Пользуясь неравенством $\pi_k\cdot(\pi_i+\pi_j)\geqslant\pi_i+\pi_j\cdot\pi_k$, получаем, что $\pi_k\cdot(\pi_i+\pi_j)=\pi_i+\pi_j\cdot\pi_k$. Теорема доказана.

Определим теперь для произвольных разбиений $\pi_i(X)$ и $\pi_j(X)$ функцию расстояния d [7]: $d(\pi_i,\pi_j)\underset{\mathrm{Df}}{=}H(\pi_i/\pi_j)+H(\pi_j/\pi_i)$. В общем случае $d(\pi_i,\pi_j)\leqslant H(\pi_i\cdot\pi_j/\pi_i+\pi_j)$, но нетрудно показать, что при $\pi_i\top\pi_j$ верно $d(\pi_i,\pi_j)=H(\pi_i\cdot\pi_j/\pi_i+\pi_j)$.

Из того, что для любых разбиений $\pi_i(X)$, $\pi_j(X)$ и $\pi_k(X)$ справедливо $H(\pi_i/\pi_j)+H(\pi_j/\pi_k)\geqslant H(\pi_i/\pi_k)$, легко установить, что функция

d удовлетворяет условиям метрики, т. е.:

а) $d(\pi_i, \pi_i)=0$,

б) $d(\pi_i, \pi_j)=d(\pi_j, \pi_i)$,

в) $d(\pi_i, \pi_j)+d(\pi_j, \pi_k)\geqslant d(\pi_i, \pi_k)$.

Теорема 4. *Если* $\pi_i \top \pi_k$ *и* $\pi_j \top \pi_k$, *то* $d(\pi_i\cdot\pi_k, \pi_j\cdot\pi_k)+d(\pi_i+\pi_k, \pi_j+\pi_k)\leqslant d(\pi_i, \pi_j)$.

Доказательство. Действительно, поскольку всегда $(\pi_k+\pi_i\cdot\pi_j)\leqslant \leqslant(\pi_k+\pi_i)\cdot(\pi_k+\pi_j)$, имеем

$$d(\pi_i\cdot\pi_k, \pi_j\cdot\pi_k)+d(\pi_i+\pi_k, \pi_j+\pi_k)=$$
$$=2H(\pi_i\cdot\pi_j\cdot\pi_k)-H(\pi_i\cdot\pi_k)-H(\pi_j\cdot\pi_k)+$$
$$+2H((\pi_i+\pi_k)\cdot(\pi_j+\pi_k))-H(\pi_i+\pi_k)-H(\pi_j+\pi_k)\leqslant$$
$$\leqslant 2(H(\pi_i\cdot\pi_j\cdot\pi_k)+H(\pi_k+\pi_i\cdot\pi_j))-H(\pi_i\cdot\pi_k)-$$
$$-H(\pi_i+\pi_k)-H(\pi_j\cdot\pi_k)-H(\pi_j+\pi_k)\leqslant$$
$$\leqslant 2(H(\pi_i\cdot\pi_j)+H(\pi_k))-H(\pi_i\cdot\pi_k)-H(\pi_i+\pi_k)-H(\pi_j\cdot\pi_k)-$$
$$-H(\pi_j+\pi_k)=d(\pi_i, \pi_j).$$

Из теоремы 4 следует, что если $\pi_i\leqslant\pi_k\leqslant\pi_j$, то $d(\pi_i, \pi_k)+d(\pi_k, \pi_j)= = d(\pi_i, \pi_j)$.

При $\pi_i(X)+\pi_j(X)=1_X$ разбиения π_i и π_j будем называть ортогональными. Квазинезависимые и ортогональные разбиения $\pi_i(X)$ и $\pi_j(X)$ будем называть независимыми (обозначение $\pi_i \mathrm{I} \pi_j$). Легко видеть, что отношение независимости I антирефлексивно и симметрично. Можно показать, что отношение $\pi_i \mathrm{I} \pi_j$ эквивалентно следующим условиям:

а) $H(\pi_i)+H(\pi_j)=H(\pi_i\cdot\pi_j)$,

б) для любых $B_i^{(\alpha)}\in\pi_i$ и $B_j^{(\beta)}\in\pi_j$ верно $q(B_i^{(\alpha)}\cap B_j^{(\beta)})=q(B_i^{(\alpha)})q(B_j^{(\beta)})$.

Лемма 3. *Если* $\pi_i \mathrm{I} \pi_k$ *и* $\pi_j\geqslant\pi_i$, *то* $\pi_j \mathrm{I} \pi_k$.

Доказательство. В самом деле, $\pi_i \mathrm{I} \pi_k \Rightarrow H(\pi_i)+H(\pi_k)- -H(\pi_i\cdot\pi_k)=0 \Rightarrow H(\pi_j)+H(\pi_i\cdot\pi_j)-H(\pi_j)+H(\pi_k)-H(\pi_j\cdot\pi_k)- -H(\pi_i\cdot\pi_j\cdot\pi_k)+H(\pi_j\cdot\pi_k)=0 \Rightarrow [H(\pi_j)+H(\pi_k)-H(\pi_j\cdot\pi_k)]+ +[H(\pi_i/\pi_j)-H(\pi_i/\pi_j\cdot\pi_k)]=0 \Rightarrow H(\pi_j)+H(\pi_k)-H(\pi_j\cdot\pi_k)=0 \Rightarrow \Rightarrow \pi_j \mathrm{I} \pi_k$.

Лемма 4. *При* $\pi_h\cdot\pi_k(X) \mathrm{I} \pi_i(X)$ *для любого* $B_h\in\pi_h$ *верно* $\bar{\pi}_k(B_h) \mathrm{I} \bar{\pi}_i(B_h)$.

Доказательство. В силу леммы 3, из $\pi_h\cdot\pi_k \mathrm{I} \pi_i$ для любых $B_k\in\pi_k$ и $B_i\in\pi_i$ вытекает, что

$$q(B_h\cap B_i\cap B_k)=q(B_h\cap B_k)q(B_i)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\|B_h\cap B_i\cap B_k\|}{\|B_h\|}=\frac{\|B_h\cap B_k\|}{\|B_h\|}\frac{\|B_h\|}{\|X\|}\frac{\|B_i\|}{\|X\|}\frac{\|X\|}{\|B_h\|}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\|B_h\cap B_i\cap B_k\|}{\|B_h\|}=\frac{\|B_h\cap B_k\|}{\|B_h\|}\frac{\|B_h\cap B_i\|}{\|B_h\|}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow q_{B_h}(B_h\cap B_i\cap B_k)=q_{B_h}(B_h\cap B_k)q_{B_h}(B_h\cap B_i)\Rightarrow\bar{\pi}_k(B_h) \mathrm{I} \bar{\pi}_i(B_h).$$

Систему разбиений P будем называть независимой тогда и только тогда, когда для произвольных дизъюнктивных подсистем $P', P'' \subset P$ (т. е. $P' \cap P'' = \varnothing$) верно $m(P') \mathrm{I}\, m(P'')$. Введем определение: $\mathfrak{J}(P) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum\limits_{\pi_i \in P} H(\pi_i) - H(m(P))$. Учитывая лемму 2 из [4], нетрудно установить, что это определение независимости для системы P эквивалентно условию $\mathfrak{J}(P) = 0$. Аналогично, две системы разбиений $P_1(X)$ и $P_2(X)$ будем называть взаимно независимыми тогда и только тогда, когда $m(P_1) \mathrm{I}\, m(P_2)$. Из леммы 3 вытекает, что если системы P_1 и P_2 взаимно независимы, то любые их подсистемы $P' \subset P_1$ и $P'' \subset P_2$ тоже взаимно независимы. Взаимная независимость P_1 и P_2 означает, что для любых $P' \subset P_1$ и $P'' \subset P_2$ при произвольном $B \in m(P'')$ верно $m(P'(X)) \equiv m(\bar{P}'(B))$. Ясно, что если системы разбиений $P_1(X)$ и $P_2(X)$ взаимно независимы, то $P_1 \cap P_2 \subset \{1_X\}$. Легко видеть, что если системы разбиений $P'(X)$ и $P''(X)$ взаимно независимы, то $\mathfrak{J}(P' \cup P'') = \mathfrak{J}(P') + \mathfrak{J}(P'')$. Можно также показать, что для любых $\pi_i, \pi_h \in P'(X)$ и $\pi_j, \pi_k \in P''(X)$ взаимно независимых систем разбиений P' и P'' справедливо $H(\pi_i \cdot \pi_j / \pi_h \cdot \pi_k) = H(\pi_i/\pi_h) + H(\pi_j/\pi_k)$.

Системы разбиений $P_1(X)$ и $P_2(Y)$ будем называть изоморфными (обозначение $P_1(X) \cong P_2(Y)$) тогда и только тогда, когда существует биекция $\varphi: P_1 \to P_2$ такая, что для любых подсистем $P', P'' \subset P_1$ при произвольном $B^{(\alpha)} \in m(P'')$ верно $m(\bar{P}_1(B^{(\alpha)})) \equiv m(\varphi(\bar{P}_1(B^{(\alpha)})))$ и $M(\bar{P}_1(B^{(\alpha)})) \equiv M(\varphi(\bar{P}_1(B^{(\alpha)})))$.

Если $\bar{P}_1(B')$ и $\bar{P}_2(B'')$ в случае $P_1, P_2 \subset P$ изоморфны относительно сужения отображения $\varphi: (\forall \pi_i \in P)\, (\bar{\pi}_i(B') \mapsto \bar{\pi}_i(B''))$ на P_1, то будем писать $\bar{P}_1(B') \underset{P}{\cong} \bar{P}_2(B'')$. В дальнейшем вместо $\bar{P}_i(B') \underset{P_i}{\cong} \bar{P}_i(B'')$ будем пользоваться записью $\bar{P}_i(B') \cong \bar{P}_i(B'')$. Ясно, что если $\bar{P}(B') \cong \bar{P}(B'')$, то $\mathfrak{W}(\bar{P}(B')) = \mathfrak{W}(\bar{P}(B''))$ и $\mathfrak{J}(\bar{P}(B')) = \mathfrak{J}(\bar{P}(B''))$. При $P_1, P_2 \subset P$ будем считать, что $\bar{P}_1(B')$ делит $\bar{P}_2(B'')$ (обозначение $\bar{P}_1(B') \mid \bar{P}_2(B'')$) тогда и только тогда, когда $P_1 \subset P_2$ и $\bar{P}_1(B') \cong \bar{P}_1(B'')$. Из $\bar{P}_1(B') \mid \bar{P}_2(B'')$ легко выводится неравенство $\mathfrak{W}(\bar{P}_1(B')) \leqslant \mathfrak{W}(\bar{P}_2(B''))$. Если $P_1 \subset P(X)$ и для любого $B \in m(P \backslash P_1)$ имеет место $\bar{P}_1(B) \mid P(X)$, то будем писать $P_1 \preceq P$. Нетрудно видеть, что если $\bar{P}_1(B) \preceq \bar{P}(B)$ и $\bar{P}(B) \cong \bar{P}(B')$, то $\bar{P}_1(B') \preceq \bar{P}(B')$.

Т е о р е м а 5. *Отношение $\preceq$ на множестве систем разбиений есть отношение порядка, т. е. оно является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным. Выражение $P_1(X) \preceq P(X)$ эквивалентно взаимной независимости систем P_1 и $P \backslash P_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сперва второе утверждение теоремы. Пусть $P_1 \preceq P$ и $P_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} P \backslash P_1$. По определению отношения $\preceq$ для любого $B \in m(P_2)$ верно $P_1(X) \cong \bar{P}_1(B)$. Поэтому справедливо $m(P_1(X)) \equiv m(\bar{P}_1(B))$. Из этого непосредственно следует $m(P_1) \mathrm{I}\, m(P_2)$.

Пусть P_1 и P_2 взаимно независимы. Тогда в силу леммы 3 для любых $P', P'' \subset P_1$ верно $m(P') \cdot m(P'') \mathrm{I}\, m(P_2)$, а также $M(P') \cdot m(P'') \mathrm{I}\, m(P_2)$. Поэтому, опираясь на лемму 4, получаем для произвольного $B^{(\alpha)} \in m(P'')$, что $m(\bar{P}'(B^{(\alpha)})) \mathrm{I}\, m(\bar{P}_2(B^{(\alpha)}))$ и $M(\bar{P}'(B^{(\alpha)})) \mathrm{I}\, m(\bar{P}_2(B^{(\alpha)}))$, откуда $m(\bar{P}'(B^{(\alpha)})) \equiv m(\bar{P}'(B^{(\alpha)} \cap B))$ и $M(\bar{P}'(B^{(\alpha)})) \equiv M(\bar{P}'(B^{(\alpha)} \cap B))$. Из приведенного непосредственно следует, что $P_1(X) \cong \bar{P}_1(B) \Rightarrow \bar{P}_1(B) \mid P(X) \Rightarrow P_1(X) \preceq P(X)$.

Докажем теперь, исходя из вышеизложенного, первое утверждение теоремы. Поскольку свойства рефлексивности и антисимметричности вытекают непосредственно из определения отношения $\preceq$, ограничимся рассмотрением свойства транзитивности. Предполагая, что $P_1 \preceq P_2$,

$P_2 \leq P_3$, и пользуясь леммой 4, получаем по определению отношения $\leq$ для любых $B^{(\alpha)} \in m(P_3\setminus P_2)$ и $B^{(\beta)} \in m(P_2\setminus P_1)$, что $P_2 \leq P_3 \Leftrightarrow P_2(X) \cong \bar{P}_2(B^{(\alpha)}) \Rightarrow m(P_1)\cdot m(P_2\setminus P_1)\ \mathrm{I}\ m(P_3\setminus P_2) \Rightarrow m(\bar{P}_1(B^{(\beta)}))\ \mathrm{I}\ m(\overline{P_3\setminus P_2}(B^{(\beta)})) \Rightarrow \bar{P}_1(B^{(\beta)}) \leq \overline{P_1 \cup (P_3\setminus P_2)}\,(B^{(\beta)}) \Rightarrow \bar{P}_1(B^{(\alpha)} \cap B^{(\beta)}) \mid \overline{P_1 \cup (P_3\setminus P_2)}\,(B^{(\beta)}) \Rightarrow \bar{P}_1(B^{(\beta)}) \cong \bar{P}_1(B^{(\alpha)} \cap B^{(\beta)})$; $P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow P_1(X) \cong \bar{P}_1(B^{(\beta)})$. Поэтому, учитывая $(P_3\setminus P_2) \cup (P_2\setminus P_1) = P_3\setminus P_1$, имеем $P_1(X) \cong \bar{P}_1(B^{(\alpha)} \cap B^{(\beta)}) \Rightarrow (\forall B \in m(P_3\setminus P_1))\,(P_1(X) \cong \bar{P}_1(B)) \Rightarrow P_1 \leq P_3$.

Из теоремы 5 можно вывести, что если $P_1 \leq P$, то $(P\setminus P_1) \leq P$ и $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(P_1) + \mathfrak{I}(P\setminus P_1)$. Пусть $P_1 \subset P_2 \subset P$. Тогда $P_1 \leq P \Rightarrow m(P_1)\ \mathrm{I}\ m(P\setminus P_1) \Rightarrow m(P_1)\ \mathrm{I}\ m(P_2\setminus P_1) \Rightarrow P_1 \leq P_2$.

Систему разбиений P будем называть неприводимой тогда и только тогда, когда для любой непустой подсистемы $P_1 \subset P$ из $P_1 \leq P$ вытекает $P_1 = P$. В силу транзитивности отношения $\leq$ легко вывести, что для любой P существует покрывающее множество дизъюнктивных неприводимых подсистем $\{P_i \mid P_i \leq P\}$.

Произвольную подсистему $P' \subset P$, суженную на любом $B \in m(P\setminus P')$, будем называть подструктурой системы разбиений P. Так как подструктура однозначно определяется блоком B, на котором подсистема сужена, то в дальнейшем для подструктуры системы P на B будем употреблять обозначение $\bar{\bar{P}}(B)$. Множество всевозможных подструктур системы P обозначим через $\mathfrak{S}(P)$. Поскольку при $P(X) = \varnothing$ верно $m(P) = 1_X$, то сама система $P(X)$ тоже является своей подструктурой (т. е. $P(X) \in \mathfrak{S}(P)$). Нетрудно убедиться, что если $\bar{P}_1(B) \in \mathfrak{S}(P(X))$, то $\mathfrak{S}(\bar{P}_1(B)) \subset \mathfrak{S}(P(X))$. Из определения изоморфизма вытекает, что если $\bar{P}(B') \cong \bar{P}(B'')$, то существует биекция $\varphi : \mathfrak{S}(\bar{P}(B')) \to \mathfrak{S}(\bar{P}(B''))$ такая, что для любой $\bar{P}(B^{(\alpha)}) \in \mathfrak{S}(\bar{P}(B'))$ верно $\bar{P}(B^{(\alpha)}) \cong \varphi(\bar{P}(B^{(\alpha)}))$.

Лемма 5. *Пусть $P_1 \leq P$ и $B \in m(P\setminus P_1)$. Тогда из $\bar{P}_2(B) \leq \bar{P}_1(B)$ вытекает $P_2 \leq P$.*

Доказательство. Действительно, поскольку для произвольных $B^{(\alpha)} \in m(P\setminus P_1)$ и $B^{(\beta)} \in m(P_1\setminus P_2)$ верно $P_1 \leq P \Leftrightarrow P_1(X) \cong \bar{P}_1(B^{(\alpha)}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(P_2)\cdot m(P_1\setminus P_2)\ \mathrm{I}\ m(P\setminus P_1) \Rightarrow m(\bar{P}_2(B^{(\beta)}))\ \mathrm{I}\ m(\overline{P\setminus P_1}(B^{(\beta)})) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{P}_2(B^{(\beta)}) \leq \overline{P_2 \cup (P\setminus P_1)}\,(B^{(\beta)}) \Rightarrow \bar{P}_2(B^{(\beta)}) \cong \bar{P}_2(B^{(\alpha)} \cap B^{(\beta)})$ и $\bar{P}_2(B) \leq \bar{P}_1(B) \Leftrightarrow \bar{P}_2(B) \cong \bar{P}_2(B \cap B^{(\beta)})$, то имеем $P_2(X) \cong \bar{P}_2(B) \cong \bar{P}_2(B \cap B^{(\beta)}) \cong \bar{P}_2(B^{(\beta)}) \cong \bar{P}_2(B^{(\alpha)} \cap B^{(\beta)})$. Итак для любого $B^{(\gamma)} \in m(P\setminus P_2)$ справедливо $P_2(X) \cong \bar{P}_2(B^{(\gamma)}) \Rightarrow P_2 \leq P$.

Из леммы 5 следует, что если подсистема $P_1(X) \leq P(X)$ неприводима, то для любого $B \in m(P\setminus P_1)$ подструктура $\bar{P}_1(B) \in \mathfrak{S}(P)$ тоже неприводима. Отсюда следует

Лемма 6. *Пусть $\bar{\bar{P}}(B)$ — произвольная подструктура из $\mathfrak{S}(P)$. Тогда для любой неприводимой $\bar{P}_i(B) \leq \bar{\bar{P}}(B)$ существует неприводимая подструктура $\bar{P}_i(B_i) \in \mathfrak{S}(P)$, которая делит $\bar{\bar{P}}(B)$.*

Лемма 7. *Пусть $P_1 \subset P$. Если $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \in \mathfrak{S}(P_1)$ $(\bar{P}_{j1}(B_{j1}) \in \mathfrak{S}(P_1))$ — неприводимая подструктура, то найдется неприводимая подструктура $\bar{P}_i(B_i) \in \mathfrak{S}(P)$ $(\bar{P}_j(B_j) \in \mathfrak{S}(P))$ такая, что $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \mid \bar{P}_i(B_i)$, причем $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \underset{P_1}{\cong} \bar{P}_{j1}(B_{j1}) \Leftrightarrow \bar{P}_i(B_i) \underset{P}{\cong} \bar{P}_j(B_j)$.*

Доказательство. Пусть $\bar{P}_i(B_{i1}) \leq \bar{\bar{P}}(B_{i1})$ и $\bar{P}_i(B_{i1})$ — неприводимая система разбиений. Исходя из теоремы 5 получаем $\bar{P}_i(B_{i1}) \leq \bar{\bar{P}}(B_{i1}) \Rightarrow m(\bar{P}_i(B_{i1}))\ \mathrm{I}\ m(\bar{\bar{P}}(B_{i1})\setminus \bar{P}_i(B_{i1})) \Rightarrow m(\bar{P}_i(B_{i1}) \cap \bar{P}_{i1}(B_{i1}))\ \mathrm{I}\ m((\bar{\bar{P}}(B_{i1})\setminus \bar{P}_i(B_{i1})) \cap \bar{P}_{i1}(B_{i1})) \Rightarrow \bar{P}_i(B_{i1}) \cap \bar{P}_{i1}(B_{i1}) \leq$

$\leq \bar{P}_{i1}(B_{i1})$. Поскольку $\bar{P}_{i1}(B_{i1})$ — неприводимая система разбиений, то из вышеизложенного вытекает $P_{i1} \subset P_i$, откуда $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \mid \bar{P}_i(B_{i1})$. Из леммы 6 следует, что найдется неприводимая $\bar{P}_i(B_i) \in \mathfrak{S}(P)$ такая, что $\bar{P}_i(B_i) \mid \bar{\bar{P}}(B_{i1})$. Ясно, что $\bar{P}_i(B_i) \cong \bar{P}_i(B_{i1})$, и поэтому $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \mid \bar{P}_i(B_i)$.

Пусть $\bar{P}_i(B_i) \underset{P}{\cong} \bar{P}_j(B_j)$. Тогда $P_i = P_j$. Поэтому из $\bar{P}_i(B_i) \mid \bar{\bar{P}}(B_{i1})$ и $\bar{P}_j(B_j) \mid \bar{\bar{P}}(B_{j1})$ вытекает $P_i \subset P_{i1} \cup (P \backslash P_1)$, $P_{j1} \cup (P \backslash P_1) \Rightarrow P_i \cap P_1 \subset \subset P_{i1}, P_{j1}$. Но, с другой стороны, $P_{i1}, P_{j1} \subset P_i \Rightarrow P_{i1}$, $P_{j1} \subset P_i \cap P_1$. Итак, $P_{i1} = P_{j1}$, а поскольку $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \mid \bar{P}_i(B_i)$ и $\bar{P}_{j1}(B_{j1}) \mid \bar{P}_i(B_i)$, то $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \underset{P_1}{\cong} P_{j1}(B_{j1})$. Аналогично доказывается и обратное включение.

Пусть $P_1 \subset P(X)$ и $B \subset X$. Сужение $\bar{P}_1(B)$ будем называть минимальным тогда и только тогда, когда для любого $B' \subset X$ из $\bar{P}_1(B) \cong \cong \bar{P}_1(B')$ следует $\|B'\| \geqslant \|B\|$. Предположим, что $\tilde{\mathfrak{S}}(P)$ — какое-нибудь множество минимальных представителей классов изоморфных сужений системы разбиений P, порожденное всевозможными неприводимыми подструктурами из $\mathfrak{S}(P)$. Определим теперь ИС системы разбиений $P(X)$ следующим образом:

$$\mathfrak{B}(B) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{\bar{P}_i(B) \in \tilde{\mathfrak{S}}(P)} q(B)\mathfrak{W}(\bar{P}_i(B)).$$

Ясно, что $\mathfrak{B}(P)$ не зависит от конкретного выбора $\tilde{\mathfrak{S}}(P)$.

Лемма 8. *Пусть* P_1, $P_2 \subset P(X)$ *и* $P_1 \cap P_2 = \varnothing$. *Тогда имеет место неравенство* $\mathfrak{B}(P) \geqslant \mathfrak{B}(P_1) + \mathfrak{B}(P_2)$.

Доказательство. Пусть теперь $\bar{P}_{i1}(B_{i1})$, $\bar{P}_{j1}(B_{j1}) \in (\tilde{\mathfrak{S}}(P_1) \cup \tilde{\mathfrak{S}}(P_2))$ и $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \neq \bar{P}_{j1}(B_{j1})$. Ясно, что $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \underset{P_1}{\neq} \bar{P}_{j1}(B_{j1})$. Согласно лемме 7, найдутся $\bar{P}_i(B_i)$, $\bar{P}_j(B_j) \in \tilde{\mathfrak{S}}(P)$ такие, что $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \mid \bar{P}_i(B_i)$ и $\bar{P}_{j1}(B_{j1}) \mid \bar{P}_j(B_j)$. Если $\bar{P}_i(B_i) = \bar{P}_j(B_j)$, то в силу леммы 7 P_{i1} и P_{j1} принадлежат различным подсистемам P_1 и P_2. Учитывая, что $P_1 \subset P_2 \Rightarrow \Rightarrow \mathfrak{W}(P_1) \leqslant \mathfrak{W}(P_2)$ и $P_{i1} \cap P_{j1} = \varnothing$, получаем $\mathfrak{W}(\bar{P}_i(B_i)) \geqslant \mathfrak{W}(\bar{P}_{i1}(B_{i1})) + +\mathfrak{W}(\bar{P}_{j1}(B_{j1}))$. Ясно также, что если $\bar{P}_{i1}(B_{i1}) \mid \bar{P}_i(B_i)$, то $\|B_{i1}\| \leqslant \|B_i\|$, ибо тогда $\bar{P}_{i1}(B_i) \cong \bar{P}_{i1}(B_{i1})$. Из вышеприведенного уже несложно вывести правильность утверждения леммы.

Исходя из леммы 8, нетрудно установить, что ИС $\mathfrak{B}(P)$ любой системы разбиений P обладает свойствами, формально характеризующими интуитивное представление сложности:

а) неотрицательность: $\mathfrak{B}(P) \geqslant 0$;

б) инвариантность: $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mathfrak{B}(P_1) = \mathfrak{B}(P_2)$;

в) сюраддитивность: $(P_1, P_2 \subset P \wedge P_1 \cap P_2 = \varnothing) \Rightarrow \mathfrak{B}(P) \geqslant \mathfrak{B}(P_1) + \mathfrak{B}(P_2)$.

Теорема 6. *Если система разбиений P независима, то* $\mathfrak{B}(P) = 0$. *Для ортогональной системы P* (т. е. $(\forall \pi_i, \pi_j \in P)(\pi_i + \pi_j = 1_X)$) *верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Пусть система P независима. Тогда $\mathfrak{W}(P) = 0$. Предположим теперь, что $P' \subset P$ и $B \in m(P')$. Согласно теореме 1, $\sum_{B^{(\alpha)} \in m(P')} q(B^{(\alpha)})\mathfrak{W}(\bar{P}(B^{(\alpha)})) \leqslant 0$. Из этого для любого $\bar{\bar{P}}(B) \in \mathfrak{S}(P)$ вытекает, что $\mathfrak{M}(\bar{\bar{P}}(B)) = 0$, откуда непосредственно следует $\mathfrak{B}(P) = 0$.

Пусть теперь $\mathfrak{B}(P) = 0$ и $\mathfrak{P} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{P_i \mid P_i \leq P\}$ — покрывающее P

множество неприводимых подсистем. Поскольку для любой $P_i \in \mathfrak{P}$ найдется неприводимая подструктура $\bar{P}_i(B) \in \mathfrak{S}(P)$ при $\bar{P}_i(B) \cong P_i(X)$, то ввиду ортогональности P верно $\mathfrak{J}(P_i(X)) = \mathfrak{W}(\bar{P}_i(B)) = 0$. Поэтому $\mathfrak{J}(P) = \sum_{P_i \in \mathfrak{P}} \mathfrak{J}(P_i) = 0$, откуда следует и независимость системы P.

Лемма 9. *Если $P_1 \leq P$, то для любой $\bar{P}^{(k)}(B) \in \mathfrak{S}(P)$ верно:*

а) $\overline{P_1 \cap P^{(k)}(B)} \leq \bar{P}^{(k)}(B)$,

б) *при $P^{(k)} \subset P_1$ найдется $\bar{P}^{(k)}(B') \in \mathfrak{S}(P_1)$ такая, что $\bar{P}^{(k)}(B') \cong \bar{P}^{(k)}(B)$.*

Доказательство. Пусть $P_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} P \backslash P_1$. Тогда

а) $P_1 \leq P \Rightarrow m(P_1) \mathrm{I} m(P_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow m(P_1 \cap P^{(k)}) \cdot m(P_1 \backslash (P_1 \cap P^{(k)})) \mathrm{I} m(P_2 \cap P^{(k)}) \cdot m(P_2 \backslash (P_2 \cap P^{(k)})) \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\overline{P_1 \cap P^{(k)}(B)}) \mathrm{I} m(\overline{P_2 \cap P^{(k)}(B)}) \Rightarrow \overline{P_1 \cap P^{(k)}(B)} \leq \bar{P}^{(k)}(B)$,

б) $P_1 \leq P \Rightarrow m(P_1) \mathrm{I} m(P_2) \Rightarrow m(P^{(k)}) \cdot m(P_1 \backslash P^{(k)}) \mathrm{I} m(P_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\bar{P}^{(k)}(B')) \mathrm{I} m(\bar{P}_2(B')) \Rightarrow \bar{P}^{(k)}(B') \cong \bar{P}^{(k)}(B)$.

Из а) леммы 9 вытекает, что при $P_1 \leq P$ неприводимыми являются только такие $\bar{P}^{(k)}(B) \in \mathfrak{S}(P)$, для которых либо $P^{(k)} \subset P_1$, либо $P^{(k)} \subset P \backslash P_1$.

Теорема 7. *Если покрывающие подсистемы $P_1, P_2 \subset P$ (т. е. $P_1 \cup P_2 = P$) взаимно независимы, то справедливо равенство $\mathfrak{B}(P) = \mathfrak{B}(P_1) + \mathfrak{B}(P_2)$. Для ортогональной системы P верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Пусть P_1 и P_2 взаимно независимы. В силу леммы 8 $\mathfrak{B}(P) \geqslant \mathfrak{B}(P_1) + \mathfrak{B}(P_2)$. Из леммы 9 вытекает, что для любой $\bar{P}_i(B) \in \tilde{\mathfrak{S}}(P)$ существует либо $\bar{P}_{i1}(B') \in \tilde{\mathfrak{S}}(P_1)$ при $\bar{P}_i(B) \underset{P}{\cong} \bar{P}_{i1}(B')$, либо $\bar{P}_{i2}(B'') \in \tilde{\mathfrak{S}}(P_2)$ при $\bar{P}_i(B) \underset{P}{\cong} \bar{P}_{i2}(B'')$. Из этого следует, что $\mathfrak{B}(P) \leqslant \mathfrak{B}(P_1) + \mathfrak{B}(P_2) \Rightarrow \mathfrak{B}(P) = \mathfrak{B}(P_1) + \mathfrak{B}(P_2)$.

Пусть теперь система P ортогональна и $\mathfrak{B}(P) = \mathfrak{B}(P_1) + \mathfrak{B}(P_2)$. Обозначим множества дизъюнктивных неприводимых подсистем, покрывающих P_1, P_2 и P, через $\mathfrak{P}_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{P_{i1} | P_{i1} \leq P_1\}$, $\mathfrak{P}_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{P_{i2} | P_{i2} \leq P_2\}$ и $\mathfrak{P} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{P_i | P_i \leq P\}$ соответственно. Из леммы 5 следует, что для любых $P_{i1} \mathfrak{P}_1$ и $P_{i2} \in \mathfrak{P}_2$ существуют дизъюнктивные неприводимые подструктуры $\bar{P}'_{i1}(B_{i1}) \in \mathfrak{S}(P_1)$ и $\bar{P}'_{i2}(B_{i2}) \in \mathfrak{S}(P_2)$, которые делят P_1 и P_2 соответственно. Согласно лемме 7, равенство $\mathfrak{B}(P) = \mathfrak{B}(P_1) + \mathfrak{B}(P_2)$ возможно только при условии, что любым $\bar{P}'_h(B'_h) \in \tilde{\mathfrak{S}}(P_1)$ и $\bar{P}'_j(B'_j) \in \tilde{\mathfrak{S}}(P_2)$ соответствуют такие $\bar{P}_h(B_h)$, $\bar{P}_j(B_j) \in \tilde{\mathfrak{S}}(P)$, что $\bar{P}'_h(B'_h) \underset{P}{\cong} \bar{P}_h(B_h)$, $\bar{P}'_j(B'_j) \underset{P}{\cong} \bar{P}_j(B_j)$ и $\bar{P}_h(B_h) \neq \bar{P}_j(B_j)$ (если $\bar{P}_h(B_h) = \bar{P}_j(B_j)$, то $\mathfrak{J}(\bar{P}_h(B_h)) = \mathfrak{J}(\bar{P}'_h(B'_h)) + \mathfrak{J}(\bar{P}'_j(B'_j))$, и поэтому $P_h = P'_h \cup P'_j$, $\bar{P}'_h(B'_h) \cong \bar{P}'_h(B_h)$, $\bar{P}'_j(B'_j) \cong \bar{P}'_j(B_j)$, что противоречит неприводимости $\bar{P}_h(B_h)$). Из этого вытекает $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2$, откуда получаем равенство $\mathfrak{J}(P) = \mathfrak{J}(P_1) + \mathfrak{J}(P_2)$. Поэтому $H(m(P_1)) + H(m(P_2)) - H(m(P)) = 0 \Rightarrow m(P_1) \mathrm{I}\, m(P_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Watanabe, S., IBM J. Res. Develop., **4**, № 1, 66–82 (1960).
2. Krohn, K., Rhodes, J., Ann. Math., **88**, № 1, 128–160 (1968).
3. Лаусмаа Т., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **30**, № 3, 226–233 (1981).
4. Лаусмаа Т., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **30**, № 4, 310–318 (1981).
5. Birkhoff, G., Lattice Theory, Amer. Math. Soc., New York City, 1948.
6. Ore, O., Duke Math. J., **9**, 573–627 (1942).
7. Horibe, Y., Inform. and Contr., **22**, 403–404 (1973).

Институт термофизики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/II 1982

T. LAUSMAA

TÜKELDUSE INFORMATIIVSED OMADUSED

Artikkel käsitleb lõplikul hulgal määratud tükelduse entroopia mõistega [3] seotud tükelduse informatiivseid omadusi. Tükelduste süsteemi tarvis on defineeritud infoside mõiste, mis iseloomustab selle süsteemiga määratud objekti keerukust ning on [1] esitatud keerukushinnangu arendus. On näidatud, et infoside rahuldab keerukusele esitatavaid tingimusi.

T. LAUSMAA

INFORMATIONAL PROPERTIES OF PARTITIONS

S. Watanabe [1] was the first to pay attention to the fact that informational interdependence between the components of an object characterizes the complexity of this object. The typical feature of this measure of complexity is that its numerical values do not exceed the linear growth relative to the number of components of the object (but as we know from our everyday practice, the maximal complexity growth of real objects exceeds by far the linearity). It is due to the fact that this measure does not take into account the inner structure of the object, thus giving only a very rough estimation of its complexity. Another approach to the problem of complexity was given by K. Krohn and J. Rhodes [2]. The basic idea of their approach lies in the principle that an object is the more complicated the more irreducible components it has. Thus their theory takes into account the whole inner structure of the given object and provides us with a criterion for its complexity. But we lack the principle to estimate the relative complexity of these components themselves.

In the present paper the informational properties of partitions on finite set based on the notion of entropy for partitions [3], are considered. Founded upon these properties, the notion of informational bound (IB) for an arbitrary system of partitions is introduced. IB provides us with an informational measure of complexity for any object characterized by a system of partitions. IB is an advanced version of the informational measure of complexity by S. Watanabe taking into account the inner structure of the given object. It is shown that IB satisfies all the natural requirements to be a measure for complexity. The principle for determining IB is characterized by decomposing the system into irreducible components and evaluating the informational interdependence in all these components. By the requirement for components to be irreducible, the role of symmetry in the presentation of the system of partitions is taken into account. The numerical value for IB is given as the weighted summation of informational valutations over all these irreducible components. It is shown that if the system of partitions is composed of informationally independent partitions, the value for IB is zero, and if it is possible to decompose the system into two or more independent subsystems, then IB for the whole system is equal to the sum of IB values for all these subsystems.