EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1982.4.01

УДК 517.98

Эве ОЯ

СЛАБО КОМПАКТНО ПОРОЖДЕННЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРОВ

(Представил А. Хумал)

Исследуется, когда тензорные произведения $X \otimes_\alpha Y$ WCG-пространств X и Y являются WCG-пространствами. В частности, доказывается, что $X \otimes_\alpha Y$ является WCG-пространством при всех кросс-нормах α, если одно из пространств X или Y является сепарабельным или обладает свойством Данфорда—Петтиса. Полученные результаты применяются для изучения слабо компактной порожденности пространств X-значных функций, непрерывных на компакте, интегрируемых по Бохнеру или по Петтису, а также пространств p-ядерных, p-интегральных, квази-p-ядерных, абсолютно p-суммирующих и компактных операторов.

1. Пусть X и Y — банаховы пространства (или оба реальные, или оба комплексные). Норма α в тензорном произведении $X \otimes Y$ называется кросс-нормой или скрещенной нормой, если $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \, \|y\|$ при всех $x \in X$, $y \in Y$. Обозначим пополнение тензорного произведения $X \otimes Y$, наделенного кросс-нормой α, через $X \otimes_\alpha Y$.

В последнее десятилетие многими авторами изучался вопрос, когда какое-либо определенное линейно-топологическое свойство (напр., рефлексивность, слабая секвенциальная полнота и пр.) пространств X (или его сопряженного X') и Y наследуется тензорными произведениями $X \otimes_\alpha Y$ или пространствами операторов из X в Y (см., напр., [1–3] и содержащиеся там библиографии). Объектом исследования настоящей работы является свойство слабо компактной порожденности.

Банахово пространство X называется WCG-пространством или слабо компактно порожденным пространством, если оно содержит слабо компактное множество (согласно теореме Эберлейна—Шмульяна, слабая компактность равносильна слабой секвенциальной компактности), линейная оболочка которого плотна в X. Примерами WCG-пространств являются сепарабельные пространства, рефлексивные пространства и пространства $L_1 = L_1(S, \Sigma, \mu)$ (классов эквивалентности) μ-суммируемых функций на S, если (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой.

Вопрос о слабо компактной порожденности тензорного произведения изучался Дж. Дистелем (см. [4], или [2]), который показал, что $L_1 \otimes_\gamma X$ является WCG-пространством, если (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, X — WCG-пространство, а γ — проективная кросс-норма. Мы покажем, что для многих кросс-норм α слабо компактная порожденность пространств X и Y гарантирует слабо компактную порожденность $X \otimes_\alpha Y$, а для остальных кросс-норм укажем налагаемые на одно из пространств X или Y условия, при которых верна та же импликация. Из наших результатов вытекает, в частности, что в теореме Дистеля L_1 можно заменить произвольным WCG-пространством, обладающим свойством Данфорда—Петтиса. Результаты о тензорных произведениях применим для изучения слабо компактной порожденности операторных пространств.

2. Введем необходимые определения и обозначения. Через $L(X, Y)$ обозначается пространство непрерывных линейных операторов из X в Y, через $K(X, Y)$ — его подпространство компактных операторов, наделенные обычной операторной нормой. Говорят, что X обладает аппроксимационным свойством, если для любого компактного подмножества $K \subset X$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует оператор конечного ранга $T \in L(X, X)$ такой, что $\|Tx - x\| < \varepsilon$ при всех $x \in K$. Говорят, что X обладает свойством Данфорда—Петтиса, если $\lim_n x'_n(x_n) = 0$ при всех слабо сходящихся к нулю последовательностях (x_n) в X и (x'_n) в X'.

Пусть $(x_i) = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечная система элементов пространства X. Введем следующие обозначения:

$$\gamma_p(x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\gamma_\infty(x_i) = \sup\{\|x_i\|: 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$\beta_p(x_i) = \sup\{\gamma_p(x'(x_i)): x' \in X', \|x'\| \leqslant 1\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Говорят, что оператор $T \in L(X, Y)$ является абсолютно p-суммирующим $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, если существует число ρ такое, что для всех конечных систем (x_i) из X выполняется неравенство $\gamma_p(Tx_i) \leqslant \rho\beta_p(x_i)$. Наименьшее из ρ в этом неравенстве обозначается $\pi_p(T)$. Известно, что π_p является нормой в пространстве всех абсолютно p-суммирующих операторов $\Pi_p(X, Y)$, а $\Pi_p(X, Y)$, наделенное π_p, является банаховым. Ясно, что $\Pi_\infty(X, Y) = L(X, Y)$ и $\pi_\infty(T) = \|T\|$.

Теперь введем в $X \otimes Y$ кросс-нормы ε_p и g_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Рассматривая $X \otimes Y$ как линейное множество в $\Pi_p(X', Y)$, обозначим через ε_p норму в $X \otimes Y$, которую индуцирует π_p. Норма ε_∞ совпадает с индуктивной кросс-нормой λ, определяемой равенством $\lambda(u) = \sup\{|(x' \otimes \otimes y')(u)| : x' \in X', \|x'\| \leqslant 1, y' \in Y', \|y'\| \leqslant 1\}$. Нормы g_p определяются по формуле $g_p(u) = \inf \gamma_p(x_i)\beta_q(y_i)$, где $1/p + 1/q = 1$ (с $1/\infty = 0$) и $\inf$ берется по всевозможным представлениям $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. Отметим, что g_1 совпадает с проективной кросс-нормой γ, определяемой равенством $\gamma(u) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\|: u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\}$.

Будем говорить, что кросс-норма α больше, чем кросс-норма β (или β меньше, чем α), если существует число $c > 0$ такое, что $\alpha(u) \geqslant c\beta(u)$, $u \in X \otimes Y$. Известно, что γ является наибольшей из всех кросс-норм в $X \otimes Y$, а λ меньше, чем любая из кросс-норм ε_p или g_p (здесь, в частности, $c = 1$).

Замкнутая линейная оболочка подмножества $K \subset X$ обозначается $[K]$. Пусть $K \subset X$, $L \subset Y$, а $M = \{x \otimes y : x \in K, y \in L\}$. Прибегнув к кросс-норме γ, легко проверить, что из условий $[K] = X$ и $[L] = Y$ вытекает $[M] = X \otimes_\alpha Y$, где α — произвольная кросс-норма. Пусть X_i, Y_i $(i = 1, 2)$ — банаховы пространства, $T_i \in L(X_i, Y_i)$ и $\alpha = \varepsilon_p$ или $\alpha = g_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Известно, что $T_1 \otimes T_2 \in L(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes_\alpha Y_2)$, где $T_1 \otimes T_2$ определяется линейно формулой $(T_1 \otimes T_2)(x_1 \otimes x_2) = T_1x_1 \otimes T_2x_2$, $x_i \in X_i$, а $X_1 \otimes X_2$ наделено α. Продолжение по непрерывности $T_1 \otimes T_2$ на $X_1 \otimes_\alpha X_2$ обозначим также через $T_1 \otimes T_2$. Заметим, что если $T_i(X_i)$ плотно в $Y_i (i = 1, 2)$, то $(T_1 \otimes T_2)(X_1 \otimes_\alpha X_2)$ плотно в $Y_1 \otimes_\alpha Y_2$.

Оператор $T \in L(X, Y)$ называется p-интегральным $(1 \leqslant p < \infty)$, если существует положительная конечная мера μ на слабо* компактном единичном шаре $U^0 \subset X'$ такая, что QT факторизуется следующим образом:

$$X \xrightarrow{i} C(U^0) \xrightarrow{j} L_p(U^0, \mu) \xrightarrow{S} Y'',$$

где i, j и Q: $Y \to Y''$ — соответствующие канонические вложения и S — линейный оператор с $\|S\| \leqslant 1$. Пространство p-интегральных операторов $I_p(X, Y)$ является банаховым с нормой $i_p(T) = \inf \mu(U^0)^{1/p}$, где $\inf$ берется по всевозможным факторизациям QT. Банаховы пространства p-ядерных и квази-p-ядерных операторов из X в Y определяются так же, как и в [5], и обозначаются соответственно $N_p(X, Y)$ и $QN_p(X, Y)$.

Все необходимые факты о WCG-пространствах можно найти в [6], об аппроксимационном свойстве и о свойстве Данфорда—Петтиса, например, в [2], о тензорных произведениях — в [7–9], об операторных пространствах — в [5, 10, 11].

3. Перейдем к вопросу о слабо компактной порожденности тензорных произведений. Начнем с двух простых наблюдений:

1) *если* $X \otimes_\alpha Y$ *является* WCG-*пространством, то* $X \otimes_\beta Y$ — WCG-*пространство для всех кросс-норм* β, *меньших, чем* α;

2) *если* $X \otimes_\alpha Y$ — WCG-*пространство при кросс-норме* α, *большей, чем* λ, *то* X *и* Y — WCG-*пространства.*

Наблюдение 1) вытекает из следующего очевидного факта: если X — WCG-пространство и область значений $T(X)$ оператора $T \in L(X, Y)$ плотна в Y, то и Y является WCG-пространством. Что же касается 2), то, согласно 1), его достаточно доказать при $\alpha = \lambda$. Так как $X \otimes_\lambda Y$ канонически изометрически изоморфно подпространству $L(X', Y)$ (см. [8]), то $T: A \to Ax'$ будет при произвольном фиксированном $x' \neq 0$ линейной непрерывной сюръекцией из $X \otimes_\lambda Y$ на Y и, следовательно, Y — WCG-пространство. А слабо компактная порожденность X следует, в силу только что доказанного, из изометрической изоморфности $X \otimes_\lambda Y$ и $Y \otimes_\lambda X$.

Поскольку $\gamma = g_1$ — наибольшая из всех кросс-норм, то представляет интерес прежде всего слабо компактная порожденность $X \otimes_\gamma Y$. Последнее тензорное произведение в общем не является WCG-пространством, даже тогда, когда X и Y — рефлексивные пространства с аппроксимационным свойством. Например, если S — несчетное множество, то $l_2(S) \otimes_\gamma l_2(S)$ не является WCG-пространством, поскольку оно содержит топологически дополняемое подпространство, изоморфное $l_1(S)$. Мы имеем следующий «положительный» результат:

Теорема 1. *Если* X *и* Y — *два* WCG-*пространства, причем одно из них сепарабельно или обладает свойством Данфорда—Петтиса, то* $X \otimes_\alpha Y$ *является* WCG-*пространством при всех кросс-нормах* α.

Доказательство достаточно проводить для $\alpha = \gamma$. Ввиду изометрического изоморфизма между $X \otimes_\gamma Y$ и $Y \otimes_\gamma X$ можем предполагать, что ограничения налагают на Y.

Рассмотрим случай, когда Y сепарабельно. Пусть $\{z_1, z_2, \ldots\}$, $z_n \neq 0$, — плотное множество в Y. Пусть, далее, K — слабо компактное множество, порождающее X, $L = \{0, y_1, y_2, \ldots\}$, где $y_n = z_n/(n\|z_n\|)$, и $M = \{x \otimes y : x \in K, y \in L\}$. Так как $[K] = X$ и $[L] = Y$, то $[M] = X \otimes_\gamma Y$. Покажем, что M слабо компактно в $X \otimes_\gamma Y$. Рассмотрим последовательность (u_n) в M. Ясно, что (u_n) содержит подпоследовательность вида $(x_k \otimes y_{n_k})$ или $(x_n \otimes y)$. Ввиду ограниченности (x_k) ясно, что $(x_k \otimes y_{n_k})$ сходится к нулю (заметим, что $0 \in M$) по норме γ. Рассмотрим $(x_n \otimes y)$. В силу слабой компактности $K \subset X$ существует подпоследовательность (x_{n_k}), сходящаяся слабо к некоторому элементу $x \in K$. Следовательно, при произвольном операторе $A \in L(Y, X')$ имеем $(Ay)(x) = \lim_k (Ay)(x_{n_k})$. Так как $(X \otimes_\gamma Y)'$ отождествляется с $L(Y, X')$ (см. [8]), то $(x_{n_k} \otimes y)$ сходится слабо к $x \otimes y$ в $X \otimes_\gamma Y$.

Пусть Y обладает свойством Данфорда—Петтиса. Обозначим через K и L слабо компактные множества, порождающие соответственно X и Y. Тогда $X \otimes_\gamma Y = [M]$, где $M = \{x \otimes y : x \in K,\ y \in L\}$. Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n \otimes y_n)$ в M. В силу слабой компактности множеств $K \subset X$ и $L \subset Y$ можем считать, не ограничивая общности, что (x_n) и (y_n) сходятся слабо соответственно к некоторым элементам $x \in K$ и $y \in L$. Тогда при любом операторе $A \in L(X, Y')$ последовательность $(A(x_n - x))$ сходится слабо к нулю в Y' и, в силу свойства Данфорда—Петтиса пространства Y, получаем, что $\lim_n (A(x_n - x))(y_n - y) = 0$. Так как $(Ax)(y_n) \to_n (Ax)(y)$ и $(Ax_n)(y) = (A'Qy)(x_n) \to_n (A'Qy)(x) = (Ax)(y)$ (где Q — каноническое вложение Y в Y''), то $\lim_n (Ax_n)(y_n) = (Ax)(y)$. И поскольку $(X \otimes_\gamma Y)'$ отождествляется с $L(X, Y')$ (см. [8]), то $(x_n \otimes y_n)$ сходится слабо к $x \otimes y$ в $X \otimes_\gamma Y$.

Замечание 1. В частном случае, когда одно из пространств — например Y — не только сепарабельно, но и обладает базисом, утверждение теоремы 1 следует из результата Шадвика [12]: банахово пространство Z с шаудеровым разложением (P_n) (т. е. с последовательностью ненулевых непрерывных проекторов P_n в Z, удовлетворяющей условиям $P_n P_m = 0$, $n \neq m$, и $z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z$, $z \in Z$) является WCG-пространством, если каждое $P_n(Z)$ — WCG-пространство. Действительно, легко проверить, что $P_n = I \otimes p_n$ (где I — тождественный оператор в X и p_n — одномерные проекторы в Y, связанные естественным образом с базисом (e_n) пространства Y) образуют шаудерово разложение для $Z = X \otimes_\gamma Y$, причем $P_n Z$ изоморфно X.

Используя наблюдение 2) и тот факт, что L_1 и $C(\Omega)$ обладают свойством Данфорда—Петтиса, получаем следующие три следствия (в них X — банахово пространство).

Следствие 1. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой. Пространство X-значных μ-интегрируемых по Бохнеру функций $L_1(X)$ является слабо компактно порожденным тогда и только тогда, когда X — WCG-пространство.*

Для доказательства заметим, что $L_1 = L_1(S, \Sigma, \mu)$ есть WCG-пространство и $L_1(X)$ изометрически изоморфно $L_1 \otimes_\gamma X$ (см. [8]).

Замечание 2. Следствие 1 в случае конечной меры было получено Дж. Дистелем (см. [4] или [2]); он доказал его посредством теории мер, опираясь на теорему факторизации Дейвиса—Фигеля—Джонсона—Пелчинского [13].

Следствие 2. *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой и $P_1(\mu, X)$ — пространство μ-измеримых интегрируемых по Петтису X-значных функций. Пополнение $P_1(\mu, X)$ является WCG-пространством тогда и только тогда, когда X — WCG-пространство.*

Для доказательства достаточно заметить, что пополнение $P_1(\mu, X)$ изометрически изоморфно $L_1 \otimes_\lambda X$ (см., напр., [2]).

Напомним [14, 6], что отделимый компакт Ω называется компактом Эберлейна, если Ω гомеоморфен слабо компактному подмножеству некоторого банахова пространства.

Следствие 3. *Пусть Ω — отделимый компакт. Пространство непрерывных X-значных функций $C_X(\Omega)$ является слабо компактно порожденным тогда и только тогда, когда X — WCG-пространство и Ω — компакт Эберлейна.*

Доказательство использует изометрический изоморфизм между $C_X(\Omega)$ и $C(\Omega) \otimes_\lambda X$ (см. [8]), а также результат Амира и Линденштраусса [14], который обобщается следствием 3, что $C(\Omega)$ является

WCG-пространством тогда и только тогда, когда Ω — компакт Эберлейна.

Как видно из следующей теоремы, для «достаточно маленьких» кросс-норм тензорное произведение будет всегда WCG-пространством.

Теорема 2. *Если X и Y — WCG-пространства, то $X \otimes_\alpha Y$ является WCG-пространством при всех кросс-нормах α, меньших, чем g_2.*

Доказательство достаточно проводить для $\alpha = g_2$. Так как X и Y — WCG-пространства, то вследствие вышеназванной теоремы факторизации (см. [13] или [6]) существуют рефлексивные пространства Z, W и операторы $T \in L(Z, X)$, $S \in L(W, Y)$ такие, что $T(Z)$ и $S(W)$ плотны соответственно в X и Y. Поскольку $T \otimes S \in L(Z \otimes_{g_2} W, X \otimes_{g_2} Y)$ и $(T \otimes S)(Z \otimes_{g_2} W)$ плотно в $X \otimes_{g_2} Y$, то достаточно установить слабо компактную порожденность $Z \otimes_{g_2} W$. Но последнее пространство, по результатам П. Сафара [15], даже рефлексивно.

Теорема 3. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Если*

а) *$p = 1$ и одно из пространств X или Y сепарабельно или обладает свойством Данфорда—Петтиса,*

б) *$1 < p < 2$ и одно из пространств X или Y сепарабельно или обладает свойством Данфорда—Петтиса или же сопряженное X' к X обладает аппроксимационным свойством,*

в) *$2 \leqslant p \leqslant \infty$,*
то $X \otimes_{g_p} Y$ является WCG-пространством тогда и только тогда, когда X и Y — WCG-пространства.

Доказательство. Необходимость ясна из наблюдения 2).

Достаточность. Поскольку g_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, образуют убывающее семейство [9], то в силу теорем 1 и 2 остается доказать слабо компактную порожденность $X \otimes_{g_p} Y$ лишь в случае, когда $1 < p < 2$ и X' обладает аппроксимационным свойством. Так как для Y найдется рефлексивное пространство, которое отображается линейно и непрерывно на плотное в Y множество, то без ограничения общности можем считать Y рефлексивным. Пусть K, L и M — те же, что и в доказательстве второй части теоремы 1, и пусть из произвольной последовательности множества M выделена подпоследовательность $(u_n) = (x_n \otimes y_n)$ такая, что (x_n) и (y_n) сходятся слабо соответственно к x в X и к y в Y. Чтобы показать слабую сходимость (u_n) к $u = x \otimes y$, напомним [9], что $(X \otimes_{g_p} Y)'$ и $\Pi_q(Y, X')$ $(1/p + 1/q = 1)$ канонически изометрически изоморфны. Значит, рассматривая u_n и u как элементы $(\Pi_q(Y, X'))'$, нужно доказать, что (u_n) сходится к u всюду на $\Pi_q(Y, X')$. Для этого воспользуемся теоремой Банаха—Штейнгауза. Заметим, во-первых, что нормы функционалов u_n ограничены, так как $\|u_n\| = g_p(u_n) = \|x_n\|\,\|y_n\|$. Во-вторых, (u_n) сходится к u на $Y' \otimes X' \subset \Pi_q(Y, X')$, так как $u_n(y' \otimes x') = y'(y_n)x'(x_n) \to_n y'(y)x'(x) = u(y' \otimes x')$ при всех $y' \in Y'$ и $x' \in X'$. Остается показать, что $Y' \otimes X'$ плотно в $\Pi_q(Y, X')$. Но в силу рефлексивности Y имеем $\Pi_q(Y, X') = QN_q(Y, X')$ (см. [10]), причем их нормы равны. И так как $Y' \otimes X'$ плотно в $QN_q(Y, X')$, поскольку X' обладает аппроксимационным свойством [5], то $Y' \otimes X'$ плотно в $\Pi_q(Y, X')$.

Теорема 4. *В предположениях теоремы 3, где в а) еще допускается, что X — рефлексивное пространство, обладающее аппроксимационным свойством, имеет место утверждение: $X \otimes_{\varepsilon_p} Y$ — WCG-пространство тогда и только тогда, когда X и Y — WCG-пространства.*

Доказательство необходимости то же, что и в теореме 3.

Достаточность. Пусть сначала выполнены предположения теоремы 3. Так как ε_p меньше, чем g_p (см. [9]), то в силу наблюдения 1) результат вытекает из теоремы 3. Докажем слабо компактную порожденность $X \otimes_{\varepsilon_1} Y$ в предположениях рефлексивности и аппроксимационного свойства X. Как и в доказательстве теоремы 3, достаточно рассматривать случай, когда Y рефлексивно. Поскольку X' рефлексивно и обладает аппроксимационным свойством (см. [8] или [2]), то, по результату Гордона—Льюиса—Резерфорда [16], пространство $\Pi_1(X', Y)$ рефлексивно. И так как $X \otimes_{\varepsilon_1} Y$ канонически изометрически изоморфно подпространству $\Pi_1(X', Y)$, то и оно рефлексивно.

4. Следующие результаты о слабо компактной порожденности операторных пространств вытекают из теорем 3 и 4, а также из того факта, что X' и Y являются WCG-пространствами, если одно из пространств $N_p(X, Y)$, $I_p(X, Y)$, $QN_p(X, Y)$, $\Pi_p(X, Y)$ или $K(X, Y)$ слабо компактно порождено. Последнее утверждение доказывается аналогично наблюдению 2) в разделе 3: при фиксированных $x \neq 0$ и $y' \neq 0$ рассматриваются операторы T на Y и S на X', определяемые равенствами $TA = Ax$, $SA = A'y'$, где A — произвольный элемент из данного операторного пространства и $A' \in L(Y', X')$ — сопряженный к A оператор.

Следствие 4. *Пусть X и Y — банаховы пространства и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если сопряженное пространство X' и Y соответственно удовлетворяют тем же условиям, что и X и Y в теореме 3, то $N_p(X, Y)$ является WCG-пространством тогда и только тогда, когда X' и Y — WCG-пространства.*

Для доказательства отметим, что если X' и Y — WCG-пространства, то, по теореме 3, $X' \otimes_{g_p} Y$ — WCG-пространство. Но так как существует сюръекция $T \in L(X' \otimes_{g_p} Y, N_p(X, Y))$ [9], то и $N_p(X, Y)$ является WCG-пространством.

Следствие 5. *Пусть выполнены предположения следствия 4 и $1 \leqslant p < \infty$. Если X' обладает аппроксимационным свойством или же Y топологически дополняемо в Y'', то $I_p(X, Y)$ является WCG-пространством тогда и только тогда, когда X' и Y — WCG-пространства.*

Замечание 3. Если X'' обладает аппроксимационным свойством, то и X' обладает этим свойством (см. [8] или [2]).

Доказательство. Заметим, что если X' — WCG-пространство, то оно обладает свойством Радона—Никодима (см. [2] или [6]). Но если X' обладает и аппроксимационным свойством, то, как отмечает С. Хейнрих (см. [3], с. 172, или [1]), $I_p(X, Y) = N_p(X, Y)$, $1 \leqslant p < \infty$, причем эти пространства изоморфны, поскольку их нормы сравнимы. То же равенство имеет место и в случае, когда Y топологически дополняемо в Y'' (см. [1] или [3]). Остается применить следствие 4.

Следствие 6. *Пусть X и Y — банаховы пространства такие, что X' или Y обладает аппроксимационным свойством, и пусть $1 \leqslant p < \infty$. Если X' и Y соответственно удовлетворяют тем же условиям, что и X и Y в теореме 4, то следующие утверждения равносильны:*

1) *$QN_p(X, Y)$ — WCG-пространство,*

2) *$\Pi_p(X, Y)$ — WCG-пространство,*

3) *X' и Y — WCG-пространства.*

Доказательство. Если X' и Y — WCG-пространства, то, по теореме 4, $X' \otimes_{\varepsilon_p} Y$ — WCG-пространство. Как мы отмечали в предыдущем доказательстве, X' обладает свойством Радона—Никодима, поэтому $QN_p(X, Y) = \Pi_p(X, Y)$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. [1] или [3]), причем их нормы равны. Известно [5], что аппроксимационное свойство X' или Y гарантирует плотность $X' \otimes Y$ в $QN_p(X, Y)$. Значит, $X' \otimes_{\varepsilon_p} Y = \Pi_p(X, Y)$ и, следовательно, $\Pi_p(X, Y)$ и $QN_p(X, Y)$ — WCG-пространства.

С л е д с т в и е 7. *Если X и Y — банаховы пространства такие, что X′ или Y обладает аппроксимационным свойством, то K(X, Y) — WCG-пространство тогда и только тогда, когда X′ и Y — WCG-пространства.*

Для доказательства воспользуемся теоремой 4, учитывая, что $\varepsilon_\infty = \lambda$ и, в наших предположениях, пространства $X' \otimes_\lambda Y$ и $K(X, Y)$ канонически изометрически изоморфны [8].

З а м е ч а н и е 4. По результату Н. Дж. Калтона [17] о нерефлексивности $L(X, X)$ ясно, что $K(X, X)$ не является рефлексивным, если X — рефлексивное несепарабельное пространство, обладающее аппроксимационным свойством, поскольку в этом случае $(K(X, X))'' = (X' \otimes_\lambda X)'' = (X \otimes_\gamma X')' = L(X, X)$ (см. [8]). Однако, по следствию 7, пространство $K(X, X)$ слабо компактно порождено.

ЛИТЕРАТУРА

1. М а к а р о в Б. М., С а м а р с к и й В. Г., Функц. анализ и его прилож., **15**, № 3, 89—90 (1981).
2. D i e s t e l, J., U h l, J. J., Jr., Vector measures. Math. Surveys, **15**, Amer. Math. Soc., Providence—Rhode Island, 1977.
3. H e i n r i c h, S., Serdica Bulg. Math. Publ., **3**, 168—175 (1977).
4. D i e s t e l, J., Proc. Amer. Math. Soc., **48**, № 2, 508—510 (1975).
5. P e r s s o n, A., P i e t s c h, A., Stud. Math., **33**, 19—62 (1969).
6. Д и с т е л ь Дж., Геометрия банаховых пространств. Избранные главы, Киев, «Вища школа», 1980.
7. Д э й М. М., Нормированные линейные пространства, М., ИЛ, 1961.
8. G r o t h e n d i e c k, A., Mem. Amer. Math. Soc., **16**, 1—191 (1955).
9. S a p h a r, P., Stud. Math., **38**, 71—100 (1970).
10. P e r s s o n, A., Stud. Math., **33**, 213—222 (1969).
11. P i e t s c h, A., Stud. Math., **28**, 333—353 (1967).
12. C h a d w i c k, J. J. M., Bull. Austral. Math. Soc., **6**, 133—144 (1972).
13. D a v i s, W. J., F i g i e l, T., J o h n s o n, W. B., P e l c z y n s k i, A., J. Funct. Anal., **17**, 311—327 (1974).
14. A m i r, D., L i n d e n s t r a u s s, J., Ann. Math., **88**, 35—46 (1968).
15. S a p h a r, P., Israel J. Math., **13**, 379—399 (1972).
16. G o r d o n, Y., L e w i s, D. R., R e t h e r f o r d, J. R., J. Funct. Anal., **14**, 85—129 (1973).
17. K a l t o n, N. J., Math. Ann., **208**, 267—278 (1974).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 18/II 1982

Eve OJA

NÕRGALT KOMPAKTSE OSAHULGA GENEREERITUD TENSORKORRUTISED JA OPERAATORITE RUUMID

On uuritud, millal *WCG*-ruumide X ja Y tensorkorrutised $X \otimes_\alpha Y$ on *WCG*-ruumid. Saadud tulemusi on rakendatud Bochneri mõttes integreeruvate, kompaktil pidevate või Pettise mõttes integreeruvate X-väärtustega funktsioonide ruumidele, samuti p-tuuma-, p-integraal-, kvaasi-p-tuuma-, absoluutselt p-summeerivate ja kompaktsete operaatorite ruumidele.

Eve OJA

WCG-PRODUITS TENSORIELS ET ESPACES D'OPÉRATEURS

Soient X et Y deux espaces de Banach. Une norme α sur $X \otimes Y$ est dite tensorielle si $\alpha(x \otimes y) = \|x\|\,\|y\|$, $x \in X$, $y \in Y$. Le complété de $X \otimes Y$ muni de α est noté $X \otimes_\alpha Y$.

Soient X et Y deux *WCG*-espaces de Banach. Nous démontrons (cf. théorème 2) que $X \otimes_\alpha Y$ est *WCG* pour les normes tensorielles α plus petites que g_2 (cf. [9]), et (cf. théorème 1) si l'un des espaces X ou Y est séparable ou possède la propriété de Dunford-Pettis alors $X \otimes_\alpha Y$ est *WCG* pour toutes les normes tensorielles α. Nous caractérisons la *WCG*-propriété de $X \otimes_\alpha Y$ pour les normes tensorielles $\alpha = g_p$ et $\alpha = g_p\backslash = \varepsilon_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, étudiées dans [9, 15]. Par exemple, dans le cas où le dual X' a la propriété d'approximation et $1 < p < 2$, nous obtenons que $X \otimes_{g_p} Y$ est *WCG* si, et seulement si X et Y sont *WCG* (cf. théorème 3).

En application de ces résultats nous étudions la *WCG*-propriété des espaces de fonctions à valeurs dans X Bochner intégrables, continues sur un compact ou Pettis intégrables, et des espaces d'opérateurs p-nucléaires, p-intégraux, quasi-p-nucléaires, absolument p-sommants et compacts.