

Эве Оя

СЛАБО КОМПАКТНО ПОРОЖДЕННЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРОВ

(Представил А. Хумал)

Исследуется, когда тензорные произведения $X \otimes_{\alpha} Y$ WCG -пространств X и Y являются WCG -пространствами. В частности, доказывается, что $X \otimes_{\alpha} Y$ является WCG -пространством при всех кросс-нормах α , если одно из пространств X или Y является сепарабельным или обладает свойством Данфорда—Петтиса. Полученные результаты применяются для изучения слабо компактной порожденности пространств X -значных функций, непрерывных на компакте, интегрируемых по Бохнеру или по Петтису, а также пространств p -ядерных, p -интегральных, квази- p -ядерных, абсолютно p -суммирующих и компактных операторов.

1. Пусть X и Y — банаховы пространства (или оба реальные, или оба комплексные). Норма α в тензорном произведении $X \otimes Y$ называется кросс-нормой или скрещенной нормой, если $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$ при всех $x \in X$, $y \in Y$. Обозначим пополнение тензорного произведения $X \otimes Y$, наделенного кросс-нормой α , через $X \otimes_{\alpha} Y$.

В последнее десятилетие многими авторами изучался вопрос, когда какое-либо определенное линейно-топологическое свойство (напр., рефлексивность, слабая секвенциальная полнота и пр.) пространств X (или его сопряженного X') и Y наследуется тензорными произведениями $X \otimes_{\alpha} Y$ или пространствами операторов из X в Y (см., напр., [1–3] и содержащиеся там библиографии). Объектом исследования настоящей работы является свойство слабо компактной порожденности.

Банахово пространство X называется WCG -пространством или слабо компактно порожденным пространством, если оно содержит слабо компактное множество (согласно теореме Эберлейна—Шмульяна, слабая компактность равносильна слабой секвенциальной компактности), линейная оболочка которого плотна в X . Примерами WCG -пространств являются сепарабельные пространства, рефлексивные пространства и пространства $L_1 = L_1(S, \Sigma, \mu)$ (классов эквивалентности) μ -суммируемых функций на S , если (S, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой.

Вопрос о слабо компактной порожденности тензорного произведения изучался Дж. Дистелем (см. [4], или [2]), который показал, что $L_1 \otimes_{\gamma} X$ является WCG -пространством, если (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, X — WCG -пространство, а γ — проективная кросс-норма. Мы покажем, что для многих кросс-норм α слабо компактная порожденность пространств X и Y гарантирует слабо компактную порожденность $X \otimes_{\alpha} Y$, а для остальных кросс-норм укажем налагаемые на одно из пространств X или Y условия, при которых верна та же импликация. Из наших результатов вытекает, в частности, что в теореме Дистеля L_1 можно заменить произвольным WCG -пространством, обладающим свойством Данфорда—Петтиса. Результаты о тензорных произведениях применим для изучения слабо компактной порожденности операторных пространств.

2. Введем необходимые определения и обозначения. Через $L(X, Y)$ обозначается пространство непрерывных линейных операторов из X в Y , через $K(X, Y)$ — его подпространство компактных операторов, наделенные обычной операторной нормой. Говорят, что X обладает аппроксимационным свойством, если для любого компактного подмножества $K \subset X$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует оператор конечного ранга $T \in L(X, X)$ такой, что $\|Tx - x\| < \varepsilon$ при всех $x \in K$. Говорят, что X обладает свойством Данфорда—Петтиса, если $\lim_n x'_n(x_n) = 0$ при всех слабо сходящихся к нулю последовательностях (x_n) в X и (x'_n) в X' .

Пусть $(x_i) = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ — конечная система элементов пространства X . Введем следующие обозначения:

$$\gamma_p(x_i) = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\gamma_\infty(x_i) = \sup \{ \|x_i\| : 1 \leq i \leq n \},$$

$$\beta_p(x_i) = \sup \{ \gamma_p(x'(x_i)) : x' \in X', \|x'\| \leq 1 \}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Говорят, что оператор $T \in L(X, Y)$ является абсолютно p -суммирующим ($1 \leq p \leq \infty$), если существует число ρ такое, что для всех конечных систем (x_i) из X выполняется неравенство $\gamma_p(Tx_i) \leq \rho \beta_p(x_i)$. Наименьшее из ρ в этом неравенстве обозначается $\pi_p(T)$. Известно, что π_p является нормой в пространстве всех абсолютно p -суммирующих операторов $\Pi_p(X, Y)$, а $\Pi_p(X, Y)$, наделенное π_p , является банаховым. Ясно, что $\Pi_\infty(X, Y) = L(X, Y)$ и $\pi_\infty(T) = \|T\|$.

Теперь введем в $X \otimes Y$ кросс-нормы e_p и g_p , $1 \leq p \leq \infty$. Рассматривая $X \otimes Y$ как линейное множество в $\Pi_p(X', Y)$, обозначим через e_p норму в $X \otimes Y$, которую индуцирует π_p . Норма e_∞ совпадает с индуктивной кросс-нормой λ , определяемой равенством $\lambda(u) = \sup \{ |(x' \otimes y')(u)| : x' \in X', \|x'\| \leq 1, y' \in Y', \|y'\| \leq 1 \}$. Нормы g_p определяются по формуле $g_p(u) = \inf \gamma_p(x_i) \beta_q(y_i)$, где $1/p + 1/q = 1$ (с $1/\infty = 0$) и \inf берется по всевозможным представлениям $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. Отметим, что g_1 совпадает с проективной кросс-нормой γ , определяемой равенством $\gamma(u) = \inf \{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \}$.

Будем говорить, что кросс-норма α больше, чем кросс-норма β (или β меньше, чем α), если существует число $c > 0$ такое, что $\alpha(u) \geq c\beta(u)$, $u \in X \otimes Y$. Известно, что γ является наибольшей из всех кросс-норм в $X \otimes Y$, а λ меньше, чем любая из кросс-норм e_p или g_p (здесь, в частности, $c = 1$).

Замкнутая линейная оболочка подмножества $K \subset X$ обозначается $[K]$. Пусть $K \subset X$, $L \subset Y$, а $M = \{x \otimes y : x \in K, y \in L\}$. Прибегнув к кросс-норме γ , легко проверить, что из условий $[K] = X$ и $[L] = Y$ вытекает $[M] = X \otimes_\alpha Y$, где α — произвольная кросс-норма. Пусть X_i , Y_i ($i = 1, 2$) — банаховы пространства, $T_i \in L(X_i, Y_i)$ и $\alpha = e_p$ или $\alpha = g_p$ ($1 \leq p \leq \infty$). Известно, что $T_1 \otimes T_2 \in L(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes_\alpha Y_2)$, где $T_1 \otimes T_2$ определяется линейно формулой $(T_1 \otimes T_2)(x_1 \otimes x_2) = T_1 x_1 \otimes T_2 x_2$, $x_i \in X_i$, а $X_1 \otimes X_2$ наделено α . Продолжение по непрерывности $T_1 \otimes T_2$ на $X_1 \otimes_\alpha X_2$ обозначим также через $T_1 \otimes T_2$. Заметим, что если $T_i(X_i)$ плотно в Y_i ($i = 1, 2$), то $(T_1 \otimes T_2)(X_1 \otimes_\alpha X_2)$ плотно в $Y_1 \otimes_\alpha Y_2$.

Оператор $T \in L(X, Y)$ называется p -интегральным ($1 \leq p < \infty$), если существует положительная конечная мера μ на слабо* компактном единичном шаре $U^0 \subset X'$ такая, что QT факторизуется следующим образом:

$$X \xrightarrow{i} C(U^0) \xrightarrow{j} L_p(U^0, \mu) \xrightarrow{s} Y'',$$

где i, j и $Q: Y \rightarrow Y''$ — соответствующие канонические вложения и S — линейный оператор с $\|S\| \leq 1$. Пространство p -интегральных операторов $I_p(X, Y)$ является банаховым с нормой $i_p(T) = \inf \mu(U^0)^{1/p}$, где \inf берется по всевозможным факторизациям QT . Банаховы пространства p -ядерных и квази- p -ядерных операторов из X в Y определяются так же, как и в [5], и обозначаются соответственно $N_p(X, Y)$ и $QN_p(X, Y)$.

Все необходимые факты о WCG -пространствах можно найти в [6], об аппроксимационном свойстве и о свойстве Данфорда—Петтиса, например, в [2], о тензорных произведениях — в [7–9], об операторных пространствах — в [5, 10, 11].

3. Перейдем к вопросу о слабо компактной порожденности тензорных произведений. Начнем с двух простых наблюдений:

- 1) если $X \otimes_\alpha Y$ является WCG -пространством, то $X \otimes_\beta Y$ — WCG -пространство для всех кросс-норм β , меньших, чем α ;
- 2) если $X \otimes_\alpha Y$ — WCG -пространство при кросс-норме α , большей, чем λ , то X и Y — WCG -пространства.

Наблюдение 1) вытекает из следующего очевидного факта: если X — WCG -пространство и область значений $T(X)$ оператора $T \in L(X, Y)$ плотна в Y , то и Y является WCG -пространством. Что же касается 2), то, согласно 1), его достаточно доказать при $\alpha = \lambda$. Так как $X \otimes_\lambda Y$ канонически изометрически изоморфно подпространству $L(X', Y)$ (см. [8]), то $T: A \rightarrow Ax'$ будет при произвольном фиксированном $x' \neq 0$ линейной непрерывной сюръекцией из $X \otimes_\lambda Y$ на Y и, следовательно, Y — WCG -пространство. А слабо компактная порожденность X следует, в силу только что доказанного, из изометрической изоморфности $X \otimes_\lambda Y$ и $Y \otimes_\lambda X$.

Поскольку $\gamma = g_1$ — наибольшая из всех кросс-норм, то представляет интерес прежде всего слабо компактная порожденность $X \otimes_\gamma Y$. Последнее тензорное произведение в общем не является WCG -пространством, даже тогда, когда X и Y — рефлексивные пространства с аппроксимационным свойством. Например, если S — счетное множество, то $l_2(S) \otimes_\gamma l_2(S)$ не является WCG -пространством, поскольку оно содержит топологически дополняемое подпространство, изоморфное $l_1(S)$. Мы имеем следующий «положительный» результат:

Теорема 1. Если X и Y — два WCG -пространства, причем одно из них сепарабельно или обладает свойством Данфорда—Петтиса, то $X \otimes_\alpha Y$ является WCG -пространством при всех кросс-нормах α .

Доказательство достаточно проводить для $\alpha = \gamma$. Ввиду изометрического изоморфизма между $X \otimes_\gamma Y$ и $Y \otimes_\gamma X$ можем предполагать, что ограничения налагают на Y .

Рассмотрим случай, когда Y сепарабельно. Пусть $\{z_1, z_2, \dots\}$, $z_n \neq 0$, — плотное множество в Y . Пусть, далее, K — слабо компактное множество, порождающее X , $L = \{0, y_1, y_2, \dots\}$, где $y_n = z_n / (n \|z_n\|)$, и $M = \{x \otimes y : x \in K, y \in L\}$. Так как $[K] = X$ и $[L] = Y$, то $[M] = X \otimes_\gamma Y$. Покажем, что M слабо компактно в $X \otimes_\gamma Y$. Рассмотрим последовательность (u_n) в M . Ясно, что (u_n) содержит подпоследовательность вида $(x_h \otimes y_{n_k})$ или $(x_n \otimes y)$. Ввиду ограниченности (x_h) ясно, что $(x_h \otimes y_{n_k})$ сходится к нулю (заметим, что $0 \in M$) по норме γ . Рассмотрим $(x_n \otimes y)$. В силу слабой компактности $K \subset X$ существует подпоследовательность (x_{n_k}) , сходящаяся слабо к некоторому элементу $x \in K$. Следовательно, при произвольном операторе $A \in L(Y, X')$ имеем $(Ay)(x) = \lim_k (Ay)(x_{n_k})$. Так как $(X \otimes_\gamma Y)'$ отождествляется с $L(Y, X')$ (см. [8]), то $(x_{n_k} \otimes y)$ сходится слабо к $x \otimes y$ в $X \otimes_\gamma Y$.

Пусть Y обладает свойством Данфорда—Петтиса. Обозначим через K и L слабо компактные множества, порождающие соответственно X и Y . Тогда $X \otimes_{\gamma} Y = [M]$, где $M = \{x \otimes y : x \in K, y \in L\}$. Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n \otimes y_n)$ в M . В силу слабой компактности множеств $K \subset X$ и $L \subset Y$ можем считать, не ограничивая общности, что (x_n) и (y_n) сходятся слабо соответственно к некоторым элементам $x \in K$ и $y \in L$. Тогда при любом операторе $A \in L(X, Y')$ последовательность $(A(x_n - x))$ сходится слабо к нулю в Y' и, в силу свойства Данфорда—Петтиса пространства Y , получаем, что $\lim_n (A(x_n - x))(y_n - y) = 0$. Так как $(Ax)(y_n) \rightarrow_n (Ax)(y)$ и $(Ax_n)(y) = (A'Qy)(x_n) \rightarrow_n (A'Qy)(x) = (Ax)(y)$ (где Q — каноническое вложение Y в Y''), то $\lim_n (Ax_n)(y_n) = (Ax)(y)$. И поскольку $(X \otimes_{\gamma} Y)'$ отождествляется с $L(X, Y')$ (см. [8]), то $(x_n \otimes y_n)$ сходится слабо к $x \otimes y$ в $X \otimes_{\gamma} Y$.

Замечание 1. В частном случае, когда одно из пространств — например Y — не только сепарабельно, но и обладает базисом, утверждение теоремы 1 следует из результата Шадвика [12]: банахово пространство Z с шаудеровым разложением (P_n) (т. е. с последовательностью ненулевых непрерывных проекторов P_n в Z , удовлетворяющей условиям $P_n P_m = 0$, $n \neq m$, и $z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z$, $z \in Z$) является WCG-пространством, если каждое $P_n(Z)$ — WCG-пространство. Действительно, легко проверить, что $P_n = I \otimes p_n$ (где I — тождественный оператор в X и p_n — одномерные проекторы в Y , связанные естественным образом с базисом (e_n) пространства Y) образуют шаудерово разложение для $Z = X \otimes_{\gamma} Y$, причем $P_n Z$ изоморфно X .

Используя наблюдение 2) и тот факт, что L_1 и $C(\Omega)$ обладают свойством Данфорда—Петтиса, получаем следующие три следствия (в них X — банахово пространство).

Следствие 1. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой. Пространство X -значных μ -интегрируемых по Бохнеру функций $L_1(X)$ является слабо компактно порожденным тогда и только тогда, когда X — WCG-пространство.

Для доказательства заметим, что $L_1 = L_1(S, \Sigma, \mu)$ есть WCG-пространство и $L_1(X)$ изометрически изоморфно $L_1 \otimes_{\gamma} X$ (см. [8]).

Замечание 2. Следствие 1 в случае конечной меры было получено Дж. Дистелем (см. [4] или [2]); он доказал его посредством теории мер, опираясь на теорему факторизации Дейвиса—Фигеля—Джонсона—Пелчинского [13].

Следствие 2. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой и $P_1(\mu, X)$ — пространство μ -измеримых интегрируемых по Петтису X -значных функций. Пополнение $P_1(\mu, X)$ является WCG-пространством тогда и только тогда, когда X — WCG-пространство.

Для доказательства достаточно заметить, что пополнение $P_1(\mu, X)$ изометрически изоморфно $L_1 \otimes_{\lambda} X$ (см., напр., [2]).

Напомним [14, 6], что отделимый компакт Ω называется компактом Эберлейна, если Ω гомеоморфен слабо компактному подмножеству некоторого банахова пространства.

Следствие 3. Пусть Ω — отделимый компакт. Пространство непрерывных X -значных функций $C_X(\Omega)$ является слабо компактно порожденным тогда и только тогда, когда X — WCG-пространство и Ω — компакт Эберлейна.

Доказательство использует изометрический изоморфизм между $C_X(\Omega)$ и $C(\Omega) \otimes_{\lambda} X$ (см. [8]), а также результат Амира и Линденштраусса [14], который обобщается следствием 3, что $C(\Omega)$ является

WCG-пространством тогда и только тогда, когда Ω — компакт Эберлейна.

Как видно из следующей теоремы, для «достаточно маленьких» кросс-норм тензорное произведение будет всегда WCG-пространством.

Теорема 2. Если X и Y — WCG-пространства, то $X \otimes_{\alpha} Y$ является WCG-пространством при всех кросс-нормах α , меньших, чем g_2 .

Доказательство достаточно проводить для $\alpha = g_2$. Так как X и Y — WCG-пространства, то вследствие вышеназванной теоремы факторизации (см. [13] или [6]) существуют рефлексивные пространства Z, W и операторы $T \in L(Z, X), S \in L(W, Y)$ такие, что $T(Z)$ и $S(W)$ плотны соответственно в X и Y . Поскольку $T \otimes S \in L(Z \otimes_{g_2} W, X \otimes_{g_2} Y)$ и $(T \otimes S)(Z \otimes_{g_2} W)$ плотно в $X \otimes_{g_2} Y$, то достаточно установить слабо компактную порожденность $Z \otimes_{g_2} W$. Но последнее пространство, по результатам П. Сафара [15], даже рефлексивно.

Теорема 3. Пусть X и Y — банаховы пространства. Если

а) $p = 1$ и одно из пространств X или Y сепарабельно или обладает свойством Данфорда—Петтиса,

б) $1 < p < 2$ и одно из пространств X или Y сепарабельно или обладает свойством Данфорда—Петтиса или же сопряженное X' к X обладает аппроксимационным свойством,

в) $2 \leq p \leq \infty$,

то $X \otimes_{g_p} Y$ является WCG-пространством тогда и только тогда, когда X и Y — WCG-пространства.

Доказательство. Необходимость ясна из наблюдения 2).

Достаточность. Поскольку $g_p, 1 \leq p \leq \infty$, образуют убывающее семейство [9], то в силу теорем 1 и 2 остается доказать слабо компактную порожденность $X \otimes_{g_p} Y$ лишь в случае, когда $1 < p < 2$ и X' обладает аппроксимационным свойством. Так как для Y найдется рефлексивное пространство, которое отображается линейно и непрерывно на плотное в Y множество, то без ограничения общности можем считать Y рефлексивным. Пусть K, L и M — те же, что и в доказательстве второй части теоремы 1, и пусть из произвольной последовательности множества M выделена подпоследовательность $(u_n) = (x_n \otimes y_n)$ такая, что (x_n) и (y_n) сходятся слабо соответственно к x в X и к y в Y . Чтобы показать слабую сходимость (u_n) к $u = x \otimes y$, напомним [9], что $(X \otimes_{g_p} Y)'$ и $\Pi_q(Y, X')$ ($1/p + 1/q = 1$) канонически изометрически изоморфны. Значит, рассматривая u_n и u как элементы $(\Pi_q(Y, X'))'$, нужно доказать, что (u_n) сходится к u всюду на $\Pi_q(Y, X')$. Для этого воспользуемся теоремой Банаха—Штейнгауза. Заметим, во-первых, что нормы функционалов u_n ограничены, так как $\|u_n\| = g_p(u_n) = \|x_n\| \|y_n\|$. Во-вторых, (u_n) сходится к u на $Y' \otimes X' \subset \Pi_q(Y, X')$, так как $u_n(y' \otimes x') = y'(y_n)x'(x_n) \rightarrow y'(y)x'(x) = u(y' \otimes x')$ при всех $y' \in Y'$ и $x' \in X'$. Остается показать, что $Y' \otimes X'$ плотно в $\Pi_q(Y, X')$. Но в силу рефлексивности Y имеем $\Pi_q(Y, X') = QN_q(Y, X')$ (см. [10]), причем их нормы равны. И так как $Y' \otimes X'$ плотно в $QN_q(Y, X')$, поскольку X' обладает аппроксимационным свойством [5], то $Y' \otimes X'$ плотно в $\Pi_q(Y, X')$.

Теорема 4. В предположениях теоремы 3, где в а) еще допускается, что X — рефлексивное пространство, обладающее аппроксимационным свойством, имеет место утверждение: $X \otimes_{g_p} Y$ — WCG-пространство тогда и только тогда, когда X и Y — WCG-пространства.

Доказательство необходимости то же, что и в теореме 3.

Достаточность. Пусть сначала выполнены предположения теоре-

мы 3. Так как ε_p меньше, чем g_p (см. [9]), то в силу наблюдения 1) результат вытекает из теоремы 3. Докажем слабо компактную порожденность $X \otimes_{\varepsilon_1} Y$ в предположениях рефлексивности и аппроксимационного свойства X . Как и в доказательстве теоремы 3, достаточно рассматривать случай, когда Y рефлексивно. Поскольку X' рефлексивно и обладает аппроксимационным свойством (см. [8] или [2]), то, по результату Гордона—Льюнса—Резерфорда [16], пространство $\Pi_1(X', Y)$ рефлексивно. И так как $X \otimes_{\varepsilon_1} Y$ канонически изометрически изоморфно подпространству $\Pi_1(X', Y)$, то и оно рефлексивно.

4. Следующие результаты о слабо компактной порожденности операторных пространств вытекают из теорем 3 и 4, а также из того факта, что X' и Y являются WCG-пространствами, если одно из пространств $N_p(X, Y)$, $I_p(X, Y)$, $QN_p(X, Y)$, $\Pi_p(X, Y)$ или $K(X, Y)$ слабо компактно порождено. Последнее утверждение доказывается аналогично наблюдению 2) в разделе 3: при фиксированных $x \neq 0$ и $y' \neq 0$ рассматриваются операторы T на Y и S на X' , определяемые равенствами $TA = Ax$, $SA = A'y'$, где A — произвольный элемент из данного операторного пространства и $A' \in L(Y', X')$ — сопряженный к A оператор.

Следствие 4. Пусть X и Y — банаховы пространства и $1 \leq p \leq \infty$. Если сопряженное пространство X' и Y соответственно удовлетворяют тем же условиям, что и X и Y в теореме 3, то $N_p(X, Y)$ является WCG-пространством тогда и только тогда, когда X' и Y — WCG-пространства.

Для доказательства отметим, что если X' и Y — WCG-пространства, то, по теореме 3, $X' \otimes_{g_p} Y$ — WCG-пространство. Но так как существует сюръекция $T \in L(X' \otimes_{g_p} Y, N_p(X, Y))$ [9], то и $N_p(X, Y)$ является WCG-пространством.

Следствие 5. Пусть выполнены предположения следствия 4 и $1 \leq p < \infty$. Если X' обладает аппроксимационным свойством или же Y топологически дополняемо в Y'' , то $I_p(X, Y)$ является WCG-пространством тогда и только тогда, когда X' и Y — WCG-пространства.

Замечание 3. Если X'' обладает аппроксимационным свойством, то и X' обладает этим свойством (см. [8] или [2]).

Доказательство. Заметим, что если X' — WCG-пространство, то оно обладает свойством Радона—Никодима (см. [2] или [6]). Но если X' обладает и аппроксимационным свойством, то, как отмечает С. Хейнрих (см. [3], с. 172, или [1]), $I_p(X, Y) = N_p(X, Y)$, $1 \leq p < \infty$, причем эти пространства изоморфны, поскольку их нормы сравнимы. То же равенство имеет место и в случае, когда Y топологически дополняемо в Y'' (см. [1] или [3]). Остается применить следствие 4.

Следствие 6. Пусть X и Y — банаховы пространства такие, что X' или Y обладает аппроксимационным свойством, и пусть $1 \leq p < \infty$. Если X' и Y соответственно удовлетворяют тем же условиям, что и X и Y в теореме 4, то следующие утверждения равносильны:

- 1) $QN_p(X, Y)$ — WCG-пространство,
- 2) $\Pi_p(X, Y)$ — WCG-пространство,
- 3) X' и Y — WCG-пространства.

Доказательство. Если X' и Y — WCG-пространства, то, по теореме 4, $X' \otimes_{\varepsilon_p} Y$ — WCG-пространство. Как мы отмечали в предыдущем доказательстве, X' обладает свойством Радона—Никодима, поэтому $QN_p(X, Y) = \Pi_p(X, Y)$, $1 \leq p < \infty$ (см. [1] или [3]), причем их нормы равны. Известно [5], что аппроксимационное свойство X' или Y гарантирует плотность $X' \otimes Y$ в $QN_p(X, Y)$. Значит, $X' \otimes_{\varepsilon_p} Y = \Pi_p(X, Y)$ и, следовательно, $\Pi_p(X, Y)$ и $QN_p(X, Y)$ — WCG-пространства.

Следствие 7. Если X и Y — банаховы пространства такие, что X' или Y обладает аппроксимационным свойством, то $K(X, Y)$ — WCG-пространство тогда и только тогда, когда X' и Y — WCG-пространства.

Для доказательства воспользуемся теоремой 4, учитывая, что $\varepsilon_\infty = \lambda$ и, в наших предположениях, пространства $X' \otimes_\lambda Y$ и $K(X, Y)$ канонически изометрически изоморфны [8].

Замечание 4. По результату Н. Дж. Калтона [17] о нереклексивности $L(X, X)$ ясно, что $K(X, X)$ не является рефлексивным, если X — рефлексивное несепарабельное пространство, обладающее аппроксимационным свойством, поскольку в этом случае $(K(X, X))' = (X' \otimes_\lambda X)'' = (X \otimes_\lambda X')' = L(X, X)$ (см. [8]). Однако, по следствию 7, пространство $K(X, X)$ слабо компактно порождено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров Б. М., Самарский В. Г., Функци. анализ и его прилож., 15, № 3, 89—90 (1981).
2. Diestel, J., Uhl, J. J., Jr., Vector measures. Math. Surveys, 15, Amer. Math. Soc., Providence—Rhode Island, 1977.
3. Heinrich, S., Serdica Bulg. Math. Publ., 3, 168—175 (1977).
4. Diestel, J., Proc. Amer. Math. Soc., 48, № 2, 508—510 (1975).
5. Persson, A., Pietsch, A., Stud. Math., 33, 19—62 (1969).
6. Дистель Дж., Геометрия банаховых пространств. Избранные главы, Киев, «Вища школа», 1980.
7. Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, М., ИЛ, 1961.
8. Grothendieck, A., Mem. Amer. Math. Soc., 16, 1—191 (1955).
9. Saphar, P., Stud. Math., 38, 71—100 (1970).
10. Persson, A., Stud. Math., 33, 213—222 (1969).
11. Pietsch, A., Stud. Math., 28, 333—353 (1967).
12. Chadwick, J. J. M., Bull. Austral. Math. Soc., 6, 133—144 (1972).
13. Davis, W. J., Figiel, T., Johnson, W. B., Pełczyński, A., J. Funct. Anal., 17, 311—327 (1974).
14. Amir, D., Lindenstrauss, J., Ann. Math., 88, 35—46 (1968).
15. Saphar, P., Israel J. Math., 13, 379—399 (1972).
16. Gordon, Y., Lewis, D. R., Retherford, J. R., J. Funct. Anal., 14, 85—129 (1973).
17. Kalton, N. J., Math. Ann., 208, 267—278 (1974).

Тартуский государственный
университет

Поступила в редакцию
18/II 1982

Eve OJA

NÖRGALT KOMPAKTSE OSAHULGA GENEREERITUD TENSORKORRUTISED JA OPERAATORITE RUUMID

On uuritud, millal WCG-ruumide X ja Y tensorkorrutised $X \otimes_\alpha Y$ on WCG-ruumid. Saadud tulemusi on rakendatud Bochneri mõttes integreeruvate, kompaktil pidevate või Pettise mõttes integreeruvate X -väärtustega funktsioonide ruumidele, samuti p -tuuma-, p -integraal-, kvaasi- p -tuuma-, absoluutselt p -summeerivate ja kompaksete operaatorite ruumidele.

WCG-PRODUITS TENSORIELS ET ESPACES D'OPÉRATEURS

Soient X et Y deux espaces de Banach. Une norme α sur $X \otimes Y$ est dite tensorielle si $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$, $x \in X$, $y \in Y$. Le complété de $X \otimes Y$ muni de α est noté $X \otimes_{\alpha} Y$.

Soient X et Y deux WCG-espaces de Banach. Nous démontrons (cf. théorème 2) que $X \otimes_{\alpha} Y$ est WCG pour les normes tensorielles α plus petites que g_2 (cf. [9]), et (cf. théorème 1) si l'un des espaces X ou Y est séparable ou possède la propriété de Dunford-Pettis alors $X \otimes_{\alpha} Y$ est WCG pour toutes les normes tensorielles α . Nous caractérisons la WCG-propriété de $X \otimes_{\alpha} Y$ pour les normes tensorielles $\alpha = g_p$ et $\alpha = g_p \setminus \varepsilon_p$, $1 \leq p \leq \infty$, étudiées dans [9, 15]. Par exemple, dans le cas où le dual X' a la propriété d'approximation et $1 < p < 2$, nous obtenons que $X \otimes_{g_p} Y$ est WCG si, et seulement si X et Y sont WCG (cf. théorème 3).

En application de ces résultats nous étudions la WCG-propriété des espaces de fonctions à valeurs dans X Bochner intégrables, continues sur un compact ou Pettis intégrables, et des espaces d'opérateurs p -nucléaires, p -intégraux, quasi- p -nucléaires, absolument p -sommants et compacts.