EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 30. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1981, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 30
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1981, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1981.4.09

УДК 518.12

А. МАРШАК

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

(Представил Г. Кузмин)

Введение

Метод дискретных ординат решения интегро-дифференциального уравнения переноса основывается на замене интеграла какой-нибудь квадратурной формулой и решении получаемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод давно и успешно применяется как в атмосферной оптике [1], так и в ядерной физике [2]. Однако считалось, что использование метода дискретных ординат целесообразно лишь в плоско-параллельной геометрии (в [3] описаны трудности, возникающие в случае применения его к другим геометриям). В [4], правда, предлагается алгоритм решения для задач со сферической симметрией, в котором для аппроксимации интеграла используется квадратурная формула Гаусса, но дополнительно еще аппроксимируются и производные, что по существу приводит к методу сферических гармоник.

В настоящей работе предлагается алгоритм решения уравнения переноса методом дискретных ординат в сферической геометрии при изотропном рассеянии. В качестве исходного уравнения взято не интегро-дифференциальное уравнение Больцмана, а его интегральный аналог — интегральное уравнение Пайерлса [2, 5]. Решению этого уравнения в плоском случае посвящены работы [6, 7].

1. Интегральное уравнение переноса в сферической геометрии

Запишем уравнение переноса в случае сферической геометрии, когда рассматриваемая область представляет собой шар радиуса R, на внешнюю границу которого падает изотропный поток с плотностью f_0, а внутри шара заданы источники нейтронов $S_0(r)$ (см. [2])

$$\varphi_0(r)=\Sigma_s\int_0^R\varphi_0(r')L(r'\to r)\,\mathrm{d}r'+F(r),\tag{1}$$

где

$$L(r'\to r)=(r'/2r)\left[E_1(\Sigma|r-r'|)-E_1(\Sigma|r+r'|)\right],$$

$$F(r)=\int_0^R S_0(r')L(r'\to r)\,\mathrm{d}r'+f_0P(r),$$

$$P(r)=\left[(R^2-r^2)/4r\right]\left[E_2(\Sigma|R-r|)-E_2(\Sigma|R+r|)\right]+$$
$$+(1/4r\Sigma^2)\left[\mathrm{e}^{-\Sigma(R-r)}-\mathrm{e}^{-\Sigma(R+r)}\right],$$

$$E_p(t)=\int_0^1 [e^{-t/\mu}/\mu^{2-p}]d\mu, \quad p=1,\ 2,\ \ldots,\ t\geqslant 0. \tag{2}$$

Здесь φ_0 — полный поток нейтронов, а Σ и Σ_s — полное сечение и сечение рассеяния соответственно.

Будем в дальнейшем предполагать, что функции источников четные, т. е.

$$S_0(r)=S_0(-r), \quad r\in[-R,R],$$

что является вполне естественным в сферическо-симметричной геометрии.

Обозначим

$$\Sigma r=\tau, \quad \Sigma r'=s, \quad \Sigma R=b,$$

тогда

$$\varphi_0(r)=\varphi_0(\tau/\Sigma)=x(\tau),$$
$$F(r)=F(\tau/\Sigma)=v(\tau),$$

и уравнение (1) примет вид

$$x(\tau)=(\lambda/2)\int_0^b (s/\tau)K(\tau,s)x(s)\,ds+v(\tau), \quad \tau\in[0,b], \tag{3}$$

$$K(\tau,s)=E_1(|\tau-s|)-E_1(|\tau+s|), \tag{4}$$

$$f(\tau)=(f_0/4\Sigma\tau)\left[(b^2-\tau^2)(E_2(b-\tau)-E_2(b+\tau))+(e^{-(b-\tau)}-e^{-(b+\tau)})\right], \tag{5}$$

$$g(\tau)=(1/2\Sigma)\int_0^b (s/\tau)K(\tau,s)S_0(s)\,ds, \tag{6}$$

$$v(\tau)=f(\tau)+g(\tau). \tag{7}$$

Здесь $0\leqslant\lambda=\Sigma_s/\Sigma\leqslant 1$ — вероятность выживания кванта в акте столкновения с частицей среды.

Рассмотрим интегральный оператор уравнения (3):

$$(Tx)(\tau)=(\lambda/2)\int_0^b (s/\tau)K(\tau,s)x(s)\,ds, \quad \tau\in[0,b].$$

Для пространства непрерывных функций имеем

$$\|T\|=(\lambda/2)\max_{0\leqslant\tau\leqslant b}\left|\int_0^b (s/\tau)K(\tau,s)\,ds\right|=$$
$$=(\lambda/2)\max_{0\leqslant\tau\leqslant b}\left[2-\int_0^1 ((b+\mu)/\tau)(e^{-(b-\tau)/\mu}-e^{-(b+\tau)/\mu})\,d\mu\right],$$

откуда

$$\|T\|<\lambda\leqslant 1. \tag{8}$$

На диагонали $\tau=s$ оператор T имеет логарифмическую особенность. На множестве $D=\{\tau,\ s\in[0,b],\ \tau\neq s\}$ ядро оператора непрерывно, ибо

$$\lim_{\tau\to 0}(s/\tau)K(\tau,s)=2s\int_0^1 [e^{-s/\mu}/\mu^2]d\mu=2e^{-s}.$$

Из этого равенства можно доказать полную непрерывность оператора T как оператора со слабой особенностью. Неравенство (8) гарантирует однозначную разрешимость уравнения (3) в $C_{[0,b]}$ при любом $v \in C_{[0,b]}$.

В равенстве (5) функция $f(\tau) \in C^1_{[0,b]}$, причем

$$\lim_{\tau\to 0} f(\tau) = (f_0/2\Sigma)\,(b^2 E_1(b) + e^{-b}),$$

а если $S_0(\tau) \in C^1_{[0,b]}$, то из (6) следует, что $g(\tau) \in C_{[0,b]} \cap C^1_{[0,b)}$. Отсюда свободный член уравнения (3), имеющий вид (7), — непрерывен на $[0, b]$ и непрерывно дифференцируем в промежутке $[0, b)$.

2. Метод дискретных ординат

Будем решать уравнение (3) методом дискретных ординат, который заключается в замене интегралов в (2) какой-либо квадратурной формулой

$$\int_0^1 f(\mu)\,d\mu \approx \sum_{j=1}^n \alpha_j f(\mu_j),\quad 0<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_n\leqslant 1;\quad \alpha_j>0,\quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1.$$

Таким образом,

$$E_1(t) \approx \sum_{j=1}^n (\alpha_j/\mu_j)\, e^{-t/\mu_j}, \tag{9}$$

$$E_2(t) \approx \sum_{j=1}^n \alpha'_j\, e^{-t/\mu'_j}, \tag{10}$$

и уравнение (4) заменяется на уравнение

$$K(\tau, s) \approx K_n(\tau, s) = \sum_{j=1}^n a_j [e^{-|\tau-s|b_j} - e^{-|\tau+s|b_j}], \tag{11}$$

где

$$a_j = \alpha_j/\mu_j,\quad b_j = 1/\mu_j,\quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Свободный член $v(\tau)$ заменим на $v_n(\tau)$, где

$$v_n(\tau) = g_n(\tau) + f_n(\tau),\quad \tau \in [0, b], \tag{13}$$

$$g_n(\tau) = (1/2\Sigma) \int_0^b (s/\tau)\, K_n(\tau, s)\, S_0(s)\, ds, \tag{14}$$

$$f_n(\tau) = (f_0/4\Sigma\tau)\,[(b^2-\tau^2) \sum_{j=1}^n \alpha'_j [e^{-|b-\tau|/\mu'_j} - e^{-|b+\tau|/\mu'_j}] + (e^{-(b-\tau)} - e^{-(b+\tau)})]. \tag{15}$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$x_n(\tau) = (\lambda/2) \int_0^b (s/\tau)\, K_n(\tau, s)\, x_n(s)\, ds + v_n(\tau), \tag{16}$$

где K_n и v_n определены равенствами (11) — (15). Из (12) следует

$$\sum_{j=1}^n a_j/b_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \tag{17}$$

что гарантирует однозначную разрешимость уравнения (16) в пространстве непрерывных функций, так как

$$\|T_n\| = (\lambda/2) \max_{0\leqslant\tau\leqslant b} \left|\int_0^b (s/\tau) K_n(\tau, s)\, ds\right| =$$

$$= (\lambda/2) \sum_{j=1}^n (a_j/b_j) \max_{0\leqslant\tau\leqslant b} (1/\tau)\,[2\tau - (b+1/b_j)\times$$

$$\times (e^{-(b-\tau)b_j} - e^{-(b+\tau)b_j})\,] < \lambda \sum_{j=1}^n a_j/b_j = \lambda \leqslant 1,$$

где $T_n : C_{[0,b]} \to C_{[0,b]}$ есть интегральный оператор уравнения (16).

3. Решение уравнения (16)

Посмотрим, как действует интегральный оператор T_n на различные комбинации экспоненциальных функций. Пусть

$$\Phi(\tau, d) = (e^{d\tau} - e^{-d\tau})/\tau,$$

$$\Psi(\tau, d) = e^{d\tau} + e^{-d\tau},$$

$$\varkappa(\tau, d) = \tau(e^{d\tau} - e^{-d\tau}),$$

тогда, предполагая, что $d \neq \pm b_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, после несложных выкладок получаем

$$T_n[\Phi(\tau, d)] = \Phi(\tau, d)\,\gamma(d) + \sum_{j=1}^n \gamma_{10}^j \gamma_3^j(d)\,\Phi(\tau, b_j), \tag{18}$$

$$T_n[\Psi(\tau, d)] = \Psi(\tau, d)\,\gamma(d) + \Phi(\tau, d)\,\gamma_1(d) + \sum_{j=1}^n \gamma_{10}^j \gamma_5^j(d)\,\Phi(\tau, b_j), \tag{19}$$

$$T_n[\varkappa(\tau, d)] = \varkappa(\tau, d)\,\gamma(d) + \Psi(\tau, d)\,2\gamma_1(d) + \Phi(\tau, d)\,\gamma_2(d) + $$

$$+ \sum_{j=1}^n \gamma_{10}^j \gamma_4^j \Phi(\tau, b_j), \tag{20}$$

где

$$\gamma(y) = -(\lambda/2) \sum_{j=1}^n 2a_j b_j/(y^2 - b_j^2),$$

$$\gamma_1(y) = (\lambda/2) \sum_{j=1}^n a_j[(y - b_j)^{-2} - (y + b_j)^{-2}],$$

$$\gamma_2(y) = (\lambda/2) \sum_{j=1}^n 2a_j[(y + b_j)^{-3} - (y - b_j)^{-3}],$$

$$\gamma_3^j(y) = (\lambda/2)\,[e^{yb}/(y - b_j) + e^{-yb}/(y + b_j)], \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

$$\gamma_4^j(y) = (\lambda/2)\,[b^2(e^{yb}/(y - b_j) + e^{-yb}/(y + b_j) - 2b\,(e^{yb}/(y - b_j)^2 -$$
$$- e^{-yb}/(y + b_j)^2) + 2\,(e^{yb}/(y - b_j)^3 + e^{-yb}/(y + b_j)^3)\,], \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

$$\gamma_5^j(y) = (\lambda/2)\,[b\,(e^{yb}/(y - b_j) - e^{-yb}/(y + b_j)) - (e^{yb}/(y - b_j)^2 +$$
$$+ e^{-yb}/(y + b_j)^2)\,], \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{23}$$

$$\gamma_{10}^j = a_j\, e^{-bb_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Как видно, оператор T_n оставляет без изменения исходные функции (с новым коэффициентом), а также дает некоторые комбинации экспоненциальных функций и n функций вида $\Phi(\tau, b_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, которые он переводит в более сложные. В этом разделе вместо уравнения (16) будем решать уравнение

$$x_n(\tau) = (\lambda/2) \int_0^b (s/\tau) K_n(\tau, s) x_n(s)\, ds + f_n(\tau), \quad \tau \in [0, b]; \tag{24}$$

где $f_n(\tau)$ определяется равенством (15). Учитывая вид свободного члена, будем искать решение в виде

$$x_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \{c_k \Phi(\tau, d_k) + \alpha'_k e^{-b/\mu'_k} [\Phi(\tau, 1/\mu'_k) h_k + \Psi(\tau, 1/\mu'_k) g_k + \varkappa(\tau, 1/\mu'_k) f_k]\} + c_0 \Phi(\tau, 1) \tag{25}$$

с неизвестными пока c_k, h_k, f_k, g_k, d_k, причем $|d_k| \neq b_j$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$, и c_0. Дополнительно предположим, что квадратурные формулы в аппроксимациях E_1 и E_2 различны и, более того,

$$1/\mu'_k \neq b_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

В дальнейшем мы покажем, как избежать ограничения (26).

Вопрос о существовании решения в виде (25) решается подстановкой его в уравнение (24) и, после применения формул (18) — (20), приравниванием коэффициентов при линейно независимых функциях $\Phi(\tau, 1/\mu'_k)$, $\Psi(\tau, 1/\mu'_k)$, $\varkappa(\tau, 1/\mu'_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $\Phi(\tau, b_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $\Phi(\tau, 1)$. В результате приходим к следующим условиям, которым должны удовлетворять неизвестные коэффициенты:

$$\gamma(d) = 1, \tag{27}$$

$$h_k = h_k \gamma(1/\mu'_k) + g_k \gamma_1(1/\mu'_k) + f_k \gamma_2(1/\mu'_k) + \gamma_0 b^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

$$f_k = f_k \gamma(1/\mu'_k) - \gamma_0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{29}$$

$$g_k = g_k \gamma(1/\mu'_k) + f_k 2\gamma_1(1/\mu'_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{30}$$

$$c_0 = c_0 \gamma(1) + \gamma_0 e^{-b}, \tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \gamma_3^j(d_k) = \theta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{32}$$

где

$$\gamma_0 = f_0/4\Sigma,$$

$$\theta_j = -\sum_{k=1}^{n} \alpha'_k e^{-b/\mu'_k} [h_k \gamma_3^j(1/\mu'_k) + f_k \gamma_4^j(1/\mu'_k) + g_k \gamma_5^j(1/\mu'_k)] - c_0 \gamma_3^j(1), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{33}$$

Из (31) однозначно находится c_0, а из (29) — f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. После нахождения f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, из (30) вычисляются g_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, а затем из (28) — h_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Неизвестные d_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, находятся из уравнения (27) (подробное исследование этого уравнения проведено в [6, 7]), причем решением является не только d_k, но и $-d_k$. Ввиду симметричности $\gamma_3{}^j(y)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, относительно y (см. (21))

в систему (32) достаточно подставить значения только положительных d_k, $k=1, 2, \ldots, n$ (или только отрицательных, или чередующихся). Тогда, решив систему (32) — (33) относительно c_k, $k=1, 2, \ldots, n$, мы найдем все неизвестные коэффициенты решения (25).

Замечание 1. В случае, если $\Sigma_s=\Sigma$, т. е. если среда без поглощения ($\lambda=1$), то из равенства (17) следует, что одно d_k в (27) нулевое. Тогда определитель системы (32) равен нулю и предложенный алгоритм не работает. В этом случае решение уравнения (24) следует искать в виде (25), заменив лишь $\sum_{k=1}^{n} c_k\Phi(\tau, d_k)$ на $c_1+\sum_{k=2}^{n} c_k\Phi(\tau, d_k)$.

Так как

$$T_n[1]=(\lambda/2)\,[2-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{10}^j\Phi(\tau, b_j)\,(b/b_j+1/b_j^2)\,],$$

то равенства (27) — (31) не изменяются, а система (32) принимает вид

$$-(\lambda/2)\,c_1(b/b_j+1/b_j^2)+\sum_{k=2}^{n} c_k\gamma_3^j(d_k)=\theta_j, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где θ_j, $j=1, 2, \ldots, n$, определено посредством равенств (33).

Замечание 2. Система (32) однозначно разрешима, ибо если ее определитель равен нулю, то при свободном члене, равном тождественно нулю, система имела бы нетривиальное решение, а отсюда и однородное уравнение, соответствующее (16), имело бы нетривиальное решение, что противоречит неравенству $\|T_n\|<1$.

4. Снятие условия (26)

Предположим теперь, что часть узлов в аппроксимациях E_1 и E_2 (см. (9) и (10)) совпадает. В этом случае алгоритм (27) — (33) с решением в виде (25) не работает.

Пусть

$$N=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}, \quad P=\{k : 1/\mu'_k=b_k,\ k\in N\}.$$

Рассмотрим, как оператор T_n действует на функции $\Phi(\tau,\ b_k)$ и $\Psi(\tau,\ b_k)$, $k\in P$. Справедливо

$$\begin{gathered} T_n[\Phi(\tau, b_k)]=\Phi(\tau, b_k)\overline{\gamma}_k+\sum_{j\neq k}\gamma_{10}^j\gamma_3^j(b_k)\Phi(\tau, b_j)+\\ +2\gamma_9^k\Psi(\tau, b_k)+\gamma_8^k\Phi(\tau, b_k), \quad k\in P, \end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered} T_n[\Psi(\tau, b_k)]=\Psi(\tau, b_k)\overline{\gamma}_k+\Phi(\tau, b_k)\overline{\gamma}_{1k}+\sum_{j\neq k}\gamma_{10}^j\gamma_5^j(b_k)\Phi(\tau, b_j)+\\ +\gamma_9^k\varkappa(\tau, b_k)+\gamma_6^k\Psi(\tau, b_k)+\gamma_7^k\Phi(\tau, b_k), \quad k\in P, \end{gathered} \tag{35}$$

где

$$\overline{\gamma}_k=-(\lambda/2)\sum_{j\neq k}2a_jb_j/((1/\mu'_k)^2-b_j^2), \quad k\in P,$$

$$\overline{\gamma}_{1k}=(\lambda/2)\sum_{j\neq k}a_j[(1/\mu'_k-b_j)^{-2}-(1/\mu'_k+b_j)^{-2}],\quad k\in P,$$

$$\gamma_6^k=(\lambda/4)(a_k/b_k),\quad k\in P,$$

$$\gamma_7^k=(\lambda/4)[b^2-(b/b_k)e^{-2b_kb}-(1/2b_k^2)e^{-2b_kb}-(1/2b_k^2)]a_k,\quad k\in P,$$

$$\gamma_8^k=(\lambda/2)[b+(1/2b_k)+(1/2b_k)e^{-2b_kb}]a_k,\quad k\in P,$$

$$\gamma_9^k=-(\lambda/4)a_k,\quad k\in P.$$

Исходя из (34) — (35), будем искать решение (24) в виде

$$\begin{aligned}x_n(\tau)=\sum_{k=1}^{n}c_k\Phi(\tau,d_k)+\sum_{k\in N\setminus P}\alpha'_k e^{-b/\mu'_k}[\Phi(\tau,1/\mu'_k)h_k+\\+\Psi(\tau,1/\mu'_k)g_k+\varkappa(\tau,1/\mu'_k)f_k]+c_0\Phi(\tau,1)+\\+\sum_{k\in P}\alpha'_k e^{-bb_k}[\Phi(\tau,b_k)h_k+\Psi(\tau,b_k)g_k].\end{aligned}\tag{36}$$

Аналогично предыдущему случаю, подставляя x_n в уравнение (24) и приравнивая коэффициенты при линейно-независимых функциях, кроме условий (27) и (31), которые остаются без изменения, и условий (28) — (30), справедливых лишь при $k\in N\setminus P$, получаем равенства

$$g_k=g_k(\overline{\gamma}_k+\gamma_6^k)+2h_k\gamma_9^k,\quad k\in P,$$

$$0=g_k\gamma_9^k-\gamma_0,\quad k\in P,$$

из которых находятся недостающие g_k, h_k, $k\in P$. В результате система (32) — (33) преобразуется в систему

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\gamma_3^j(d_k)=\begin{cases}\overline{\theta}_j, & j\in P,\\ \tilde{\theta}_j, & j\in N\setminus P,\end{cases}\tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}\overline{\theta}_j=-\sum_{k\in N\setminus P}\alpha'_k e^{-b/\mu'_k}[h_k\gamma_3^j(1/\mu'_k)+f_k\gamma_4^j(1/\mu'_k)+g_k\gamma_5^j(1/\mu'_k)]-\\-c_0\gamma_3^j(1)-(\alpha'_j/a_j)[h_j(\overline{\gamma}_j+\gamma_8^j-1)+g_j(\overline{\gamma}_{1j}+\gamma_7^j)+\gamma_0b^2]-\\-\sum_{\substack{k\in P\\k\neq j}}\alpha'_k e^{-bb_k}[g_k\gamma_5^j(b_k)+h_k\gamma_3^j(b_k)],\end{aligned}\tag{38}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_j=-\sum_{k\in N\setminus P}\alpha'_k e^{-b/\mu'_k}[h_k\gamma_3^j(1/\mu'_k)+f_k\gamma_4^j(1/\mu'_k)+g_k\gamma_5^j(1/\mu'_k)]-\\-c_0\gamma_3^j(1)-\sum_{k\in P}\alpha'_k e^{-bb_k}[g_k\gamma_5^j(b_k)+h_k\gamma_3^j(b_k)].\end{aligned}\tag{39}$$

Следуя ходу рассуждений, изложенных в замечании 2, можно утверждать, что система (37) также однозначно разрешима.

Замечание 3. Если k-й узел аппроксимации (9) равен j-му узлу аппроксимации (10), то, вводя множества

$$P'=\{k:1/\mu'_k=b_j,\ j\in N\},\qquad Q=\{l_k,b_{l_k}=1/\mu'_k,\ k\in P'\}$$

и рассматривая действие оператора T_n в отдельности на функции $\Phi(\tau,b_j)$ и $\Psi(\tau,b_j)$, где $j\in Q$ и $j\in N\setminus Q$, получим алгоритм, который отличается от приведенного выше лишь тем, что суммы в (36) берутся по $l_k \in Q$ $(k \in P')$. Система (37)—(39) претерпевает такие же изменения.

5. Алгоритм решения при четных функциях источника

Рассмотрим уравнение (16). Запишем его в виде

$$x_n = T_n x_n + (\Sigma_s)^{-1} T_n S_0 + f_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть

$$z_n = x_n + (\Sigma_s)^{-1} S_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

тогда

$$z_n = T_n z_n + (\Sigma_s)^{-1} S_0 + f_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Функции S_0 ввиду их четности можно сколь угодно близко аппроксимировать полиномами с четными степенями

$$S_0(\tau) \approx S_0^m(\tau) = \sum_{k=0}^{m} p_k \tau^{2k}, \quad \tau \in [0, b], \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{41}$$

Применяя оператор T_n, получим

$$(T_n S_0^m)(\tau) = \lambda \sum_{k=0}^{m} \bar{p}_k \tau^{2k} - (\lambda/2) \sum_{j=1}^{n} \gamma_{10}^j \Phi(\tau, b_j) \tilde{\gamma}_j^p, \tag{42}$$

где

$$\bar{p}_k = \sum_{l=0}^{m-k} p_{l+k} \sum_{j=1}^{n} (a_j / b_j^{2l+1}) [(2k+2l+1)!/(2k+1)!], \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{43}$$

$$\tilde{\gamma}_j^p = \sum_{k=0}^{m} p_k \sum_{i=0}^{2k+1} (b^{2k+1-i}/b_j^{i+1}) [(2k+1)!/(2k+1-i)!], \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{44}$$

причем матрица системы (43) для нахождения $\bar{p}_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, — треугольная. Теперь, если свободный член уравнения (16) имеет вид (41), добавим к решению (36) член $\sum_{k=0}^{m} \omega_k \tau^{2k}$ с неизвестными пока ω_k, $k = 0, 1, \ldots, m$. Применяя оператор T_n (42) и приравнивая коэффициенты при τ^{2k}, $k = 0, 1, \ldots, m$, получим для нахождения ω_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, систему порядка $m + 1$, а именно

$$\omega_k = \lambda \bar{\omega}_k + (\Sigma_s)^{-1} p_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{45}$$

откуда ω_k находятся из (43) посредством обратной подстановки. В системе (37) изменяется свободный член (38) — (39), а именно:

$$\bar{\theta}_j := \bar{\theta}_j + (\lambda/2) \tilde{\gamma}_j^\omega, \quad j \in P,$$

$$\tilde{\theta}_j := \tilde{\theta}_j + (\lambda/2) \tilde{\gamma}_j^\omega, \quad j \in N \setminus P,$$

где $\tilde{\gamma}_j^\omega$ находятся из (44).

Таким образом, мы нашли функцию $z_n(\tau)$, а искомое решение $x_n(\tau)$ получается из (40).

Замечание 4. При $\lambda = 1$ алгоритм, предложенный выше, не работает, так как определитель системы (45) равен нулю. В этом случае вместо $\sum_{k=0}^{m}\omega_k\tau^{2k}$ добавим к решению (36) член $\sum_{k=1}^{m+1}\omega_k\tau^{2k}$. Тогда, в предположении, что $p_{m+1}=0$, изменение алгоритма очевидно.

Замечание 5. Для того, чтобы при реализации алгоритма не пользоваться «большими экспонентами» (см. (21) — (23)), рекомендуем в (33) предварительно умножать e^{-b/μ'_k} на $\gamma_l{}^j(1/\mu'_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$; $l=3, 4, 5$. При решении системы (37) целесообразно вместо c_k искать c'_k, $k=1, 2, \ldots, n$, где

$$c'_k\, e^{-d_k b}=c_k, \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Тогда c'_k, $k=1, 2, \ldots, n$, не будут «малы» и при подстановке их в решение (36) все $\Phi(\tau, d_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$, окажутся умноженными на $e^{-d_k b}$, $k=1, 2, \ldots, n$, что даст возможность избежать переполнений, которые могут возникнуть по мере увеличения n. Аналогичное замечание переносится и на другие алгоритмы.

6. Связь с плоским случаем

Пусть $\bar{x}(\tau)=\tau x(\tau)$, $\bar{v}(\tau)=\tau v(\tau)$. Тогда, предполагая, что $x(\tau)$ и $v(\tau)$ — четные функции, преобразуем уравнение (3) к виду (см. [2]):

$$\bar{x}(\tau)=(\lambda/2)\int_{-b}^{b}E_1(|\tau-s|)\bar{x}(s)\,ds+\bar{v}(\tau), \quad \tau\in[-b, b], \tag{46}$$

или после замены $\tau'=\tau+b$ и $s'=s+b$ — к виду

$$\tilde{x}(\tau')=(\lambda/2)\int_{0}^{2b}\tilde{x}(s')E_1(|\tau'-s'|)\,ds'+\bar{v}(\tau'-b), \ \tau'\in[0, 2b],$$

где

$$\tilde{x}(\tau')=\tilde{x}(\tau+b)=\bar{x}(\tau).$$

Далее, если предположить, что поток нейтронов со стороны вакуума отсутствует, т. е. если $f_0=0$, то интегральное уравнение для шара формально совпадает с интегральным уравнением для слоя, и алгоритмы [6,7] будут применимы к нашему случаю. Более того, они совпадут с предложенным выше с точностью до решения однородного уравнения (при свободном члене (6) надо применять алгоритм, предложенный в разделе 5).

Замечание 6. Следует отметить, что так как функции $x(\tau)$ и $v(\tau)$ — четные, то соответствующие им функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{v}(\tau)$ уравнения (46) — нечетные, хотя для симметричного слоя эти функции должны быть четными (см. [5]).

Замечание 7. Из равенства

$$x(\tau)-x_n(\tau)=(\bar{x}(\tau)-\bar{x}_n(\tau))/\tau, \quad \tau\in[0, b],$$

где $x(\tau)$ — решение уравнения (3), $x_n(\tau)$ — уравнения (16), $\bar{x}(\tau)$ — уравнения (46), а $\bar{x}_n(\tau)$ — приближенного к (46) методом дискретных ординат, вытекает лишь поточечная оценка для сферического случая. Равномерная же оценка для плоско-параллельной среды, полученная в [8,9], не переносится прямо на сферическо-симметричную геометрию и требует более детального изучения.

7. Численные результаты

Уравнение (1) заменялось уравнением вида (16) и решалось по алгоритмам, описанным в разделе 3 (при этом в аппроксимациях (9) и (10) использовались квадратурные формулы средних прямоугольников) и в разделе 4 (для аппроксимации E_1 использовалась квадратурная формула Гаусса на [0, 1], а для E_2 — формула средних прямоугольников). Значения полного потока нейтронов при отсутствии внутренних

Таблица 1

τ	E_1 — средние прямоугольники; E_2 — средние прямоугольники		E_1 — формула Гаусса на [0,1]; E_2 — средние прямоугольники	
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 3$	$n = 6$
0,0	2,0862	2,0924	2,0704	2,0902
0,1	2,0823	2,0894	2,0670	2,0910
0,2	2,0713	2,0773	2,0568	2,0755
0,3	2,0518	2,0583	2,0390	2,0562
0,4	2,0219	2,0286	2,0123	2,0257
0,5	1,9794	1,9872	1,9745	1,9816
0,6	1,9209	1,9287	1,9219	1,9218
0,7	1,8406	1,8481	1,8478	1,8386
0,8	1,7295	1,7350	1,7402	1,7258
0,9	1,5690	1,5743	1,5762	1,5647
1,0	1,3131	1,3139	1,3118	1,2955

Таблица 2

τ	λ		
	0,90	0,95	1,00
0,0	3,0376	3,2130	3,4065
0,1	3,0286	3,2030	3,3952
0,2	3,0014	3,1725	3,3610
0,3	2,9549	3,1205	3,3028
0,4	2,8870	3,0450	3,2186
0,5	2,7949	2,9429	3,1053
0,6	2,6740	2,8098	2,9584
0,7	2,5174	2,6384	2,7706
0,8	2,3131	2,4165	2,5291
0,9	2,0367	2,1189	2,2080
1,0	1,6310	1,6868	1,7470

Таблица 3

τ	$\lambda = 0{,}8$		$\lambda = 1{,}0$	
	$m = 3$	$m = 5$	$m = 5$	$m = 3$
0,0	7,5427	7,5608	9,2457	9,2442
0,1	7,5034	7,5239	9,1937	9,1922
0,2	7,3850	7,4060	9,0379	9,0364
0,3	7,1875	7,2075	8,7787	8,7771
0,4	6,9094	6,9287	8,4161	8,4146
0,5	6,5520	6,5720	7,9498	7,9482
0,6	6,1101	6,1282	7,3771	7,3754
0,7	5,5759	5,5947	6,6904	6,6885
0,8	4,9314	4,9485	5,8696	5,8676
0,9	4,1299	4,1458	4,8653	4,8634
1,0	3,0608	3,0769	3,5555	3,5540

источников $(S_0(\tau) \equiv 0,\ \tau \in [0, b])$ и параметрах $\lambda = 0{,}5$; $\Sigma = 0{,}2$; $b = 1{,}0$; $f_0 = 1{,}0$ приведены в табл. 1 при различных n.

В табл. 2 при $n = 5$ и при использовании квадратурной формулы средних прямоугольников приведены данные о зависимости полного потока от значений λ, близких к критическому, причем при $\lambda = 1$ применялся алгоритм замечания 1.

Численные результаты, полученные по алгоритму раздела 4, где функция источников $S_0(\tau) = \cos\tau$, $\tau \in [0, 1]$ разлагалась в ряд (41) с различным числом членов, приведены в табл. 3 при $n = 5$. При $\lambda = 1$ уравнение решалось в соответствии с замечаниями 1 и 4. Использовались квадратурные формулы средних прямоугольников. Все расчеты выполнены на ЭВМ ЕС 1010.

Замечание 8. В случае среды, близкой к непоглощающей, а именно при $0{,}96 \leqslant \lambda < 1$, первый корень уравнения (27) близок к нулю, а системы (32)—(33) и (37)—(39) близки к вырожденным. Поэтому результаты могут быть сильно искаженными. Рекомендуется учитывать это обстоятельство при реализации алгоритма.

Автор пользуется случаем выразить благодарность Г. М. Вайникко за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев В. В., Рассеяние света в атмосферах планет, М., «Наука», 1972.
2. Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1971.
3. Дэвисон Б., Теория переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1960.
4. Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953.
5. Белл Д., Глесстон С., Теория ядерных реакторов, М., Атомиздат, 1974.
6. Вайникко Г., Карпенко Л., Шилман А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **25**, № 2, 118—123 (1976).
7. Viik, T., Публ. Тартуск. астрофиз. обс., 44, 72—90 (1976).
8. Вайникко Г. М., Маршак А. Л., Изв. ВУЗов, Математика, № 11, 11—22 (1978).
9. Маршак А. Л., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **500**, 92—104 (1979).

Институт астрофизики и физики атмосферы Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 22/VI 1981

A. MARŠAK

ÜLEKANDEVÕRRANDI LAHENDAMINE SFÄÄRILISES GEOMEETRIAS DISKREETSETE ORDINAATIDE MEETODIL

Artiklis on esitatud Paierlsi võrrandi lahendamise algoritm sisemiste allikate ja välise isotroopse voo olemasolu korral. Eraldi on vaadeldud neelavate ja mitteneelavate keskkondade juhtu. On esitatud numbrilised näited erinevate kvadratuurvalemite jaoks, mis aproksimeerivad integraalse ülekandevõrrandi tuuma ja keskkonna erinevaid parameetreid.

A. MARŠAK

ON SOLVING THE TRANSFER EQUATION IN SPHERICAL GEOMETRY BY THE METHOD OF DISCRETE ORDINATES

The given paper presents an algorithm for solving the transfer equation in spherical geometry with isotropic scattering by the discrete ordinates method. For the initial equation, not Bolzman's integer-differential equation was chosen but its integral analogue — Paierls integral equation [2, 5].

The use of the method of discrete ordinates was considered expedient only in plane-parallel geometry. The difficulties that arise from the application of this method to other geometries was described in the investigation [3]. We succeeded in avoiding these difficulties thanks to the use of the Paierls equation, as is presented in the present paper.

The proposed algorithm is easily programmable and is characterised by good accuracy, i. e. the speed of convergence of the exact solution of an approximate equation to the exact solution of the Paierls equation does not appear to be worse than in the case of plane-parallel geometry (although the convergence speed has not been estimated in the given paper).

This paper deals with the integral transfer equation with spherical symmetry as well as considers the equation approximated to it by the method of discrete ordinates. It gives a solution to the transfer equation in the absence of source functions. These results are generalised on the symmetry source functions. The connection with the plane-parallel case and the numerical results are presented.