EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 30. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1981, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 30
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1981, № 4

УДК 53.012 : 531.51

Пирет КУУСК

О СВОЙСТВАХ ПСЕВДОТЕНЗОРОВ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

(Представил X. Керес)

Вычисляются псевдотензоры Эйнштейна и Ландау—Лифшица для плоской гравитационной волны в малой конечной области пространства. Показывается, что в рамках приближения, обычно используемого при аналогичных расчетах в электродинамике, эти псевдотензоры не позволяют описывать поток энергии, передаваемый детекторам веберовского типа, хотя они и отличны от нуля.

1. Известно, что с помощью псевдотензоров энергии-импульса гравитационного поля хорошо описывается как полная энергия, так и полный импульс изолированной неизлучающей гравитирующей системы [1] (гл. 20). Это значит, что соответствующие интегральные законы сохранения имеют вполне ясную физическую интерпретацию. Но псевдотензоры удовлетворяют также дифференциальным законам сохранения,

$$(T^{\mu\nu}\sqrt{-g}+t^{\mu\nu})_{,\nu}=0 \qquad (1a)$$

или

$$(T_{\mu}{}^{\nu}+t_{\mu}{}^{\nu})_{,\nu}=0, \qquad \mu,\nu=0,1,2,3, \qquad (1б)$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи и $t^{\mu\nu}$, $t_{\mu}{}^{\nu}$ — псевдотензоры энергии-импульса Ландау—Лифшица или Эйнштейна. Вид соотношений (1) как будто подсказывает, что их можно интерпретировать как локальный обмен энергии между материей и гравитационным полем. Эта проблема подробно исследована в работах П. Хаваша [2, 3], где показано, что корректный учет в (1) уравнений Эйнштейна ведет к непреодолимым математическим трудностям. Поэтому утверждать о физическом содержании соотношений (1) в рамках точной теории пока нельзя.

Известно, что с помощью перехода к локально галилеевым координатам псевдотензоры можно обратить в нуль в любой точке пространства-времени. Получается, что в одной точке можно как будто порождать или уничтожать гравитационную энергию просто координатными преобразованиями, что физически бессмысленно. По этой причине часто отрицают всякое локальное значение псевдотензоров [1] (§ 20.4), [4]. Но одна точечная масса в принципе не может извлекать энергию из гравитационного поля, и все детекторы гравитационных волн состоят по меньшей мере из двух точечных масс. Поэтому для исследования возможной передачи энергии нужно рассматривать не одну точку, а точку с некоторой окрестностью.

Напомним коротко расчет передачи энергии электромагнитными волнами, а потом выясним, почему аналогичная схема неприменима при расчете передачи энергии гравитационными волнами.

2. Для исследования обмена энергии между зарядами и электромагнитным полем в электродинамике постулируют точный закон сохранения, аналогичный закону (1):

$$(T^{\mu\nu}_{\text{поле}}+T^{\mu\nu}_{\text{заряды}})_{,\nu}=0. \tag{2}$$

Обычно достаточно ограничиться приближением, в котором пренебрегается излучением принимающей антенны, а ее основная характеристика — эффективное поперечное сечение — вычисляется по следующей упрощенной схеме.

а) Рассматривается свободное электромагнитное излучение на большом расстоянии от источника, где закон сохранения (2) имеет вид $(T^{\mu\nu}_{\text{поле}})_{,\nu}=0$, и вычисляется поток энергии T^{0i}, падающий на принимающие заряды.

б) Исходя из уравнений движения

$$m_0\frac{dv^\mu}{d\tau}=\frac{e}{\varepsilon_0 c}F^{\mu\nu}v_\nu$$

вычисляются траектории зарядов во внешнем электромагнитном поле и изменение их полной кинетической энергии $\dfrac{dE}{dt}$.

в) Сравнением падающего потока энергии с поглощенной энергией определяется эффективное сечение σ:

$$\frac{dE}{dt}=\sigma|\vec{T}^0|, \tag{3}$$

где $|\vec{T}^0|$ — абсолютная величина падающего потока энергии.

3. Проведем аналогичный расчет для передачи энергии гравитационными волнами.

а) Свободное гравитационное излучение на большом расстоянии от источника можно в первом приближении описывать при помощи тензора кривизны *

$$R_{\mu\nu\sigma\rho}=-4\left(\Psi_4(x^\alpha)\,l_{[\mu}m_{\nu]}\,l_{[\sigma}m_{\rho]}+\overline{\Psi}_4(x^\alpha)\,l_{[\mu}\overline{m}_{\nu]}\,l_{[\sigma}\overline{m}_{\rho]}\right). \tag{4}$$

Здесь $\Psi_4(x^\alpha)$ — единственная отличная от нуля компонента спинора гравитационного поля, l_μ — волновой вектор и m_μ — ортогональный к нему вектор изотропной тетрады, $l_\mu l^\mu=m_\mu m^\mu=l_\mu m^\mu=0$, $m_\mu\overline{m}^\mu=-1$ [5].

б) Простейший детектор веберовского типа состоит из пробных частиц, расположенных на малой окружности. Их траектории на фоне гравитационной волны вычисляются исходя из уравнения отклонения геодезических. Обычно при этом используют нормальные координаты Ферми, в которых на мировой линии центра массы детектора ковариантные производные совпадают с обычными частными производными. Можно

* Черта над символом функции обозначает комплексное сопряжение,

$$2l_{[\mu}m_{\nu]}\equiv l_\mu m_\nu-l_\nu m_\mu.$$

показать [1] (гл. 37), что пробные частицы испытывают ускорение в плоскости, поперечной направлению распространения гравитационной волны, и детектор, расположенный в этой плоскости, поглощает некоторое количество энергии.

в) Так как движение пробных масс вычисляется в координатах Ферми, в тех же координатах следует искать значения псевдотензоров, характеризующих падающую волну. При условии, что мировая линия G центра массы детектора — времени-подобная геодезическая, метрика пространства-времени гравитационной волны (4) записывается в виде [6]

$$g_{00}=1-\overset{0}{R}_{0l0m}x^lx^m+O((x^i)^3),$$
$$g_{0i}=-\frac{2}{3}\overset{0}{R}_{0lim}x^lx^m+O((x^i)^3), \tag{5}$$
$$g_{ij}=-\delta_{ij}-\frac{1}{3}\overset{0}{R}_{iljm}x^lx^m+O((x^i)^3),$$

а первые производные символов Кристоффеля на мировой линии G центра массы имеют вид [6]

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\nu,0}=0,$$
$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu0,\nu}=\overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu0}, \tag{6}$$
$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{ij,k}=-\frac{1}{3}(\overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{ijk}+\overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{jik}).$$

Здесь $\overset{0}{f}(t)$ — значение функции $f(x^\alpha)$ на мировой линии G, которая является также координатной линией времени, $\overset{0}{x}{}^\alpha=(t,0,0,0)$. Предположим, что гравитационная волна распространяется в сторону оси x, тогда $\overset{0}{l}_\mu=(1,-1,0,0)$, $\sqrt{2}\overset{0}{\bar{m}}_\mu=-(0,0,1,i)$.

Вычислим плотность и поток энергии в этих координатах для псевдотензора Эйнштейна

$$2t_\alpha{}^\beta=\varkappa\sqrt{-g}(\delta^\rho_\tau\delta^\beta_\alpha-2\delta^\rho_\alpha\delta^\beta_\tau)[g^{\nu\tau}(\Gamma^\chi_{\chi\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}-\Gamma^\chi_{\chi\nu}\Gamma^\sigma_{\sigma\rho})+$$
$$+g^{\chi\sigma}(\Gamma^\tau_{\chi\sigma}\Gamma^\mu_{\mu\rho}+\Gamma^\nu_{\nu\sigma}\Gamma^\tau_{\chi\rho}-2\Gamma^\tau_{\beta\sigma}\Gamma^\beta_{\chi\rho}], \tag{7}$$
$$\varkappa=c^4/16\pi G$$

и псевдотензора Ландау—Лифшица [7]. В первом неисчезающем приближении в разложении по степеням пространственных координат x^i получим при псевдотензоре Эйнштейна

$$t_0{}^0=\frac{2}{3}\varkappa\overset{0}{\Psi}_4\overset{0}{\bar{\Psi}}_4\left(\frac{8}{3}\overset{0}{m}_k\overset{0}{\bar{m}}_s-\overset{0}{l}_k\overset{0}{l}_s\right)x^kx^s,$$
$$t_0{}^i=0 \tag{8}$$

и при псевдотензоре Ландау—Лифшица

$$t^{00}=\frac{14}{9}\varkappa\overset{0}{\Psi}_4\overline{\overset{0}{\Psi}}_4\overset{0}{l}_k\overset{0}{l}_s x^k x^s,$$

$$t^{01}=\frac{4}{3}\varkappa\overset{0}{\Psi}_4\overline{\overset{0}{\Psi}}_4\overset{0}{l}_k\overset{0}{l}_s x^k x^s, \tag{9}$$

$$t^{0A}=-\frac{4}{3}\varkappa\overset{0}{\Psi}_4\overline{\overset{0}{\Psi}}_4(\overset{0}{m}{}^A\overset{0}{\overline{m}}_k\overset{0}{l}_s+\overset{0}{\overline{m}}{}^A\overset{0}{m}_k\overset{0}{l}_s)x^k x^s,$$

$$A=2,3;$$

$$2\overset{0}{m}_k\overset{0}{\overline{m}}_s x^k x^s=y^2+z^2,$$

$$\overset{0}{l}_k\overset{0}{l}_s x^k x^s=x^2, \tag{10}$$

$$(\overset{0}{m}{}^A\overset{0}{\overline{m}}_k\overset{0}{l}_s+\overset{0}{\overline{m}}{}^A\overset{0}{m}_k\overset{0}{l}_s)x^k x^s=\{yx, zx\}.$$

Видим, что, хотя на мировой линии центра массы детектора оба псевдотензора исчезают, в конечной области, занимаемой детектором, по меньшей мере некоторые компоненты псевдотензоров отличны от нуля. Но если окружность, на которой расположены частицы, находится в плоскости $x=0$, поперечной направлению распространения гравитационной волны, т. е. в положении, где по уравнениям движения поглощение энергии должно быть максимальным, поток падающей гравитационной энергии обращается в нуль, $t_0{}^i=t^{0i}=0$.

г) По этой причине расчет эффективного сечения детектора с помощью псевдотензоров Эйнштейна или Ландау—Лифшица невозможен, хотя они и отличны от нуля в малой конечной области пространства, занимаемой детектором.

4. Имеются работы, в которых псевдотензор вычисляется в римановых координатах, где метрика пространства-времени имеет вид

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\frac{1}{3}R_{\rho\mu\nu\sigma}(0)\,x^\rho x^\sigma+O((x^\alpha)^3).$$

Второе частное производное псевдотензора Эйнштейна в начальной точке этих координат записывается [1] (упр. 15.2), [8, 9] как

$$t_{\alpha,\gamma\delta}^{\beta}(0)=\frac{1}{9}\varkappa[4T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(0)-S_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}(0)], \tag{11}$$

где $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор суперэнергии Бела—Робинсона, а $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор, который не имеет хорошей геометрической или физической интерпретации

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}\equiv R_{\alpha\delta\rho\sigma}R_{\beta\gamma}{}^{\rho\sigma}+R_{\alpha\gamma\rho\sigma}R_{\beta\delta}{}^{\rho\sigma}+\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g_{\delta\gamma}R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}.$$

Аналогичное выражение для псевдотензора Ландау—Лифшица имеет вид

$$t^{\alpha\beta}{}_{,\gamma\delta}(0)=\frac{1}{9}\varkappa\left[7T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}(0)+\frac{1}{2}S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}(0)\right]. \tag{12}$$

Но координаты Римана в принципе не подходят для описания обмена энергии, так как они связаны с выделенным событием $x^\alpha=0$ в 4-пространстве и не допускают усреднения по времени.

5. Обсуждение результатов. Поток гравитационной энергии, падающий на веберовский детектор, обычно оценивается двумя способами.

1) Вычисляется полная мощность, излучаемая возможными астрофизическими источниками, и находится усредненный поток энергии в единичный телесный угол [10, 11]. Этот метод прямо заимствован из электродинамики и нет никаких расчетов, подтверждающих его законность в теории гравитации.

2) В рамках высокочастотного приближения вводится эффективный тензор энергии-импульса гравитационных волн $T_{\mu\nu}^{(GW)}$, который совпадает с усредненным по нескольким длинам волн псевдотензором Ландау—Лифшица [1] (гл. 35). Для плоских волн (4) поток энергии, определенный с помощью $T_{\mu\nu}^{(GW)}$, имеет вполне разумное значение $T_{00}^{(GW)} = -T_{0x}^{(GW)} \neq 0$, $T_{0y}^{(GW)} = T_{0z}^{(GW)} = 0$. К сожалению, в рамках используемого нами приближения этот результат не поддается проверке, так как анализ детектора в координатах Ферми предполагает, что рассматриваемая область мала в сравнении с длиной волны, $x^i \leqslant \lambda$. Поскольку мы не можем должным образом учитывать волновой характер гравитационного поля, это обстоятельство также может быть причиной исчезновения потока энергии, вычисленного нами непосредственно с помощью псевдотензоров $t^{\mu\nu}$ и t_μ^ν.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мизнер Ч., Торн К., Уйлер Дж., Гравитация, М., «Мир», 1977.
2. Havas, P., Colloq. int. CNRS, **220**, 383—392 (1974).
3. Havas, P., In: Isolated Gravitating Systems in General Relativity, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam—New York—Oxford, 1979, p. 74—155.
4. Deser, S., Lect. Notes Math., **775**, 49—68 (1980).
5. Newman, E., Penrose, R., J. Math. Phys., **3**, № 3, 566—578 (1962).
6. Manasse, F. K., Misner, C. W., J. Math. Phys, **4**, № 6, 735—745 (1963).
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., «Наука», 1973.
8. Pirani, F. A. E., Phys. Rev., **105**, № 3, 1089—1099 (1957).
9. Garecki, J., Acta phys. pol., **B4**, 573—574 (1973).
10. Вебер Дж., Общая теория относительности и гравитационные волны, М., ИЛ, 1962.
11. Брагинский В. Б., Манукин А. Б., Измерение малых сил в физических экспериментах, М., «Наука», 1974.

Институт физики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/VI 1981

Piret KUUSK

GRAVITATSIOONIVÄLJA ENERGIAIMPULSI PSEUDOTENSORITE OMADUSED AEGRUUMI LÕPLIKUS PIIRKONNAS

On arvutatud energia tihedus ja voog tasase gravitatsioonilaine (4) korral Fermi normaalkoordinaatides (5) Einsteini (8) ja Landau-Lifšitsi (9) pseudotensorist lähtudes. Kuigi lõplikus piirkonnas pseudotensorite komponendid on nullist erinevad, ei võimalda nad kirjeldada gravitatsioonienergia vastuvõttu Weberi tüüpi detektorite abil lähenduses, mida harilikult kasutatakse analoogilistes arvutustes elektrodünaamikas.

Piret KUUSK

ON THE PROPERTIES OF GRAVITATIONAL ENERGY-MOMENTUM PSEUDOTENSORS IN A FINITE REGION OF SPACE-TIME

It is well known that gravitational energy-momentum pseudotensors describe correctly the total energy and linear momentum of an isolated non-radiating gravitating system but have no invariant local meaning. In the present paper the properties of the pseudotensors in a finite region of space-time with the metric of a weak plane gravitational wave (4) are investigated. Since the analysis of the Weber detector is usually carried out in the Fermi coordinates (5), (6), the Einstein pseudotensor (7) and the Landau-Lifshitz pseudotensor [7] are calculated in these coordinates. The corresponding results (8), (9) show that although the components of pseudotensors do not vanish, there is no energy flux through a ring of test particles in the transverse plain, $t_0{}^i|_{x=0}=t^{0i}|_{x=0}=0$. According to the conventional theory [1, 10], such a ring certainly absorbs gravitational wave energy. Consequently, pseudotensors do not describe the transmission of gravitational energy in an approximation most frequently used in analogous calculations in electrodynamics.

The Landau-Lifshitz pseudotensor in the Riemann coordinates is calculated. It is shown that the resulting formula (12) slightly differs from the corresponding formula (11) for the Einstein pseudotensor as given in [1, 8, 9].