EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 30. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1981, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 30
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1981, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1981.4.04

УДК 515.122.32+515.122.536

М. АБЕЛЬ

РАСШИРЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПОКРЫТИЯ

(Представил А. Хумал)

1. Пусть X и Y — топологические пространства, $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(X)$ — покрытие пространства X и $\mathbf{F}$ — поле $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$. Пусть, далее, $C(X, Y)$ — множество всех Y-значных непрерывных функций на X и $C(X, Y; \mathfrak{S})$ — подмножество тех функций $f \in C(X, Y)$, для которых образ $f(S)$ относительно компактен в Y при каждом $S \in \mathfrak{S}$. Как известно, в пространстве $\mathbf{F}$ относительно компактны те и только те подмножества, которые ограничены. Поэтому $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ совпадает со множеством всех тех функций $f \in C(X, \mathbf{F})$, для которых сужения $f|S$ ограничены на S при каждом $S \in \mathfrak{S}$. Следует отметить, что $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ совпадает со множеством $C(X, \mathbf{F})$ в случае, когда каждое $S \in \mathfrak{S}$ *относительно псевдокомпактно* (т. е. каждое S есть такое подмножество пространства X, на котором любая функция $f \in C(X, \mathbf{R})$ ограничена), и совпадает со множеством $C_b(X, \mathbf{F})$ всех $\mathbf{F}$-значных ограниченных непрерывных функций на X в случае, когда пространство X само псевдокомпактно или покрытие $\mathfrak{S}$ пространства X конечно. Таким образом, для любого покрытия $\mathfrak{S}$ пространства X множество $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ представляет собой некоторое промежуточное между $C_b(X, \mathbf{F})$ и $C(X, \mathbf{F})$ множество, которое в частном случае совпадает с одним из них.

В данной статье определяются расширения* $(\mathfrak{S}X, h_X)$ и $(\mathfrak{S}_\beta X, h_X)$ тихонова пространства X, зависящие от его покрытия, и изучаются свойства пространств $\mathfrak{S}X$ и $\mathfrak{S}_\beta X$. Такие расширения хорошо известны в случае, когда все элементы покрытия $\mathfrak{S}$ относительно псевдокомпактны (тогда $(\mathfrak{S}X, h_X)$ есть расширение Хьюитта [1, 2] пространства X и $\mathfrak{S}_\beta X = h_X(X)$), и в случае, когда покрытие $\mathfrak{S}$ конечно (тогда $(\mathfrak{S}X, h_X)$ есть расширение Стоуна—Чеха $(\beta X, h_X)$ [1–3] пространства X и $\mathfrak{S}_\beta X = \beta X$). Как показано в [1, 2], при помощи пространств βX и νX описываются алгебраические и топологические свойства алгебр $C_b(X, \mathbf{F})$ и $C(X, \mathbf{F})$, а при помощи этих алгебр, в свою очередь, описываются топологические свойства пространств X, βX и νX. Таким образом, пространства $\mathfrak{S}X$ и $\mathfrak{S}_\beta X$ дают возможность одновременно изучать алгебраические и топологические свойства не только алгебр $C_b(X, \mathbf{F})$ и $C(X, \mathbf{F})$, но и промежуточной алгебры $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$. В этой статье из числа остальных свойств доказывается наполненность пространства $\mathfrak{S}X$ и находятся необходимые и достаточные условия для наполненности, псевдокомпактности и компактности пространства $\mathfrak{S}_\beta X$ (теорема 2).

* Пусть X и Y топологические пространства. Если существует всюду плотное вложение $h_X: X \to Y$, то пара (Y, h_X) называется расширением пространства X.

2. Пусть X — тихоново пространство и $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Поскольку $\mathbf{R}$ отделимо и локально компактно, то $\mathbf{R}^*$ является отделимым и компактным пространством (см. [3], с. 256). Поэтому функция $f \in C(X, \mathbf{R})$, рассматриваемая как функция X в $\mathbf{R}^*$, определяет однозначно определенную функцию $f^* \in C(\beta X, \mathbf{R}^*)$ такую, что $f^* \circ h_X = f$ (см. [2], с. 103).

Как известно (см. [1], с. 21), *наполнение* νX тихонова пространства X определяется равенством

$$\nu X = \{p \in \beta X : f^*(p) \in \mathbf{R}\ \forall f \in C(X, \mathbf{R})\}.$$

В случае, когда $\nu X = h_X(X)$, пространство X называется *наполненным пространством.*

Пусть, теперь, $\mathfrak{S}$ — любое покрытие тихонова пространства X и

$$\mathfrak{S}X = \{p \in \beta X : f^*(p) \in \mathbf{R}\ \ \forall f \in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})\}.$$

Тогда справедливы включения $\nu X \subseteq \mathfrak{S}X \subseteq \beta X$. При этом $\mathfrak{S}X = \nu X$ тогда и только тогда, когда $C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S}) = C(X, \mathbf{R})$, и $\mathfrak{S}X = \beta X$ тогда и только тогда, когда $C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S}) = C_b(X, \mathbf{R})$. Множество $\mathfrak{S}X$ наделим топологией, индуцируемой топологией пространства βX. Тогда** $\mathrm{cl}_{\mathfrak{S}X} h_X(X) = \mathfrak{S}X$. Таким образом, пара $(\mathfrak{S}X, h_X)$ является отделимым вполне регулярным расширением пространства X.

Пространство $\mathfrak{S}X$ будем называть *наполнением пространства X относительно покрытия* $\mathfrak{S}$, а топологическое пространство X, удовлетворяющее условию $\mathfrak{S}X = h_X(X)$, — *наполненным относительно покрытия* $\mathfrak{S}$. Таким образом, тихоново пространство X является наполненным относительно покрытия $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда пространство X само наполнено и, кроме того, каждое $S \in \mathfrak{S}$ относительно псевдокомпактно в X.

3. Пусть X — тихоново пространство, $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X и

$$\mathfrak{S}_\beta X = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \bar{S},$$

где $\bar{S} = \mathrm{cl}_{\beta X} h_X(S)$. Тогда для любых $S \in \mathfrak{S}$ и $f \in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$ справедливо

$$f^*(\bar{S}) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbf{R}^*}(f^* \circ h_X(S)) = \mathrm{cl}_{\mathbf{R}^*} f(S) \subset \mathbf{R}$$

(здесь функция $f^* \in C(\beta X, \mathbf{R}^*)$, но $\infty \notin \mathrm{cl}_{\mathbf{R}^*} f(S)$, так как окрестность $(X \backslash \mathrm{cl}_{\mathbf{R}} f(S)) \cup \{\infty\}$ точки ∞ в $\mathbf{R}^*$ и множество $f(S)$ не пересекаются). Поэтому

$$f^*(\mathfrak{S}_\beta X) = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} f^*(\bar{S}) \subset \mathbf{R}$$

при $f \in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$. Таким образом, множество $\mathfrak{S}_\beta X$ удовлетворяет условию $h_X(X) \subseteq \mathfrak{S}_\beta X \subseteq \mathfrak{S}X$. Кроме того, если каждое множество $S \in \mathfrak{S}$ компактно в X (относительно псевдокомпактно в X), то $\bar{S} = h_X(S)$ (соответственно, $\bar{S} \subseteq \nu X$ (см. [1], с. 28)). Поэтому в первом случае справедливо $\mathfrak{S}_\beta X = h_X(X)$, а во втором — $h_X(X) \subseteq \mathfrak{S}_\beta X \subseteq \nu X$.

Теперь рассмотрим некоторые свойства пространств $\mathfrak{S}_\beta X$ и $\mathfrak{S}X$.

Теорема 1. *Пусть X — тихоново пространство, $\mathfrak{S}$ — его покрытие и Y — тихоново (соответственно, наполненное) пространство. Тогда для любого отображения $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$ существует однозначно опре-*

** Здесь и далее через $\mathrm{cl}_Y X$ обозначается замыкание множества $X \subseteq Y$ в топологии пространства Y.

деленное отображение $f^{\mathfrak{S}} \in C(\mathfrak{S}_\beta X, Y)$ *(соответственно,* $f^{\mathfrak{S}} \in C(\mathfrak{S}X, Y)$ *такое, что**** $f^{\mathfrak{S}} \circ h_X = f$.

Доказательство. а) Пусть Y — тихоново пространство и $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$. Тогда отображение $g = h_Y \circ f \in C(X, \beta Y)$ определяет однозначно определенное отображение $g^\beta \in C(\beta X, \beta Y)$ такое, что $g^\beta \circ h_X = g$ (см. [4], с. 130). В силу относительной компактности множества $f(S)$ в Y при $S \in \mathfrak{S}$, множество $U = h_Y[\mathrm{cl}_Y f(S)]$ компактно и, следовательно, замкнуто в βY при каждом $S \in \mathfrak{S}$. Учитывая это и непрерывность отображения g^β на βX, убеждаемся, что для каждого $S \in \mathfrak{S}$ справедливо

$$g^\beta(\bar{S}) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta Y}[g^\beta \circ h_X(S)] = \mathrm{ch}_{\beta Y}[h_Y \circ f(S)] \subseteq \mathrm{cl}_{\beta Y} U = U \subset h_Y(Y).$$

Поэтому

$$g^\beta(\mathfrak{S}_\beta X) = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} g^\beta(\bar{S}) \subseteq h_Y(Y).$$

Таким образом, отображение $f^{\mathfrak{S}} = (h_Y)^{-1} \circ g^\beta \in C(\mathfrak{S}_\beta X, Y)$ и справедливо $f^{\mathfrak{S}} \circ h_X = f$. Отображение $f^{\mathfrak{S}}$ определено однозначно ввиду отделимости пространства Y.

б) Пусть, теперь, Y — наполненное пространство и $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$. Тогда, аналогично изложенному выше, существует однозначно определенное отображение $g^\beta \in C(\beta X, \beta Y)$ такое, что $g^\beta \circ h_X = g = h_Y \circ f$. Пусть, далее, α — любая функция в $C(Y, \mathbf{R})$. Так как $\alpha \circ f(S) \subseteq \alpha[\mathrm{cl}_Y f(S)]$ при $S \in \mathfrak{S}$ и $\alpha[\mathrm{cl}_Y f(S)]$ компактно в $\mathbf{R}$, то $\alpha \circ f \in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$. Поэтому $(\alpha \circ f)^*(p) \in \mathbf{R}$ для всех $p \in \mathfrak{S}X$. Учитывая, что множество $h_X(X)$ всюду плотно в $\mathfrak{S}X$, и то, что $(\alpha \circ f)^*(p) = (\alpha^* \circ g^\beta)(p)$ для всех $p \in h_X(X)$, убеждаемся в справедливости $(\alpha \circ f)^* = \alpha^* \circ g^\beta$ на $\mathfrak{S}X$ при любой функции $\alpha \in C(Y, \mathbf{R})$. Значит, $g^\beta(p) \in \nu Y = h_Y(Y)$ для каждой точки $p \in \mathfrak{S}X$. Таким образом, отображение $f^{\mathfrak{S}} = (h_Y)^{-1} \circ g^\beta \in C(\mathfrak{S}X, Y)$ и $f^{\mathfrak{S}} \circ h_X = f$. Отображение $f^{\mathfrak{S}}$ определено однозначно ввиду отделимости пространства Y.

Теорема 1 доказана (см. [2], с. 117) для случая, когда все элементы покрытия $\mathfrak{S}$ пространства X компактны (тогда $C(X, Y; \mathfrak{S}) = C(X, Y)$ и $\mathfrak{S}X = \nu X$), и для случая, когда $\mathfrak{S} = \{X\}$.

Пусть, теперь,

$$\mathfrak{S}_\beta = \{\bar{S} : S \in \mathfrak{S}\}$$

и Y — локально выпуклая алгебра над $\mathbf{F}$, топология которой определена семейством $\{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ непрерывных полунорм. Наделяя множество $C(X, Y; \mathfrak{S})$ топологией, определенной семейством $\{p_{\alpha S} : \alpha \in \mathfrak{A}, S \in \mathfrak{S}\}$ непрерывных полунорм (здесь $p_{\alpha S}(f) = \sup_{x \in S} p_\alpha(f(x))$ для всех $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$), и определяя алгебраические операции над функциями, как обычно, поточечно, можно заключить, что множество $C(X, Y; \mathfrak{S})$ есть локально выпуклая алгебра над $\mathbf{F}$. С учетом этого из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть X — тихоново пространство, $\mathfrak{S}$ — его покрытие и Y — отделимая локально выпуклая (наполненная локально выпуклая) алгебра над* $\mathbf{F}$. *Тогда* $F_{\mathfrak{S}} : f \to f^{\mathfrak{S}}$ *является топологическим изоморфизмом алгебры* $C(X, Y; \mathfrak{S})$ *на* $C(\mathfrak{S}_\beta X, Y; \mathfrak{S}_\beta)$ *(соответственно изоморфизмом алгебры* $C(X, Y; \mathfrak{S})$ *на* $C(\mathfrak{S}X, Y)$*).*

*** Здесь и далее h_X обозначает такое всюду плотное вложение X в βX, при котором существует отображение $f^\beta \in C(\beta X, Y)$ (Y — компактное пространство), удовлетворяющее условию $f^\beta \circ h_X = f$ для всех $f \in C(X, Y)$.

Доказательство. Как известно (см. [5], с. 573), каждое отделимое локально выпуклое пространство вполне регулярно. Поэтому (по теореме 1) для каждого отображения $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$ существует однозначно определенное отображение $f^{\mathfrak{S}} \in C(\mathfrak{S}_\beta X, Y; \mathfrak{S}_\beta)$ (соответственно, $f^{\mathfrak{S}} \in C(\mathfrak{S}X, Y))$ такое, что $f^{\mathfrak{S}} \circ h_X = f$. Нетрудно заметить, что $F_{\mathfrak{S}}$ есть инъективное отображение. Если $g \in C(\mathfrak{S}_\beta X, Y; \mathfrak{S}_\beta)$ (или $g \in C(\mathfrak{S}X, Y))$, то $g \circ h_X \in C(X, Y; \mathfrak{S})$ (в силу того, что $g \circ h_X(S) \subseteq g(\bar{S})$ и $\bar{S}$ компактно в $\mathfrak{S}_\beta X$ и в $\mathfrak{S}X$) и $F_{\mathfrak{S}}(g \circ h_X) = (g \circ h_X)^{\mathfrak{S}} = g$. Так как по теореме 1 отображения $f^{\mathfrak{S}}$ определены однозначно для каждого отображения f, то $(f+g)^{\mathfrak{S}} = f^{\mathfrak{S}} + g^{\mathfrak{S}}$, $(fg)^{\mathfrak{S}} = f^{\mathfrak{S}} g^{\mathfrak{S}}$ и $(\lambda f)^{\mathfrak{S}} = \lambda f^{\mathfrak{S}}$ для всех $f, g \in C(X, Y; \mathfrak{S})$ и $\lambda \in \mathbf{F}$. Следовательно, $F_{\mathfrak{S}}$ есть изоморфизм $C(X, Y; \mathfrak{S})$ на $C(\mathfrak{S}_\beta X, Y; \mathfrak{S}_\beta)$ (соответственно, на $C(\mathfrak{S}X, Y))$.

Пусть, теперь, локально выпуклая топология алгебры Y определена семейством $\{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ непрерывных полунорм. Тогда справедливо

$$p_{\alpha,S}(f) = p_{\alpha,\bar{S}}(f^{\mathfrak{S}})$$

для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, $S \in \mathfrak{S}$ и $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$. Действительно, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$p_{\alpha,S}(f) = p_{\alpha,h_X(S)}(f^{\mathfrak{S}}) \leqslant p_{\alpha,\bar{S}}(f^{\mathfrak{S}})$$

для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, $S \in \mathfrak{S}$ и $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$. Предположим, что

$$0 \leqslant d = p_{\alpha,S}(f) < p_{\alpha,\bar{S}}(f^{\mathfrak{S}}).$$

Тогда существует точка $p \in \bar{S}$ такая, что $d < p_\alpha \circ f^{\mathfrak{S}}(p)$. В силу непрерывности отображения $p_\alpha \circ f^{\mathfrak{S}}$ на $\bar{S}$ для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$, $S \in \mathfrak{S}$ и $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$, существует в $\mathfrak{S}_\beta X$ окрестность $O(p)$ точки p такая, что $p_\alpha \circ f^{\mathfrak{S}}(O(p)) \subseteq \mathbf{R} \setminus [0, d]$. Поскольку $O(p) \cap h_X(S) \neq \varnothing$, то $p_\alpha \circ f(x) = p_\alpha \circ f^{\mathfrak{S}}[h_X(x)] > d$ при некоторой точке $h_X(x) \in O(p) \cap h_X(S)$, что невозможно.

Таким образом, изоморфизм $F_{\mathfrak{S}}$ алгебры $C(X, Y; \mathfrak{S})$ на алгебру $C(\mathfrak{S}_\beta X, Y; \mathfrak{S}_\beta)$ является топологическим.

Следствие 1 известно в случае, когда**** $\mathfrak{S} = \{X\}$ (см., напр., [6], с. 19), а также в случае, когда $Y = \mathbf{F}$ и покрытие $\mathfrak{S}$ пространства X состоит из счетного числа замкнутых подмножеств S_n пространства X, удовлетворяющих условию $S_n \subseteq S_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{N}$ (см. [7], с. 38).

Теорема 2. *Пусть X — тихоново пространство и $\mathfrak{S}$ — его покрытие. Тогда*

а) *пространство $\mathfrak{S}X$ наполнено*;

б) *пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ наполнено тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}_\beta X = \mathfrak{S}X$*;

в) *пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ псевдокомпактно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}X = \beta X$*;

г) *пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ компактно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}_\beta X = \beta X$.*

Доказательство. а) Поскольку $h_X(X) \subseteq \mathfrak{S}X \subseteq \beta X$, то существует

**** В этом случае $\mathfrak{S}_\beta X = \beta X$.

(см. [8], с. 227) гомеоморфизм μ пространства βX на пространство $\beta(\mathfrak{S}X)$, удовлетворяющее условию***** $\mu\circ\mathbf{1}_{\mathfrak{S}X}=h_{\mathfrak{S}X}$. В силу наполненности пространства $\mathbf{R}$ (см. [1], с. 26), для каждой функции $f\in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$ существует по теореме 1 функция $f^{\mathfrak{S}}\in C(\mathfrak{S}X, \mathbf{R})$ такая, что $f^{\mathfrak{S}}\circ h_{\mathfrak{S}X}=f$. Из******

$$(f^{\mathfrak{S}})^*\circ\mu|\mathfrak{S}X=(f^{\mathfrak{S}})^*\circ h_{\mathfrak{S}X}=f^{\mathfrak{S}}=f^*|\mathfrak{S}X$$

для каждой функции $f\in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$ и всюду плотности пространства $\mathfrak{S}X$ в βX следует, что $(f^{\mathfrak{S}})^*\circ\mu=f^*$ на βX для каждой функции $f\in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$. Учитывая это и изоморфность алгебр $C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$ и $C(\mathfrak{S}X, \mathbf{R})$ (см. следствие 1), можно заключить, что из

$$\nu(\mathfrak{S}X)=\{q\in\beta(\mathfrak{S}X):(f^{\mathfrak{S}})^*(q)\in\mathbf{R}\ \forall f\in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})\}$$

вытекает

$$\mu^{-1}[\nu(\mathfrak{S}X)]=\{p\in\beta X:(f^{\mathfrak{S}})^*[\mu(p)]\in\mathbf{R}\ \forall f\in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})\}=\mathfrak{S}X.$$

Следовательно,

$$\nu(\mathfrak{S}X)=\mu(\mathfrak{S}X)=\mu\circ\mathbf{1}_{\mathfrak{S}X}(\mathfrak{S}X)=h_{\mathfrak{S}X}(\mathfrak{S}X),$$

т. е. пространство $\mathfrak{S}X$ наполнено.

б) В силу включения $h_X(X)\subseteq\mathfrak{S}_\beta X\subseteq\beta X$ и всюду плотности пространства $\mathfrak{S}_\beta X$ в βX покажем аналогично части а) доказательства, что $\mu^{-1}(\nu(\mathfrak{S}_\beta X))=\mathfrak{S}X$. Если пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ наполнено, то

$$\mathfrak{S}X=\mu^{-1}[\nu(\mathfrak{S}_\beta X)]=\mu^{-1}[h_{\mathfrak{S}_\beta X}(\mathfrak{S}_\beta X)]=\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_\beta X}(\mathfrak{S}_\beta X)=\mathfrak{S}_\beta X.$$

Пусть, теперь, $\mathfrak{S}X=\mathfrak{S}_\beta X$. Тогда, по утверждению а), пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ является наполненным.

в) Как известно (см. [1], с. 27), тихоново пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ псевдокомпактно тогда и только тогда, когда $\nu(\mathfrak{S}_\beta X)=\beta(\mathfrak{S}_\beta X)$. Если пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ псевдокомпактно, то

$$\mathfrak{S}X=\mu^{-1}[\nu(\mathfrak{S}_\beta X)]=\mu^{-1}[\beta(\mathfrak{S}_\beta X)]=\beta X,$$

а если $\mathfrak{S}X=\beta X$, то из

$$\nu(\mathfrak{S}_\beta X)=\mu(\mathfrak{S}X)=\mu(\beta X)=\beta(\mathfrak{S}_\beta X)$$

следует псевдокомпактность пространства $\mathfrak{S}_\beta X$.

г) Как известно (см. [1], с. 27), тихоново пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ компактно тогда и только тогда, когда оно наполнено и псевдокомпактно. Таким образом, по утверждениям б) и в) пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ является компактным пространством тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}_\beta X=\beta X$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть X — тихоново пространство и $\mathfrak{S}$ — его счетное покрытие. Тогда $\mathfrak{S}_\beta X=\mathfrak{S}X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В данном случае пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ есть счетное объединение компактных подмножеств. Поэтому пространство $\mathfrak{S}_\beta X$

***** Здесь и далее $\mathbf{1}_Y$ обозначает тождественное отображение на Y.

****** Здесь и далее g^* обозначает продолжение функции $g\in C(Y, R^*)$ на βY, удовлетворяющее условию $g^*\circ h_Y=g$ (см. раздел 2).

σ-компактно и, следовательно, наполнено (см. [1], с. 25—26). Итак, по теореме 2б), справедливо $\mathfrak{S}_\beta X = \mathfrak{S}X$.

4. Согласно следствию 1 из [1], пространство $\mathfrak{S}X$ и пространство $\mathrm{Hom}\, C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ всех $\mathbf{F}$-значных гомоморфизмов алгебры $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ гомеоморфны, если пространство $\mathrm{Hom}\, C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ наделить слабой топологией, определенной алгеброй $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$. С учетом этого справедлива

Теорема 3. *Пусть X и Y — тихоновы пространства, а $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — покрытия пространств X и Y соответственно. Пространства $\mathfrak{S}_1 X$ и $\mathfrak{S}_2 Y$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда алгебры $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_1)$ и $C(Y, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_2)$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть ω — гомеоморфизм пространств $\mathfrak{S}_2 Y$ и $\mathfrak{S}_1 X$. Тогда отображение $f \to f \circ \omega$ есть изоморфизм алгебр $C(\mathfrak{S}_1 X, \mathbf{F})$ и $C(\mathfrak{S}_2 Y, \mathbf{F})$. Поскольку $\mathbf{F}$ как сепарабельное метрическое пространство наполнено (см. [1], с. 26), то, по следствию 1, изоморфны и алгебры $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_1)$ и $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_2)$.

Пусть, теперь, ϱ — изоморфизм алгебр $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_1)$ и $C(Y, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_2)$. Тогда отображение $\psi \to \psi \circ \varrho$ есть гомеоморфизм пространства $\mathrm{Hom}\, C(Y, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_2)$ на $\mathrm{Hom}\, C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_1)$ (в слабых топологиях, определенных алгебрами $C(Y, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_2)$ и $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_1)$ соответственно). Поэтому гомеоморфны и пространства $\mathfrak{S}_1 X$ и $\mathfrak{S}_2 Y$ (см. [9], следствие 1).

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Пусть X — наполненное относительно покрытия $\mathfrak{S}_1$ пространство и Y— наполненное относительно покрытия $\mathfrak{S}_2$ пространство. Пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда алгебры $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_1)$ и $C(Y, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_2)$ изоморфны.*

5. В заключение отметим, что результаты данной работы анонсированы в [9, 10], где даны их некоторые применения. В [9] использовались пространства $\mathfrak{S}_\beta X$ и $\mathfrak{S}X$ для описания замкнутых и максимальных идеалов алгебры $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$, а также для описания $\mathbf{F}$-гомоморфизмов алгебры $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ и давалась алгебраическая характеристика наполненности, псевдокомпактности и компактности пространства $\mathfrak{S}_\beta X$. В [10] некоторые из этих результатов обобщались на алгебру векторнозначных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beckenstein, E., Narici, L., Suffel, Ch., Topological Algebras, North-Holland, Amsterdam, 1977.
2. Gillman, L., Jerison, M., Rings of Continuous Fuctions, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1960.
3. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А., Общая топология, М., «Высш. школа», 1979.
4. Steen, L. A., Seebach, J. A. jr., Counterexamples in Topology, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York at al., 1970.
5. Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, т. I, М., «Наука», 1975.
6. Абель М., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **430**, 14—21 (1977).
7. Nourddine, M. K., Habre, W., Pub. Dep. Math. Lyon, **14**, № 1, 27—54 (1977).
8. Engelking, R., General Topology, PWN, Warszawa, 1977.
9. Абель М., Уч. зап. Тартуск. ун-та, (в печати).
10. Абель М., В кн.: Тезисы конференции «Теоретические и прикладные вопросы математики», Тарту, изд. ТГУ, 1980, с. 111—113.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 18/V 1981

M. ABEL

TOPOLOOGILISTE RUUMIDE KATTEST SÕLTUVAD LAIENDID

On defineeritud topoloogilise ruumi uut tüüpi, ruumi kattest sõltuvad laiendid ja uuritud nende topoloogilisi omadusi.

M. ABEL

THE EXTENSIONS OF TOPOLOGICAL SPACES DEPENDING ON COVER

Let X be a completely regular T_1-space, $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(X)$ be a cover of X, $\mathbf{F}$ be one of the fields $\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$, $C(X, Y)$ be the set of all Y-valued continuous maps on X and $C(X, Y; \mathfrak{S})$ be the subset of those $f \in C(X, Y)$ for which $f(S)$ is relatively compact in Y for each $S \in \mathfrak{S}$. Moreover, let $(\beta X, h)$ be the Stone-Cech compactification of X,

$$\mathfrak{S}X=\{p \in \beta X : f^*(p) \in \mathbf{R} \ \forall f \in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})\}$$

(here $f^* \in C(\beta X, \mathbf{R} \cup \{\infty\})$ and $f^* \circ h=f$ for each $f \in C(X, \mathbf{R})$),

$$\mathfrak{S}_\beta X= \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \mathrm{cl}_{\beta X} h(S)$$

and Y be a completely regular (respectively replete) separated space.

It is proved that

a) for each $f \in C(X, Y, \mathfrak{S})$ there exists a such map $f^{\mathfrak{S}} \in C(\mathfrak{S}_\beta X, Y)$ (respectively $f^{\mathfrak{S}} \in C(\mathfrak{S}X, Y)$) that $f^{\mathfrak{S}} \circ h=f$;

b) the space $\mathfrak{S}X$ is replete for each cover $\mathfrak{S}$ of X;

c) the space $\mathfrak{S}_\beta X$ is replete if and only if $\mathfrak{S}_\beta X=\mathfrak{S}X$;

d) the space $\mathfrak{S}_\beta X$ is pseudocompact if and only if $\mathfrak{S}X=\beta X$;

e) the space $\mathfrak{S}_\beta X$ is compact if and only if $\mathfrak{S}_\beta X=\beta X$;

and

f) if $\mathfrak{S}_1$ is a cover of space X and $\mathfrak{S}_2$ is a cover of space Y, then the extensions $\mathfrak{S}_1 X$ and $\mathfrak{S}_2 Y$ are homeomorphic if and only if the algebras $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_1)$ and $C(Y, \mathbf{F}; \mathfrak{S}_2)$ are isomorphic.

The algebraic characterizations of spaces $\mathfrak{S}_\beta X$ and $\mathfrak{S}X$ are considered in [9].