EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 4

УДК 531.011; 62-50

И. КЕЙС

О ДИНАМИКЕ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ, КАНОНИЗИРУЕМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ВРЕМЕНИ

I. KEIS. AJA JÄRGI KANOONILISELE KUJULE TEISENDATUD AUTONOOMSETE SÜSTEEMIDE DÜNAAMIKAST

I. KEIS. ON THE DYNAMICS OF THE AUTONOMOUS SYSTEMS TIME-REDUCIBLE TO THE CANONICAL FORM

(Представил Н. Алумяэ)

В работе, продолжающей исследования [1, 2], рассмотрена задача определения вида управлений и свойств непотенциальной системы

$$q^{\cdot}=\partial H/\partial p,\quad p^{\cdot}=-\partial H/\partial q+u(q,p)$$
$$(\Delta_p H\equiv|\partial^2 H/\partial p_i\partial p_j|\neq 0,\ u\in C_1(q,p),\ \dim q,p=\overline{1,n}),\tag{1}$$

приводимой дифференциальным преобразованием $d\tau/dt=\lambda$ к канонической форме

$$q'=\partial G/\partial P,\quad P'=-\partial G/\partial q$$
$$(df/dt=f^{\cdot}=\lambda f',\ f'=df/d\tau,\ q^{\cdot}=\lambda q',\ G=G(q,P)),\tag{2}$$

$$\tilde\lambda+q'\cdot\nabla_{q'}\tilde\lambda\neq 0,\quad \tilde\lambda(q,q')=\lambda(q,P)=\lambda\in C_1(q,P)\quad (\Delta_P G\neq 0),$$

$\{\lambda=0/q'=0,\ P'=0\}\equiv Q\notin I$ — инвариантное множество (2).

Рассмотрим сперва позиционный [1] случай $\lambda=\lambda(q)$. Обозначим

$$L(q,q^{\cdot})=q^{\cdot}\cdot p-H,\quad \tilde L(q,q')\equiv L(q,\lambda q'),$$
$$K(q,q')=q'\cdot P-G,\quad R(q,q')=K-\tilde L,$$
$$r(q,P)=\nabla_{q'}R,\quad N(q,P)\equiv q'\cdot r-R=G-H,\quad \lambda p=P-r,$$
$$\lambda_*(q,p)=\lambda(q,P),\tag{3}$$
$$p=\partial L/\partial q^{\cdot}|_{q^{\cdot}=g}\equiv\psi(q,P),$$
$$P=\partial K/\partial q'|_{q'=h}\equiv\varphi(q,p)\ (a\cdot b=a_s b_s\equiv\sum_{s=1}^{n}a_s b_s),$$

$$q^{\cdot}=g(q,P)\equiv\lambda\,\partial G/\partial P,\quad q'=\lambda_*^{-1}\,\partial H/\partial p\equiv h(q,p)\ (r=(r_i)^*,\ i,s=\overline{1,n}),$$

где H, G — заданные нормальные функции ($\Delta_p H\neq 0$, $\Delta_P G\neq 0$). Из (1)—(3) находим для них искомую структуру вектор-функции регулятора

$$u=v_0(q,p)=(q^{\cdot}\cdot p)\frac{\partial\mu}{\partial q}-\left(q^{\cdot}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial q}\right)p-\left(\frac{\partial r}{\partial P}\cdot P'\right)-\frac{\partial N}{\partial q}$$

$$\left(\mu\equiv\ln|\lambda|,\ f'=\frac{df}{d\tau}\right). \tag{4}$$

В силу (4) и тождеств $G'\equiv 0$, $q'_s\partial r_s/\partial P_j\equiv\partial N/\partial P_j$ $(j=\overline{1,n})$ его мощность $W(v_0)\equiv q^{\cdot}\cdot v_0=-\lambda N'$. Следовательно, для регулятора приводимой системы $W(v_0)\neq 0$ при $\lambda=\lambda(q)$, $N'\neq 0$. Подслучаем данного будет вариант подобных по p, P функций H, $G\,(G(q,P)\equiv H(q,\psi(q,P)))$. В нем обобщены на $n>2$ результаты, полученные для ряда неголономных систем [1]. Можно показать, что в этом варианте подобие H, G эквивалентно равенствам $P=\lambda p\,(P\cdot q'=p\cdot q^{\cdot})$ и подобию L, K по $q^{\cdot}, q'$ $(K(q,q')\equiv L[q,g(q,\partial K/\partial q')],\ r\equiv 0,\ R\equiv N\equiv 0)$. Тогда из (2)—(4) находим приводящий регулятор системы (1)

$$\tilde v_0=\Gamma q^{\cdot},\quad \Gamma=\|\gamma_{ij}\|=-\Gamma^*,\quad \gamma_{ij}=p_j\,\partial\mu/\partial q_i-p_i\,\partial\mu/\partial q_j\quad (i,j=\overline{1,n}). \tag{5}$$

При этом $W\equiv 0$, H — инвариант системы (1), H, $\tilde v_{0i}$ — полиномы одной степени по p $(\mu=\ln|\lambda|\neq\text{const})$. Если $\lambda(q)$ — не инвариант (1) при $u=\tilde v_0$, то $\lambda(q)$ — множитель системы (1) лишь в случае $n=2$. Действительно, из (1), (5) оператор $D[\lambda]$ [2, 3], задающий множитель, имеет значение $D[\lambda]=\lambda^{\cdot}+\lambda\operatorname{div}_p\tilde v_0=(2-n)\lambda\mu^{\cdot}\neq 0$ $(\mu^{\cdot}\neq 0,\ \mu=\ln|\lambda|)$.

Применение фазовой производящей функции канонизации $\lambda=\lambda(q,P)$ ограничим для простоты двумя случаями — в первом условием подобия L, K и H, G соответственно по $q^{\cdot}, q'$ и p, P, во втором требованием преобразования подобия $(P=\lambda p)$. С учетом (3) в первом случае имеем

$$p=\psi(q,P)=\lambda^{-1}\left(P-\sigma\frac{\partial\mu_0}{\partial q'}\right),\quad G=H(q,\psi),$$

$$K=\tilde L(q,q')\ (\sigma\equiv q'\cdot P=q^{\cdot}\cdot p), \tag{6}$$

$$\lambda_0=\lambda(q,q^{\cdot}/|q^{\cdot}|),$$

$$\ln|\lambda_0|=\mu_0(q,q')=\mu_0(q,q^{\cdot})\left(q^{\cdot}\cdot\nabla_{q^{\cdot}}\mu_0\equiv 0,\ \frac{\partial^2K}{\partial q'_i\,\partial q'_j}=\lambda_0^2\frac{\partial^2L}{\partial q^{\cdot}_i\,\partial q^{\cdot}_j}\right).$$

Из (1), (2), (6) находим структуру и мощность канонизирующего регулятора

$$u=v_1(q,p)=\sigma E[\mu_0]-\lambda'p-\sigma\frac{\partial\mu_0}{\partial q'},$$

$$W\equiv 0\left(E=\frac{\partial}{\partial q}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial q'},\ f'\equiv df/d\tau\right). \tag{7}$$

Вид $v_1(q,p)$ получаем из (3), (7) и равенств $q'=(\lambda_0^{-1})\,\partial H/\partial p$, $q^{\cdot}=\partial H/\partial p$.

Рассмотрим теперь случай преобразования подобия $P=\lambda p$. Введем функцию $\tilde H(q,P)\equiv H(q,\lambda^{-1}P)$, где λ принадлежит подклассу Λ в (2), заданному условиями

$$l[\tilde H](1-l[\mu])^{-1}=V(\mu),\quad 1-l[\mu]\neq 0,$$

$$\Delta_P(\tilde H+\mu V)\neq 0\left(l(f)=P\cdot\frac{\partial}{\partial P}f\right). \tag{8}$$

Первое из (8) эквивалентно [3] существованию решения $G(q, P)$ системы $\nabla G = \nabla \tilde{H} + V(q, P)\nabla\mu$, равносильной $P = \lambda p\,(\Delta F = \partial F/\partial P)$. Остальные условия (8) обеспечивают обратимость $P \leftrightarrow p$ и $\Delta_P G \neq 0$. Отсюда из (3), (8) находим

$$G = G_0(q) + \int\limits_0^{\mu} V(\xi)\,d\xi + \tilde{H}(q, P),\quad \tilde{H} = \tilde{H}_0(q, e) + \int\limits_0^{\mu} V(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^{\rho} V(\tilde{\mu})\,d\varrho, \tag{9}$$

$$e = P/|P|,\ \varrho = \ln|P|,\ \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(q, \varrho, e) = \mu(q, P) = \ln|\lambda|,$$

$$V = p\cdot q^{\cdot}\,(G_0,\ \tilde{H}_0 \in C_1(q, e)).$$

Здесь $G_0(q)$, $\tilde{H}_0(q, e)$ — произвольные функции, $V(\mu)$ — задана для согласованных условиями (8) функций μ, H, производящих G и связь $P = \lambda p$. Из (3), (8), (9) имеем вид приводящего регулятора v_2 и его мощность

$$v_2 = -\nabla_q G_0 - \mu' p,\ W(v_2) = v_2\cdot\nabla_P H \neq 0\ (\mu' \neq 0,\ \nabla_q G_0 = 0,\ f' = df/d\tau). \tag{10}$$

Здесь векторы q, e — инварианты преобразования, $G(q, \lambda_* p)$ — инвариант системы (1) при $u = v_2(\lambda(q, P) \equiv \lambda_*(q, p))$. В подслучае натуральной системы

$$H = {}^1\!/_2[p\cdot B(q)\,p] + H_0(q),\ B = B^* = \|b_{ij}\| > 0\ \ (i, j = \overline{1, n})$$

все множество допустимых для (8)—(10) функций λ, G имеет вид

$$\lambda^{-1} = f_1 \exp F,\ G = {}^1\!/_4[f_0^{-1} f_1^2 (\exp 2F + f_2)],$$

$$F = f_0(P\cdot BP)\ (f_0 \neq 0,\ f_1 \neq 0,\ k = \overline{0, 2}),$$

где $f_k = f_k(q)$ — произвольные функции из класса $C_1(q)$ $(k = \overline{0, 2})$.

Во всех рассмотренных случаях позиционная траектория $q[\tau]$ системы (2) сохраняется для (1), а импульс — преобразуется с учетом (3): $p[\tau] = \psi(q[\tau], P[\tau])$. Следовательно, вид решений (1) находим интеграцией (2) в результате обращения функции

$$t = \int\limits_0^{\tau} \lambda^{-1}(q[\tau],\ P[\tau])\,d\tau\,(\lambda = \lambda_*(q, p) = \lambda(q, \varphi)).$$

Легко показать, что при условии $\tau = \int\limits_0^t \lambda_* dt = \text{fixconst}$ вектор-функция $v_k(q, p)$ — стационарный регулятор системы (1) по функционалу

$$I = \int\limits_0^t \lambda_*(q, p)\,[(P\cdot\partial G/\partial P) - G]\,dt\,(\delta I = 0,\ P = \varphi(q, p)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А., Исследования по динамике неголономных систем, М.—Л., ГИТТЛ, 1949, с. 28—38.
2. Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, М.—Л., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941, с. 34—54.
3. Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, М.—Л., ОНТИ, 1936, с. 510—532.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/VI 1980