

Т. ТОБИАС

УДК 519.24/28

ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА ПО КОСВЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

T. TOBIAS. DIFUSIOONIPROTSSESI KORDAJATE HINDAMINE KAUDSETE VAATLUSTE PÕNJAL

T. TOBIAS. ESTIMATION OF THE COEFFICIENTS OF THE DIFFUSION PROCESS BY INDIRECT OBSERVATIONS

(Представил Н. Алумяэ)

1. Пусть $x(t, \omega; \theta)$ — случайный процесс, зависящий от неизвестного параметра θ . При постановке задач об оценивании θ обычно считается, что задана часть траектории $x_0^T = \{x(s, \omega; \theta), 0 \leq s \leq T\}$, по которой строится оценка $\hat{\theta}_T$, наилучшая в определенном смысле.

Например ([1], с. 645), пусть $x_t = x(t, \omega; \theta)$ — процесс диффузионного типа с дифференциалом $dx_t = \theta a_t(x) dt + dW_t$, $x(0) = 0$. Оценка максимального правдоподобия (ОМП) имеет вид

$$\hat{\theta}_T = \int_0^T a_t(x) dx_t \left[\int_0^T a_t^2(x) dt \right]^{-1}$$

и определяется она отрезком конкретной траектории процесса x_t . Различные способы оценивания известны также в частично наблюдаемой модели, т. е. когда x_t — вектор, у которого подаются наблюдению лишь реализации части компонент.

В данном сообщении рассмотрим проблему в несколько иной постановке. Пусть траектория процесса ненаблюдаема. Наблюдению доступны лишь значения (вернее, оценки значений) некоторых функционалов от процесса, по которым требуется построить оценку параметра θ . Функционалы, по значениям которых строятся оценки, связаны с моментом первого выхода процесса из заданной области. Это соответствует случаю, когда процесс наблюдаем лишь на границе области и можно зафиксировать его положение в случайный момент выхода, а иногда и время первого выхода. Хорошо известно, что для диффузионных процессов значения таких функционалов определяются как решения некоторых дифференциальных уравнений [2, 3]. Поэтому ниже мы не будем формулировать точные условия относительно гладкости коэффициентов и границы области, гарантирующие существование решений этих уравнений, и будем считать, что эти (довольно слабые) условия везде выполнены.

2. Пусть $x_t = x(t)$, $x(0) = x$ — однородный n -мерный диффузионный процесс с равномерно эллиптическим производящим оператором $L =$

$$= \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R_n.$$

Пусть $D \subset R_n$ — ограниченная область с гладкой границей Γ и γ — часть этой границы. Обозначим через $u_\gamma(t, x)$ вероятность события, что в течение времени t процесс x_s , $0 \leq s \leq t$, выйдет из области D через γ . Известно [3], что при слабых ограничениях эта вероятность определяется как решение следующего уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial t} = Lu_\gamma, \quad (1)$$

$$u_\gamma(0, x) = 0, \quad x \in D; \quad u_\gamma(t, x) = 1, \quad x \in \gamma; \quad u_\gamma(t, x) = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \gamma.$$

Допустим, что о каждой траектории процесса x_t известно, вышла она за время t из области D через γ или нет (ввиду равномерной эллиптичности оператора L процесс выйдет из области D за конечное время с вероятностью 1). Эта информация дает возможность статистически оценивать решение уравнения $u_\gamma(t, x)$. Пусть неизвестные параметры процесса x_t — коэффициенты $a_i(x)$, $b_{ij}(x)$ и начальное положение $x(0) = x$ (или часть из них). Задача оценивания заключается в следующем: по оценке решения уравнения (1) требуется найти оценки неизвестных коэффициентов уравнения (1). Конечно, постановка задачи должна быть уточнена, так как в общем случае оцениваемы лишь определенные комбинации параметров. Отдельному рассмотрению подлежит также случай, когда оцениваемый параметр содержится в коэффициентах (т. е. коэффициенты заданы в виде $a_i(x, \theta)$, $b_{ij}(x, \theta)$).

Если есть возможность зафиксировать точный момент τ первого выхода траектории процесса из области D , то можно воспользоваться характеристиками случайной величины τ . Среднее время выхода $E_{x\tau} = T_1(x)$ удовлетворяет уравнению [2]

$$LT_1 + 1 = 0, \quad T_1(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Требуется оценить неизвестные коэффициенты уравнения (2) по оценке $T_1(x)$.

Высшие моменты $E_{x\tau^k} = T_k(x)$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям ($T_0 = 1$) [2]:

$$LT_k + kT_{k-1} = 0, \quad T_k(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

Если уравнения (3) удастся решить аналитически, тогда оценивание можно провести методом моментов. В противном случае нужно опять провести оценивание косвенно, т. е. построить оценку параметров по оценке решения $T_k(x)$.

В детерминированной постановке описанная задача близка к т. н. обратным задачам в теории дифференциальных уравнений, когда по заданным точным значениям функционалов от решений требуется определить неизвестные коэффициенты или краевые условия уравнения.

Если плотность распределения времени первого достижения границы удастся найти в аналитическом виде, тогда можно воспользоваться обычными методами оценивания. Ниже рассматривается один такой частный случай.

3. Пусть x_t — однородный одномерный диффузионный процесс, $Lu = au' + 1/2 b^2 u''$, где a и b — постоянные. Выберем сначала $D = (-\infty, B]$, $x(0) = x < B$ и пусть $a > 0$.

Известно явное выражение для плотности распределения времени первого достижения границы B . Именно;

$$\frac{\partial u_v}{\partial t} = \frac{B-x}{\sqrt{2\pi b}} t^{-3/2} \exp[a(B-x)/b] \exp[-(B-x)^2/2bt - a^2t/2b].$$

Обозначим $v(t, \theta_1, \theta_2) = (2\pi)^{-1/2} \theta_1 t^{-3/2} \exp(\theta_1 \theta_2) \exp(-\theta_1^2/2t - \theta_2^2/2t)$, где $\theta_1 = (B-x)/\sqrt{b}$, $\theta_2 = a/\sqrt{b}$. Пусть t_1, \dots, t_N — моменты достижения границы B независимыми траекториями процесса. Отметим, что $P(t_i < \infty) = 1$ и $Et_i < \infty$ (так как $a > 0$). Обозначим $s_1 = N^{-1} \sum_{i=1}^N t_i$,

$s_2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N t_i^{-1}$. Распределение $v(t, \theta_1, \theta_2)$ — экспоненциальное и $s = (s_1, s_2)$ — минимальная достаточная статистика семейства $v(t, \theta_1, \theta_2)$. ОМП имеют вид: $\hat{\theta}_2 = [s_1(s_1 s_2 - 1)]^{-1/2}$, $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 s_1$. Отсюда: $\hat{a} = (B-x)s_1^{-1}$, $\hat{b} = (B-x)^2 s_1^{-1} (s_1 s_2 - 1)$, $\hat{x} = B - a s_1$.

Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины τ . С помощью формул 3.214 и 3.283 из [4] получим, что $E_x \tau = \theta_1/\theta_2 = (B-x)/a$ и $E_x \tau^2 = ((1+\theta_1 \theta_2) \theta_1)/\theta_2^3 = (B-x)[b + (B-x)a]a^{-3}$. Поэтому $E\hat{x} = x$ и $D\hat{x} = b(B-x)/aN$. Ввиду экспоненциальности распределения случайной величины τ дисперсия $D\hat{x}$ достигает границы Крамера—Рао.

Если $a=0$, то $v(t, \theta) = (\theta/\sqrt{2\pi}) t^{-3/2} \exp(-\theta^2/2t)$, где $\theta = (B-x)/\sqrt{b}$. ОМП имеют вид: $\hat{x} = B - \sqrt{b/s_2}$, $\hat{b} = (B-x)^2 s_2$. Можно проверить, что $E\hat{x} = -\infty$, а $E\hat{b} = b$ и $D\hat{b} = 2b^2/N$ (т. е. граница Крамера—Рао достигается).

Ввиду того, что в данном случае $Et_i = \infty$, уместно воспользоваться другим методом, а именно — за достижением границы B наблюдать в течение фиксированного промежутка времени \bar{t} . Пусть $\pi(\theta) = \theta/\sqrt{2\pi} \int_0^{\bar{t}} t^{-3/2} \exp(-\theta^2/2t) dt$ — вероятность достижения границы B в течение времени $0 < t \leq \bar{t}$. Пусть за время \bar{t} из N траекторий k достигают границы B . Функция правдоподобия имеет вид $(N!/k!(N-k)!) \pi^k(\theta) [1 - \pi(\theta)]^{N-k}$. ОМП является решением уравнения $\pi(\theta) = k/N$. Это уравнение преобразуется к виду $2(1 - \Phi(\theta/\sqrt{\bar{t}})) = k/N$, где $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2) du$. По теореме Рао ([5], с. 312) $\hat{\theta}$ асимптотически эффективна и $\hat{\theta}^{ac} \sim N(\theta, \sigma^2/N)$, где $\sigma^2 = \pi(\theta) [1 - \pi(\theta)] [d\pi(\theta)/d\theta]^{-2}$.

Этим способом оценивания можно воспользоваться и в случае, когда $D = [A, B]$. Допустим, что $a=0$. Тогда плотность распределения времени первого выхода имеет вид $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\pi b^2}{(B-A)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n [1 - (-1)^n] \times$

$\times \exp\left[-\left(\frac{\pi n}{B-A}\right)^2 \frac{b^2}{2} t\right] \sin\left[\frac{\pi n}{B-A}(x-A)\right]$, весьма затруднительный

для получения оценок в аналитическом виде. Но вероятности выхода процесса через A (или B) легко вычислить. Именно, вероятность выхода процесса через A имеет вид [2]: $\pi(x, \theta) = (\exp(-\theta x) - \exp(-\theta B)) \times (\exp(-\theta A) - \exp(-\theta B))^{-1}$, где $\theta = 2a/b^2$.

Если из N траекторий k выходят из D через границу A , то ОМП является решением уравнения $\pi(x, \theta) = k/N$. Распределение $\hat{\theta}$ асимптотически нормально: $\hat{\theta}^{ac} \sim N(\theta, \sigma_1^2/N)$, где $\sigma_1^2 = \pi(x, \theta) [1 - \pi(x, \theta)] \times \left[\frac{\partial \pi(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2$. ОМП начального положения x является решением уравнения $\pi(x, \theta) = k/N$ и $\hat{x}^{ac} \sim N(x, \sigma_2^2/N)$, где $\sigma_2^2 = \theta^{-2} [1 - \exp(-\theta(B-x))] [\exp(\theta(x-A)) - 1]$.

Если $a=0$, то $\pi(x, \theta) = \pi(x) = (B-x)/(B-A)$ и $\hat{x} = B - k(B-A)/N$. Очевидно, $E\hat{x} = x$, $D\hat{x} = (B-x)(x-A)/N$ и $\hat{x}^{ac} \sim N(x, (B-x)(x-A)/N)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., «Наука», 1974.
2. Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., «Наука», 1977.
3. Тихонов В. И., Выбросы случайных процессов, М., «Наука», 1970.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., ГИТТЛ, 1951.
5. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применение, М., «Наука», 1968.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
3/VI 1980