EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 4

УДК 519.24/28

*Т. ТОБИАС*

# ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА ПО КОСВЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

*T. TOBIAS.* DIFUSIOONIPROTSESSI KORDAJATE HINDAMINE KAUDSETE VAATLUSTE PÕHJAL

*T. TOBIAS.* ESTIMATION OF THE COEFFICIENTS OF THE DIFFUSION PROCESS BY INDIRECT OBSERVATIONS

*(Представил Н. Алумяэ)*

1. Пусть $x(t,\omega;\theta)$ — случайный процесс, зависящий от неизвестного параметра $\theta$. При постановке задач об оценивании $\theta$ обычно считается, что задана часть траектории $x_0{}^T=\{x(s,\omega;\theta),\ 0\leqslant s\leqslant T\}$, по которой строится оценка $\hat{\theta}$, наилучшая в определенном смысле.

Например ([1], с. 645), пусть $x_t=x(t,\omega;\theta)$ — процесс диффузионного типа с дифференциалом $dx_t=\theta a_t(x)dt+dW_t$, $x(0)=0$. Оценка максимального правдоподобия (ОМП) имеет вид

$$\hat{\theta}_T=\int\limits_0^T a_t(x)\,dx_t\Big[\int\limits_0^T a_t{}^2(x)\,dt\Big]^{-1}$$

и определяется она отрезком конкретной траектории процесса $x_t$. Различные способы оценивания известны также в частично наблюдаемой модели, т. е. когда $x_t$ — вектор, у которого поддаются наблюдению лишь реализации части компонент.

В данном сообщении рассмотрим проблему в несколько иной постановке. Пусть траектория процесса ненаблюдаема. Наблюдению доступны лишь значения (вернее, оценки значений) некоторых функционалов от процесса, по которым требуется построить оценку параметра $\theta$. Функционалы, по значениям которых строятся оценки, связаны с моментом первого выхода процесса из заданной области. Это соответствует случаю, когда процесс наблюдаем лишь на границе области и можно зафиксировать его положение в случайный момент выхода, а иногда и время первого выхода. Хорошо известно, что для диффузионных процессов значения таких функционалов определяются как решения некоторых дифференциальных уравнений [2, 3]. Поэтому ниже мы не будем формулировать точные условия относительно гладкости коэффициентов и границы области, гарантирующие существование решений этих уравнений, и будем считать, что эти (довольно слабые) условия везде выполнены.

2. Пусть $x_t=x(t)$, $x(0)=x$ — однородный $n$-мерный диффузионный процесс с равномерно эллиптическим производящим оператором $L=$

$$=\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j},\quad x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in R_n.$$

Пусть $D \subset R_n$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma$ и $\gamma$ — часть этой границы. Обозначим через $u_\gamma(t, x)$ вероятность события, что в течение времени $t$ процесс $x_s$, $0 \leqslant s \leqslant t$, выйдет из области $D$ через $\gamma$. Известно [3], что при слабых ограничениях эта вероятность определяется как решение следующего уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial t} = Lu_\gamma, \tag{1}$$

$$u_\gamma(0, x) = 0,\ x \in D;\ u_\gamma(t, x) = 1,\ x \in \gamma;\ u_\gamma(t, x) = 0,\ x \in \Gamma \backslash \gamma.$$

Допустим, что о каждой траектории процесса $x_t$ известно, вышла она за время $t$ из области $D$ через $\gamma$ или нет (ввиду равномерной эллиптичности оператора $L$ процесс выйдет из области $D$ за конечное время с вероятностью 1). Эта информация дает возможность статистически оценивать решение уравнения $u_\gamma(t, x)$. Пусть неизвестные параметры процесса $x_t$ — коэффициенты $a_i(x)$, $b_{ij}(x)$ и начальное положение $x(0) = x$ (или часть из них). Задача оценивания заключается в следующем: по оценке решения уравнения (1) требуется найти оценки неизвестных коэффициентов уравнения (1). Конечно, постановка задачи должна быть уточнена, так как в общем случае оцениваемы лишь определенные комбинации параметров. Отдельному рассмотрению подлежит также случай, когда оцениваемый параметр содержится в коэффициентах (т. е. коэффициенты заданы в виде $a_i(x, \theta)$, $b_{ij}(x, \theta)$).

Если есть возможность зафиксировать точный момент $\tau$ первого выхода траектории процесса из области $D$, то можно воспользоваться характеристиками случайной величины $\tau$. Среднее время выхода $E_x\tau = T_1(x)$ удовлетворяет уравнению [2]

$$LT_1 + 1 = 0, \quad T_1(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Требуется оценить неизвестные коэффициенты уравнения (2) по оценке $T_1(x)$.

Высшие моменты $E_x\tau^k = T_k(x)$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям ($T_0 = 1$) [2]:

$$LT_k + kT_{k-1} = 0, \quad T_k(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{3}$$

Если уравнения (3) удастся решить аналитически, тогда оценивание можно провести методом моментов. В противном случае нужно опять провести оценивание косвенно, т. е. построить оценку параметров по оценке решения $T_k(x)$.

В детерминированной постановке описанная задача близка к т. н. обратным задачам в теории дифференциальных уравнений, когда по заданным точным значениям функционалов от решений требуется определить неизвестные коэффициенты или краевые условия уравнения.

Если плотность распределения времени первого достижения границы удастся найти в аналитическом виде, тогда можно воспользоваться обычными методами оценивания. Ниже рассматривается один такой частный случай.

3. Пусть $x_t$ — однородный одномерный диффузионный процесс, $Lu = au' + 1/2\ b^2u''$, где $a$ и $b$ — постоянные. Выберем сначала $D = (-\infty, B]$, $x(0) = x < B$ и пусть $a > 0$.

Известно явное выражение для плотности распределения времени первого достижения границы $B$. Именно:

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial t}=\frac{B-x}{\sqrt{2\pi b}}t^{-3/2}\exp[a(B-x)/b]\exp[-(B-x)^2/2bt-a^2t/2b].$$

Обозначим $v(t,\theta_1,\theta_2)=(2\pi)^{-1/2}\theta_1 t^{-3/2}\exp(\theta_1\theta_2)\exp(-\theta_1^2/2t-\theta_2^2t/2)$, где $\theta_1=(B-x)/\sqrt{b}$, $\theta_2=a/\sqrt{b}$. Пусть $t_1,\ldots,t_N$ — моменты достижения границы $B$ независимыми траекториями процесса. Отметим, что $P(t_i<\infty)=1$ и $Et_i<\infty$ (так как $a>0$). Обозначим $s_1=N^{-1}\sum_{i=1}^N t_i$, $s_2=N^{-1}\sum_{i=1}^N t_i^{-1}$. Распределение $v(t,\theta_1,\theta_2)$ — экспоненциальное и $s=(s_1,s_2)$ — минимальная достаточная статистика семейства $v(t,\theta_1,\theta_2)$. ОМП имеют вид: $\hat\theta_2=[s_1(s_1s_2-1)]^{-1/2}$, $\hat\theta_1=\hat\theta_2 s_1$. Отсюда: $\hat a=(B-x)s_1^{-1}$, $\hat b=(B-x)^2s_1^{-1}(s_1s_2-1)$, $\hat x=B-as_1$.

Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\tau$. С помощью формул 3.214 и 3.283 из [4] получим, что $E_x\tau=\theta_1/\theta_2=(B-x)/a$ и $E_x\tau^2=((1+\theta_1\theta_2)\ \theta_1)/\theta_2^3=(B-x)[b+(B-x)a]a^{-3}$. Поэтому $E\hat x=x$ и $D\hat x=b(B-x)/aN$. Ввиду экспоненциальности распределения случайной величины $\tau$ дисперсия $D\hat x$ достигает границы Крамера—Рао.

Если $a=0$, то $v(t,\theta)=(\theta/\sqrt{2\pi})t^{-3/2}\exp(-\theta^2/2t)$, где $\theta=(B-x)/\sqrt{b}$. ОМП имеют вид: $\hat x=B-\sqrt{b/s_2}$, $\hat b=(B-x)^2s_2$. Можно проверить, что $E\hat x=-\infty$, а $E\hat b=b$ и $D\hat b=2b^2/N$ (т. е. граница Крамера—Рао достигается).

Ввиду того, что в данном случае $Et_i=\infty$, уместно воспользоваться другим методом, а именно — за достижением границы $B$ наблюдать в течение фиксированного промежутка времени $\bar t$. Пусть $\pi(\theta)=\theta/\sqrt{2\pi}\int_0^{\bar t}t^{-3/2}\exp(-\theta^2/2t)\,dt$ — вероятность достижения границы $B$ в течение времени $0<t\leqslant\bar t$. Пусть за время $\bar t$ из $N$ траекторий $k$ достигают границы $B$. Функция правдоподобия имеет вид $(N!/k!(N-k)!)\pi^k(\theta)[1-\pi(\theta)]^{N-k}$. ОМП является решением уравнения $\pi(\theta)=k/N$. Это уравнение преобразуется к виду $2(1-\Phi(\theta/\sqrt{\bar t}))=k/N$, где $\Phi(x)=1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\exp(-u^2/2)\,du$. По теореме Рао ([5], с. 312) $\hat\theta$ асимптотически эффективна и $\hat\theta^{ac}\sim N(\theta,\sigma^2/N)$, где $\sigma^2=\pi(\theta)[1-\pi(\theta)][d\pi(\theta)/d\theta]^{-2}$.

Этим способом оценивания можно воспользоваться и в случае, когда $D=[A,B]$. Допустим, что $a=0$. Тогда плотность распределения времени первого выхода имеет вид $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\pi b^2}{(B-A)^2}\sum_{n=1}^{\infty}n[1-(-1)^n]\times\exp\left[-\left(\frac{\pi n}{B-A}\right)^2\frac{b^2}{2}t\right]\sin\left[\frac{\pi n}{B-A}(x-A)\right]$, весьма затруднительный для получения оценок в аналитическом виде. Но вероятности выхода процесса через $A$ (или $B$) легко вычислить. Именно, вероятность выхода процесса через $A$ имеет вид [2]: $\pi(x,\theta)=(\exp(-\theta x)-\exp(-\theta B))\times(\exp(-\theta A)-\exp(-\theta B))^{-1}$, где $\theta=2a/b^2$.

Если из $N$ траекторий $k$ выходят из $D$ через границу $A$, то ОМП является решением уравнения $\pi(x,\theta)=k/N$. Распределение $\hat{\theta}$ асимптотически нормально: $\hat{\theta}^{ac}\sim N(\theta,\sigma_1^2/N)$, где $\sigma_1^2=\pi(x,\theta)[1-\pi(x,\theta)]\times\times\left[\frac{\partial\pi(x,\theta)}{\partial\theta}\right]^{-2}$. ОМП начального положения $x$ является решением уравнения $\pi(x,\theta)=k/N$ и $\hat{x}^{ac}\sim N(x,\sigma_2^2/N)$, где $\sigma_2^2=\theta^{-2}[1-\exp(-\theta(B-x))][\exp(\theta(x-A))-1]$.

Если $a=0$, то $\pi(x,\theta)=\pi(x)=(B-x)/(B-A)$ и $\hat{x}=B-k(B-A)/N$. Очевидно, $E\hat{x}=x$, $D\hat{x}=(B-x)(x-A)/N$ и $\hat{x}^{ac}\sim N(x,(B-x)(x-A)/N)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., «Наука», 1974.
2. Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., «Наука», 1977.
3. Тихонов В. И., Выбросы случайных процессов, М., «Наука», 1970.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., ГИТТЛ, 1951.
5. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применение, М., «Наука», 1968.


*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
3/VI 1980