Авторы выражают благодарность А. Пурга за ценные критические замечания.

T_k, K	I, A	d, *мм*	j_k, *А/см²*	j_i, *А/см²*	$\Delta\varphi$, *В*	E, *В/м*	Q/j_k, *В*
3410	150	0,4	$1{,}2\cdot10^5$	$2{,}4\cdot10^4$	0,69	$3{,}3\cdot10^6$	—0,6

ЛИТЕРАТУРА

1. Пустогаров А. В., В сб.: Экспериментальное исследование плазмотронов, Новосибирск, «Наука», 1977, с. 315—340.
2. Нейман В., В сб.: Экспериментальное исследование плазмотронов, Новосибирск, «Наука», 1977, с. 253—292.
3. Фоменко В. С., Эмиссионные свойства материалов, Киев, «Наук. думка», 1970.

Институт термофизики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6/VII 1979

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1979.4.15

УДК 518 : 517.392

А. ЙЫГИ

О ПРИМЕНЕНИИ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ВЫЧИСЛЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

A. JÕGI. PARIMATE KVADRATUURVALEMITE KASUTAMISEST INTEGRAALVÕRRANDITE LAHENDAMISEL JA SINGULAARSETE INTEGRAALIDE ARVUTAMISEL

A. JÕGI. ON APPLICATION OF OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS FOR SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS AND EVALUATION OF SINGULAR INTEGRALS

(Представлена А. Хумалом)

1. Рассмотрим решение линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t)=\int_0^1 h(t,s)\,x(s)\,ds+y(t) \tag{1}$$

при помощи наилучшей на некотором множестве функций квадратурной формулы [1] вида

$$\int_0^1 f(s)\,ds = \sum_{k=1}^n A_k f(s_k) + R_n(f). \tag{2}$$

Как известно [2], значения приближенного решения $\tilde{x}(t)$ уравнения (1) в точках s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ можно найти из системы линейных уравнений

$$\tilde{x}(s_i) - \sum_{k=1}^n A_k h(s_i, s_k)\,\tilde{x}(s_k) = y(s_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда

$$\tilde{x}(t) = y(t) + \sum_{k=1}^n A_k h(t, s_k)\,\tilde{x}(s_k).$$

Если $h(t, \cdot)\,x(\cdot) \in C^2 \equiv C^2[0,\ 1]$, тогда наилучшая квадратурная формула (2) имеет узлы, веса [3]

$$s_k = 0{,}5h(\sqrt{3} + 4(k-1)),$$

$$h = (\sqrt{3} + 2(n-1))^{-1},$$

$$A_1 = A_n = 0{,}5h(2 + \sqrt{3}),$$

$$A_k = 2h \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1)$$

и оценку ошибки

$$|R_n(f)| \leqslant M_2 h^2/8,$$

где

$$M_2 = \max_s \left| \frac{\partial^2}{\partial s^2} h(t, s)\,x(s) \right|.$$

Для решения уравнения (1) с использованием наилучшей формулы (2) получим с помощью методики [2] оценку ошибки

$$\max_{s \in [0,1]} |x(s) - \tilde{x}(s)| < \frac{h^2}{8} \frac{(P + H\tilde{X})\,(1 + BH^{(0)})}{1 - h^2 H\,(1 + BH^{(0)})/8} \tag{3}$$

при условии

$$h^2/8H\,(1 + BH^{(0)}) < 1,$$

где

$$H_t^{(k)} = \max_{t,s} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} h(t, s) \right|,$$

$$H_s^{(k)} = \max_{t,s} \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} h(t, s) \right|,$$

$$H^{(0)} = H_t^{(0)} = H_s^{(0)},$$

$$Y^{(k)} = \max_t |y^{(k)}(t)|, \qquad \tilde{X} = \max_t |\tilde{x}(t)|,$$

$$P = 2Y^{(1)} H_s^{(1)} + Y^{(2)} H^{(0)},$$

$$H=H_s^{(2)}+2H_t^{(1)}H_s^{(1)}+H_t^{(2)}H^{(0)},$$

$$C=(c_{ik}),\quad c_{ik}=A_k h(s_i,s_k)\quad (i,k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$D=(d_{ik})=(E-C)^{-1},$$

$$B=\max_i \sum_{k=1}^{n}|d_{ik}|.$$

В качестве примера рассмотрим уравнение ([4], с. 357)

$$x(t)=\int_{-\pi}^{\pi}(0{,}3/\pi)x(s)/(0{,}64\cos^2((t+s)/2)-1)\,ds+25-16\sin^2 t,$$

точное решение которого имеет вид

$$x(t)=8{,}5+128/17\cos 2t.$$

Использование наилучшей формулы (2) позволяет получить при $n=37$ правую часть оценки ошибки (3), равную 0,000787, в то время как фактическая ошибка $\max\limits_k |x(s_k)-\tilde{x}(s_k)|=0{,}000755$. Отметим, что применение формулы трапеций дает при $n=37$ фактическую ошибку 0,464.

2. Рассмотрим вычисление главного значения сингулярного интеграла

$$\int_0^1 f(x)/(x-c)\,dx,\quad c\in]0{,}1[,\quad f(x)\in W^rL_q$$

при помощи наилучших квадратурных формул. Исходя из равенства

$$\int_0^1 f(x)/(x-c)\,dx=\int_0^{c-\varepsilon} f(x)/(x-c)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^1 f(x)/(x-c)\,dx+E'_n(f),$$

определим при достаточно малом $\varepsilon=\mathrm{const}>0$ значения интегралов

$$\int_0^{c-\varepsilon} f(x)/(x-c)\,dx,\quad \int_{c+\varepsilon}^1 f(x)/(x-c)\,dx.$$

Пусть на множестве W^rL_q имеется наилучшая квадратурная формула (2). Тогда на множестве $W^r_{\lambda(x)}L_q=\{f:f(\lambda(x))\in W^rL_q\}$ наилучшей формулой является формула [5]

$$\int_0^1 \varrho(x)f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}B_kf(t_k)+E_n(f),$$

где

$$t_k=\lambda(x_k),\quad B_k=\nu A_k,\quad E_n(f)=\nu R_n(f),$$

$$\nu=\int_0^1\varrho(t)\,dt,\quad \varphi(x)=1/\nu\int_0^x\varrho(t)\,dt,$$

а $\lambda(x)$ есть обратная функция функции $\varphi(x)$. Вычисления дают

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)/(x-c)\,dx=\ln(\varepsilon/c)\sum_{k=1}^{n_1}A_kf(c(1-(\varepsilon/c)^{x_k}))+\\ +\ln((1-c)/\varepsilon)\sum_{k=1}^{n_2}A_kf(c+\varepsilon((1-c)/\varepsilon)^{x_k})+E_n(f),\end{aligned}\tag{4}$$

где

$$n = n_1 + n_2,$$

$$E_n(f) = \ln(\varepsilon/c)\, R_{n_1}(f_1) + \ln((1-c)/\varepsilon)\, R_{n_2}(f_2) + E'_n(f),$$

$$f_1(x) = f((c-\varepsilon)x), \qquad f_2(x) = f(c+\varepsilon+(1-c-\varepsilon)x).$$

Пример. Вычисляя интеграл

$$\int_0^1 f(x)/(x-0{,}5)\,dx = 4{,}908448\ldots,$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2, & x \leqslant 1/3 \\ 3x^2+2x-1/3, & x > 1/3, \end{cases}$$

по формуле (4), получим следующие приближенные значения

ε	n		
	40	100	280
10^{-3}	4,8983	4,89843	4,89845
10^{-4}	4,9072	4,90742	4,90745
10^{-5}	4,9078	4,90829	4,908356
10^{-6}	4,9074	4,90835	4,9084463

Применение формулы трапеций при $\varepsilon = 0{,}01$ и $n = 800$ дает значение 4,96.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., «Наука», 1974.
2. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 2, Минск, «Вышэйш. школа», 1975.
3. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., «Наука», 1967.
4. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., «Наука», 1965.
5. Левин М., Арро В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 27, № 2, 224—226 (1978).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 20/VII 1979